Математика II

за други разред гимназије

Растко Вуковић, проф.

скрипта за наставу држану 2011-14. ш. г. у Бањој Луци

Гимназија Бања Лука

Математика за II разред гимназије
Скрипта за наставу математике држану 2011-14. у Бањој Луци.

Садржај

I Тригонометријске дефиниције

Тригонометрија (грч. τρίγωνον – троугао, μέτρον – мјерење) је грана математике која примарно проучава односе између страна и углова троуглова, као и периодичне појаве попут таласа. Даљња подјела тригонометрије је на геометријску, алгебарску и функцијоналу, а овдје слиједимо први дио те подјеле.

У основи назива тригонометрије су три старогрчке и латинске ријечи: *Tri-Gonia-Metron* (тро-угаоно-мјерење). Збир сва три угла у троуглу је 180° па према томе троуглове дјелимо на:

- **правоугле** – троуглови који имају један угао прав (90°) и два оштра;
- **оштроугле** – који имају сва три угла оштра (мања од 90°);
- **тупоугле** – којима је један угао туп (од 90° до 180°), остала два оштри.

Троуглове дијелимо и према особинама њихове три странице на:

- **разностране** – којима су све три странице различите дужине;
- **једнакокраке** – који имају двије странице једнаке;
- **једнакостраничне** – троуглови са три међусобно једнаке странице.

У античком Египту, у вријеме прије 1600. г.п.н.е. биле су познате неке теореме о странама троугла и сличности (трилатераметрија). Међутим, Стари Египћани се нису много бавили мјерењем углова (тригонометријом).

Claudius Ptolemaeus, 90. – 186. год.

Грци, су се око 180. г.п.н.е. бавили тетивама круга и аналогним тригонометријским мјерењима. Из тог периода и од хеленистичких математичара (око 150. г.п.н.е.) су нам познати главни данашњи тригонометријски идентитети.

Од Вавилоњана имамо мјере углова у степенима, минутама и секундама.

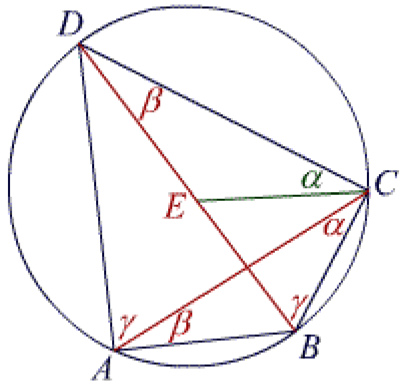
Значајан развој тригонометрије забиљежен је од индијских математичара 4. и 5. вјека нове ере, међу којима су најистакнутији били Сидхантхас и Ариабхата. Вјерујемо да прве таблице синуса и косинуса урадили Индијци.

Затим су тригонометрију од 9. до 14. вијека развијали Кинези, а од 14. до 18. вијека Европљани.

Од прастарих времена до данас тригонометрија се користи у веома различитим дисциплинама од који су неке: геодезија, навигација, астрономија, аеронаутика.

Птоломејева теорема 0.0.1. Четвороугао је тетиван (уписан у кружницу) ако и само ако му је производ дијагонала једнак збиру производа супротних страница, другим ријечима акко је $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$, као на сљедећој слици.

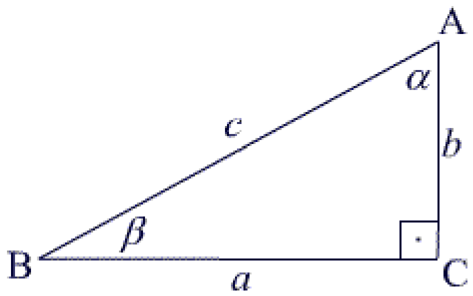
Доказ: Периферни углови над истом тетивом су једнаки, па је $\angle BAC = \angle BDC = \beta$ и $\angle CAD = \angle CBD = \gamma$. Нека је $\angle DCE = \angle BCA = \alpha$. Тада имамо сличне троуглове: $\Delta CDE \sim \Delta ACB$ и $\Delta ACD \sim \Delta BCE$. Отуда $DE : CD = AB : AC$ и $BE : BC = AD : AC$, па добијамо $DE \cdot AC = CD \cdot AB$ и $BE \cdot AC = BC \cdot AD$. Сабирањем ових једнакости $DE \cdot AC + BE \cdot AC = CD \cdot AB + BC \cdot AD$, тј. $(DE + BE) \cdot AC = CD \cdot AB + BC \cdot AD$. Како је $DE + BE = BD$ то је $BD \cdot AC = CD \cdot AB + BC \cdot AD$.♦



1. Правоугли троугао

Основне **тригонометријске функције** дефинишемо на правоуглом троуглу.

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha \frac{b}{c}$, $\text{tg}\ \alpha = \frac{a}{b}$, $\text{ctg}\ \alpha = \frac{b}{a}$.



Основни **тригонометријски идентитети** су:

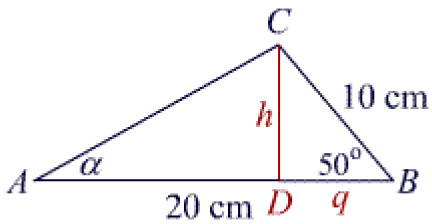
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\text{tg}\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\text{ctg}\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\sin\alpha = \cos\beta$, $\text{tg}\ \alpha = \text{ctg}\ \beta$. Такође $\sin\alpha = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, гдје $t = \text{tg}\ \alpha$, а за оштре углове (0-90°) предзнак је плус.

1.1. Основне особине

Основне формуле тригонометријских функција су нам познате још из првих разреда средње школе па ћемо их овдје само поновити кроз примјере и задатке. То су дефиниције тригонометријских функција на правоуглом троуглу и пар теорема за рјешавање троуглова.

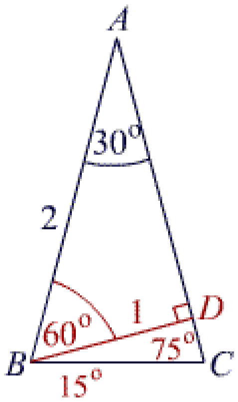
Примјер 1.1.1. Наћи угао α у (оштроуглом) троуглу ABC, чије су странице AB и BC дужине 20 и 10 центиметара, а $\angle B = 50°$.

Рјешење: На слици десно, датом троуглу ABC повучена је висина $CD = h$, која страницу AB дијели на дужи AD и $DB = q$.



Из ΔBCD: $\sin 50° = \frac{CD}{BD} = \frac{h}{10} \Leftrightarrow h = 10 \cdot \sin 50°$, такође $\cos 50° = \frac{BD}{CD} = \frac{q}{10} \Leftrightarrow q = 10 \cdot \cos 50°$. Са друге стране, из ΔACD: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{CD}{AD} = \frac{h}{20-q} = \frac{10 \cdot \sin 50°}{20 - 10 \cdot \cos 50°} =$ 0,564425 заокружено на 5 децимала. Отуда α = 29,44°. Како у степену има 60 минута, а у минути 60 секунди, због 0,44°·60 = 26,4’ и 0,4’·60 = 24” добијамо α = 29° 26’ 24”.♦

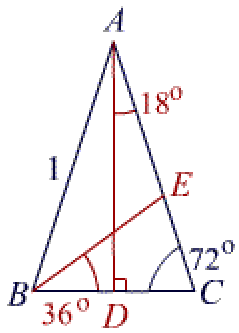
Примјер 1.1.2. Без употребе таблица или калкулатора израчунати:
а) tg 15°; **б)** sin 18°.



Рјешење:
а) На слици лијево, дат је једнакокраки троугао *ABC*, гдје је *AB* = *AC* = 2, ∠*ABC* = ∠*BCA* = 75°, висина из тјемена *B* датог троугла *BD* = 1.

Како је *AD* = $\sqrt{3}$, из правоуглог троугла *BCD* добијамо tg 15° = *CD* = *AC* – *AD* = 2 – $\sqrt{3}$. Према томе tg 15° = 2 – $\sqrt{3}$.

б) На сљедећој слици десно дат је једнакокраки троугао *ABC*, гдје је *AB* = *AC* = 1 и ∠*ABC* = ∠*ACB* = 72°. *AD* је висина, *BE* је симетрала угла.



Нека је *BC* = *x*. Тада је *AE* = *BE* = *BC* = *x* и $\sin 18° = \frac{x}{2}$. Из сличности троуглова *ABC* и *BCE* слиједи *x* : (1 – *x*) = 1 : *x*, или $x^2 + x - 1 = 0$, односно $\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} - 1 = 0$. Отуда $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0$, или $x + \frac{1}{2} = \frac{\pm\sqrt{5}}{2}$, тј. $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Задовољава само једно рјешење $x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Према томе,

$\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, тј. sin 18° = φ / 2, гдје је број φ тзв. златни пресјек.♦

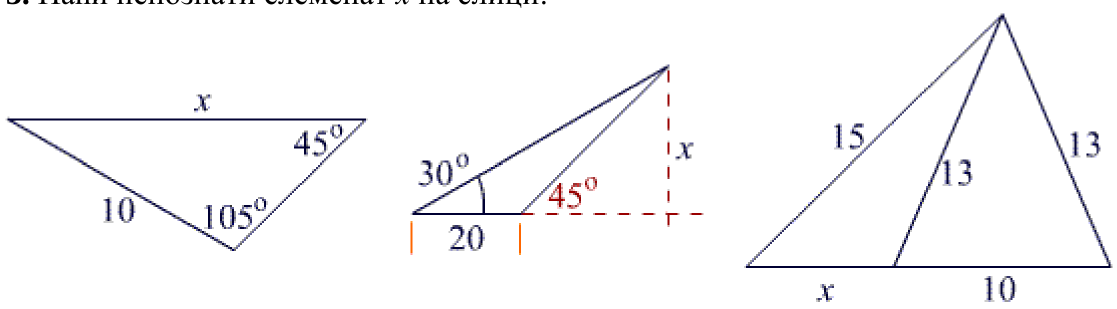
Задаци 1.1.3.
1. Користећи слику правоуглог троугла:
а) Написати тригонометријске функције за углове алфа и бета;
б) Доказати основне тригонометријске идентитете.

2. Цртежима једнакостраничног троугла и квадрата, доказати:

α	30°	45°	60°
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

3. Наћи непознати елеменат x на слици:



4. Израчунати вриједности осталих тригонометријских функција оштрог угла α и конструисати одговарајући правоугли троугао, ако је:

а) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$; **б)** $\cos\alpha = \frac{7}{25}$;

в) tg $\alpha = \frac{21}{20}$; **г)** ctg $\alpha = \frac{15}{8}$.

5. Могу ли синус и косинус истог угла бити:

а) $\frac{2}{7}$ и $\frac{5}{7}$? **б)** $\frac{5}{13}$ и $\frac{10}{13}$?

6. Одредити вриједности осталих функција датог угла, ако се зна:

а) $\sin 15° = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$; **б)** $\cos 22°30' = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

7. Ако је tg x = 2, израчунати $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^3 x - \cos^3 x}$.

8. Ако је $\frac{3\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x} = 1$, израчунати tg x.

9. Ако је tg x + ctg x = a, израчунати tg^2 x + ctg^2 x.

10. Ако је sin x + cos x = a и sin x·cos x = b, доказати да је $b = \frac{1}{2}(a^2 - 1)$.

11. Упростити израз $\frac{\cos\beta}{1+\sin\beta}$ + tg β.

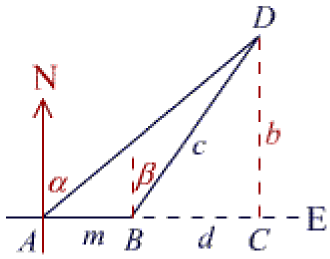
12. Марко је отишао 8 километара у правцу сјевероистока, затим 11 km у правцу југоистока. Наћи његову удаљеност од почетне тачке и угао у односу на сјевер.
[13,6 km; 98,97°]

1.2. Основне примјене

У земљишној навигацији, угао између правца сјевера и датог правца назива се сјеверни **азимут** (ар. السمت *as-simt* – правац), или беринг (енг. *bearing*). Енглески, **беринг** је угао у степенима мјерен у смјеру казаљке на сату који се обично пише троцифрено и завршава словом T. На примјер 045°T је сјевероисточно, на 225°T је југозапад.

Примјер 1.2.1. Првим осматрањем са брода који плови ка истоку опажено је светионик на правцу (берингу) 050°T. Када је брод прешао 4 километара исти свјетионик је опажен са правцем 035°T. Колика је удаљеност извора свјетла од брода у другом опажању?

Рјешење: На слици десно, брод са прве тачке A опажа свјетионик, тачку D под углом $\alpha = 050°$ у односу на сјевер (енг. *North*), затим након пређених $m = 4$ km пловећи у правцу истока (*East*), из тачке B исту тачку D опажа под углом (*bearing*) $\beta = 035°$. На правцу путовања брода најближа тачка светионику је C. Из ΔACD имамо



$\operatorname{tg}(90°-\alpha) = \frac{DC}{AC} = \frac{b}{m+d}$, тј. $b = (m + d)\cdot\operatorname{ctg}\alpha$.

Из ΔBCD имамо $\operatorname{tg}(90°-\beta) = \frac{DC}{BC} = \frac{b}{d}$, тј. $b = d\cdot\operatorname{ctg}\beta$.

Отуда $(m + d)\cdot\operatorname{ctg}\alpha = d\cdot\operatorname{ctg}\beta$, те $BC = d = \frac{m\cdot\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha} \approx 5{,}7$ km, па је

$DC = b = \frac{m\cdot\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha} \approx 8{,}1$ km.

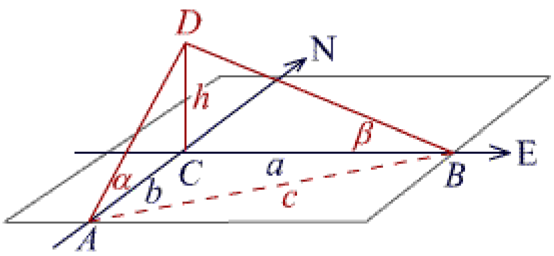
Користећи Питагорину теорему $BD^2 = BC^2 + CD^2$, тј. $c^2 = d^2 + b^2$ добијамо

$c = \frac{d}{\sin\beta} \approx 9{,}9$ km.♦

Елевација је висина тачке изнад неке основе, или равни. Угао елевације је угао под којим се види узвишена тачка. Слично, **угао депресије** је угао под којим се види нека тачка испод неке основе, или равни.

Примјер 1.2.2. Од тачке A у правцу сјевера до подножја стјене има 100 метара, а угао елевације врха стијене је 35°. Врх стијене се види из тачке B у правцу истока под углом елевације 25°. Колико су удаљене тачке A и B ?

Рјешење: На слици лијево, $\angle CAD = \alpha = 35°$ угао елевације врха стијене (D) из тачке A. Удаљеност до подножја стјене је $AC = b = 100$ m. Угао елевације стјене из источне тачке B је $\angle CBD = \beta = 25°$.



Из ΔABC имамо $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Из ΔBCD имамо $\operatorname{tg}\beta = \frac{CD}{BC}$.

Из ΔACD имамо tg $\alpha = \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{h}{b}$, тј. $h = b\cdot\text{tg}\ \alpha = 100\cdot\text{tg}\ 35° \approx 70$ метара. Из претходне, $a = BC = \dfrac{CD}{\text{tg}\beta} = \dfrac{b\cdot\text{tg}\alpha}{\text{tg}\beta} = \dfrac{100\cdot\text{tg}35°}{\text{tg}25°} \approx 150$ m. Поново предходна једнакост $c^2 = b^2 + a^2$, сада даје $c^2 = b^2 + \dfrac{b^2\,\text{tg}^2\,\alpha}{\text{tg}^2\,\beta}$, тј. $c = b\sqrt{1+\text{tg}^2\,\alpha\cdot\text{ctg}^2\,\beta} \approx$ 180 m. Према томе, тражена удаљеност AB приближно је 180 метара.♦

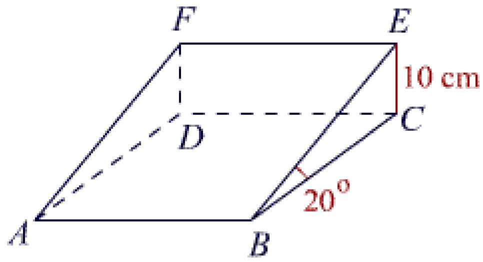
Задаци 1.2.3.

1. Угао депресије са зграде високе 30 метара под којим се види оближња фонтана је 48°. Колика је удаљеност фонтане до зграде?

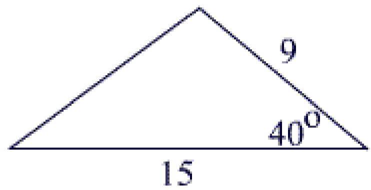
2. Када је Сунце под углом 70° изнад хоризонта, вертикални штап баца сјенку дужине 9 m. Колика је сјенка истог штапа када је Сунце под углом 60° ?

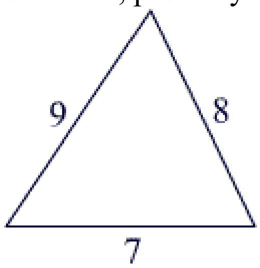
3. Градови A и B су удаљени 60 km. Спортски аеродром је од града A у односу на правац сјевера (беринг) под углом 050°Т, а исти је у односу на град B под углом 300°Т. Колика је удаљеност спортског аеродрома од града A ?

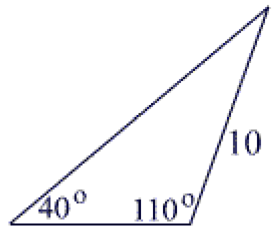
4. На слици десно видимо клин угла $\angle CBE$ = 20° и висине основе CE = 10 cm. Ако се зна да је $\angle EAF$ = 60°, колики су растојање AE и угао $\angle EAC$?



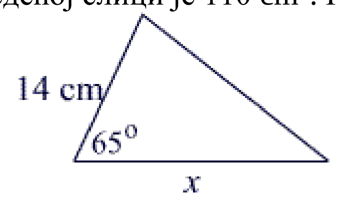
5. Наћи површине троуглова на сликама, разлажући их на правоугле:







6. Површина троугла на сљедећој слици је 110 cm^2. Наћи x.



1.3. Синусна и косинусна теорема

Дат је произвољан троугао са тјеменима A, B и C, угловима редом α, β и γ, и наспрамним страницама a, b и c. R и r су полупречници описане и уписане кружнице датог троугла.

Рјешити троугао значи наћи његове странице и углове.

Синусна теорема:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

најчешће служи за рјешавање троугла када су дата два његова угла и страница, или су дате двије странице и угао наспрам једне од њих. Сви ови случајеви имају једно рјешење, осим посљедњег – када имамо два рјешења ако је дати угао наспрам краће стране.

Косинусна теорема:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cdot\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma.$$

Косинусна теорема служи за рјешавање троугла када су дати његов угао и захваћене двије стране, или су познате све три стране.

Површина троугла је

$$P_\Delta = \frac{a\cdot h_a}{2} = \frac{ab}{2}\sin\gamma = \frac{abc}{4R} = rs,$$ гдје је полуобим $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Једнако важи и Херонов образац $P_\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Задаци 1.3.1.

1. Са врха зграде високе 80 метара види се врх дрвета под углом депресије 63°. Са подножја зграде врх истог дрвета се види под углом 34°.
а) Колико је високо дрво?
б) Колико је дрво удаљено од зграде?

[20,5 m; 30,3m]

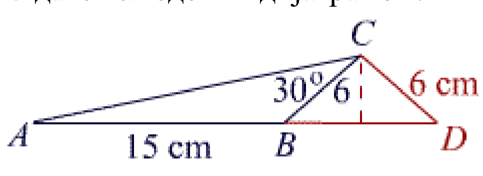
2. Професионални фудбалски гол је висине 2,44 метра (8 стопа) и ширине 7,32 m (24 стопе). Пенал се шутира са удаљености 11 m равно испред гола.
а) Када шутира пенал под којим углом играч види (хоризонтални) размак статива; под којим углом (елевацијом) се види пречка?
б) Када је фудбалер удаљен 23 m од једне стативе и 21 m од друге, под којим ће углом видјети гол (стативе)?

[36,8°; 12,5°;18,4°]

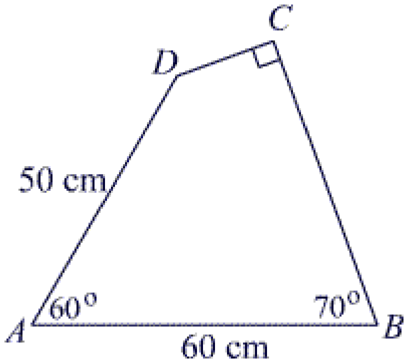
3. Доказати синусну теорему.

4. Доказати косинусну теорему.

5. Наћи површину Δ*ABC* датог сљедећим дијаграмом.



6. На сљедећој слици је приказана чевороугаона база *ABCD* усправне призме висине 0,5 метара. Наћи *BD*, ∠*ABD*, *BC*, површину базе и запремину призме.



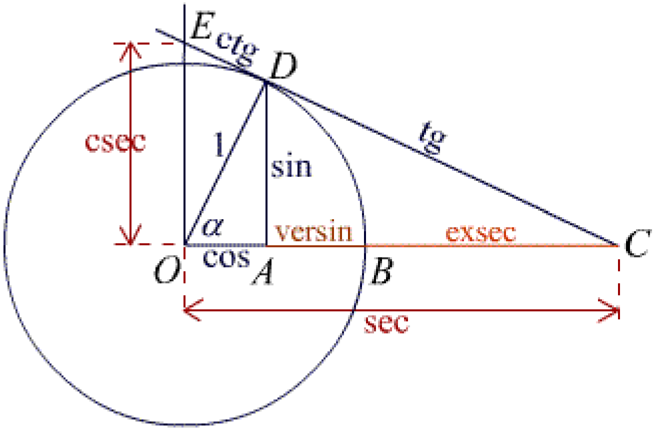
[55,7 cm; 51°; 48,7 cm; 1957 cm^2; 978272 cm^3]

7. Јахта плови 7 km углом (берингом) 130°T, затим 5 km углом 060°T.
а) Колико је удаљена од почетне позиције?
б) Колики је њен сјеверни угао (беринг) у односу на почетну позицију?

[9,9 km; 101,7°T]

2. Јединична кружница

Вриједности тригонометријских функиција се могу разумјети геометријски и помоћу јединичне кружнице без координатног система, као на сљедећој слици.



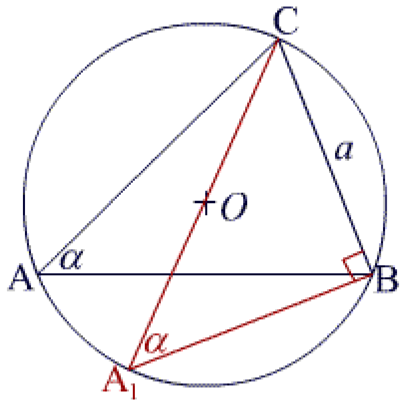
$AD = \sin\alpha$ - синус угла алфа,
$OA = \cos\alpha$ - косинус,
CD = tg α - тангенс,
DE = ctg α - котангенс,
$OC = \sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ - секанс,
$OE = \csc\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$ - косеканс.
Затим, синус версус и екс секанс:
AB = versin $\alpha = 1 - \cos\alpha$,
BC = exsec $\alpha = \sec\alpha - 1$.

Наводимо је само ради комплетирања дефиниција свих тригонометријских функција, а међу њима и таквих као што су косеканс, или версус синус са којима овдје не радимо.

У сљедећа два примјера, насупрот страницама a, b и c троугла ABC налазе се углови α, β и γ. Полупречник кружнице уписане у троугао означавамо са r, а полупречник описане са R.

Примјер 2.0.1. Синусна теорема.

Доказати $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$



Доказ: На слици десно, ΔABC је уписан у круг пречника $2R$ = A_1C. Угао над пречником ∠ A_1BC је прав, а углови ∠A и ∠A_1 над истом тетивом BC су једнаки α. Зато је $\sin\alpha = \dfrac{a}{2R}$, тј.

$\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

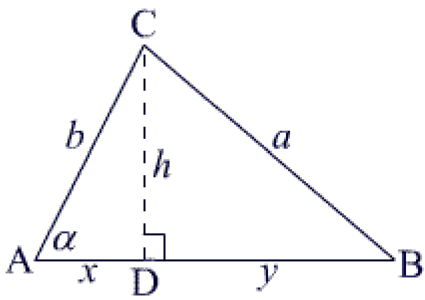
Аналогно добијамо $\dfrac{b}{\sin\beta} = 2R$ и $\dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$, па из транзитивности једнакости слиједи синусна теорема. ♦

Примјер 2.0.2. Доказати косинусну теорему:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$,

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$,

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.



Доказ: На слици десно, висина h = CD троугла ABC дјели страницу c на одсјечке x и y. Према Питагориној теореми имамо $h^2 = a^2 - y^2 = b^2 - x^2$, па због $y = c - x$ слиједи $a^2 - (c^2 - 2cx + x^2) = b^2 - x^2$ и отуда $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$. Како је $x = b\cos\alpha$, то је доказана прва од једнакости. Аналогно, радимо са остале двије висине. ♦

Задатак 2.0.3.

1. Човјек који стоји 5 метара удаљен од уличне свјетиљке баца сјенку дугу 9 м на равну подлогу.

а) Колика је висина свјетиљке, ако је угао елевације врха сјенке 12°?

б) Ако човјек стоји на почетку узбрдице нагиба 25°, колика је дужина сјенке?

2. Растојање између статива фудбалског гола је 7,32 метра. Играч је удаљен 30 м од једне стативе, а 32 м од друге. Под којим углом он види гол?

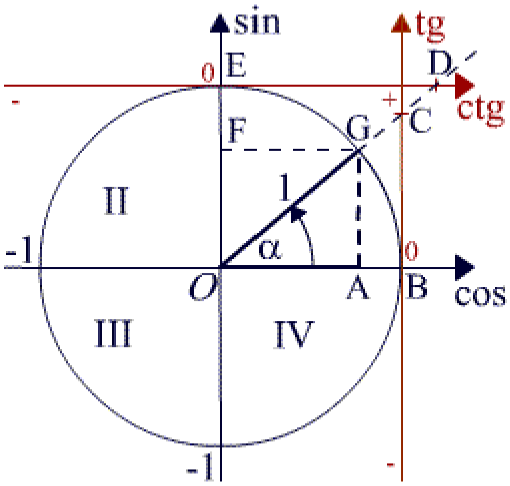
3. Сусједне стране паралелограма су дужина 3,8 цм и 5,2 цм. Угао између њих је 40°. Колика је дужина краће дијагонале?

4. Троугао има углове 56°, 20° и 104°. Најкраћа страна је дужине 30 цм. Колика је најдужа страна?

5. Казаљке часовника су дужине 6 и 8 цм. Наћи растојање између врхова казаљки, ако је 1 час и 10 мин.

6. Ако је однос косинуса два угла једнак односу синуса истих углова онда је троугао једнакокраки. Доказати.

2.1. Тригонометријска кружница



Вриједности тригонометријских функција за углове веће од оштрих, или за негативне углове дефинишемо помоћу **тригонометријске кружнице**. То је кружница са полупречником 1 (јединична кружница) и центром у исходишту координатног почетка.

Апсциса и ордината су редом **косинусна** и **синусна оса**, тангенте у крајњој десној и горњој тачки кружнице су **тангенсна** и **котангенсна** оса.

OA = cos α - **косинус** алфа, *OF* = sin α - **синус**, *BC* = tg α **тангенс**, *ED* = ctg α.

Радијан је дужина лука (BG) јединичне кружнице који се види под датим углом (∠BOG) из центра круга. Обим јединичне кружнице је $2\pi \approx 6{,}28319$, а то је дужина кружног лука који се види под углом 360°. Према томе $2\pi = 360°$. Даље имамо $\pi = 180°$, $\frac{\pi}{2} = 90°$, $\frac{\pi}{3} = 60°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$, $\frac{\pi}{6} = 30°$, и слично. Угао у радијанима се подразумијева.

У односу на непокретни крак угла *OB*, обрнуто смјеру казаљке на сату рачунамо угао до покретног крака OG кроз квадранте. Први квадрант (лук BE) чине углови од 0 до $\frac{\pi}{2}$, II квадрант од $\frac{\pi}{2}$ до π, III квадрант од π до $\frac{3\pi}{2}$, IV од $\frac{3\pi}{2}$ до 2π. На примјер, синус угла из II квадранта је позитиван, а косинус, тангенс и котангенс су негативни.

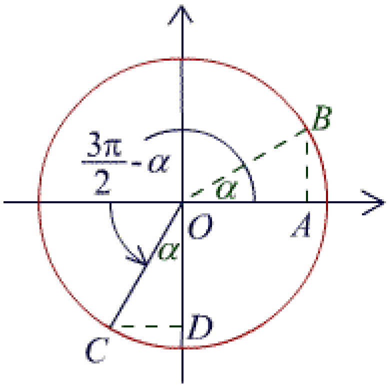
Примјер 2.1.1. Свођењем тригонометијске функције угла $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ на тригонометријску функцију оштрог угла (први квадрант) доказати:

а) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$; **б)** $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$;

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha$; **г)** $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$.

Рјешење: На сљедећој слици видимо подударне троуглове $\Delta OAB \cong \Delta ODC$, што значи да је $OD = -OA$, отуда **а**), и такође $CD = -AB$, а отуда **б**).

Рецимо да права OB сијече тангенсну осу у тачки B_1, а права OC котангенсну осу у тачки C_1 тада имамо подударност $\Delta OA_1B_1 \cong \Delta OD_1C_1$, гдје су A_1 и D_1 пресјеци координатних оса (правих OA и OD) са тангенсном и котангенсном осом. Налазимо да су **в**) и **г**) тачни.



Функција је **парна** када $(\forall x)\ f(-x) = f(x)$. **Непарна** је ако $(\forall x)\ f(-x) = -f(x)$. Косинус је парна функција, а синус, тангенс и котангенс су непарне.

Задаци 2.1.2.

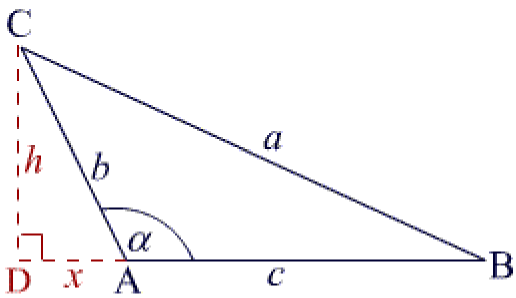
1. Провјерити табелу предзнака функција за углове у квадрантима:

Квадрант	**I**	**II**	**III**	**IV**
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tg	+	-	+	-
ctg	+	-	+	-

2. Провјерити на тригонометријској кружници која од тригонометријских функција је парна, а која је непарна.

3. Доказати косинусну теорему на тупоуглом троуглу, на слици десно.

Напомена: Обратите пажњу да је ∠DAC суплементан са углом α. У каквој релацији су косинуси суплементних углова?



4. Сводећи тригонометријску функцију датог угла на функцију оштрог угла (први квадрант), доказати идентитете:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$; **б)** $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$;

в) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) = -\sin\beta$; **г)** $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) = \cos\beta$.

5. Наћи и доказати аналогне формуле из претходног задатка (4.) за тангенс и котангенс.

6. Доказати да су синуси суплементних углова једнаки, а да су косинуси, тангенси и котангенси супротног предзнака.

7. Израчунати вриједности тригонометријских функција углова:

а) $\alpha = \frac{5\pi}{3}$; **б)** $\beta = -\frac{3\pi}{4}$; **в)** $\gamma = \frac{17\pi}{6}$; $\delta = -\frac{5\pi}{3}$.

8. Поједноставити изразе:
а) $\frac{\sin(2\pi - \alpha) - \cos(2\pi - \alpha)}{\mathrm{tg}(2\pi - \alpha) - \mathrm{ctg}(2\pi - \alpha)}$; **б)** $\frac{\sin(2\pi + \beta) + \cos(2\pi + \beta)}{\mathrm{tg}(2\pi + \beta) - \mathrm{ctg}(2\pi + \beta)}$.

3. Адиционе формуле

Знамо да је $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и да је $\sin 90° = 1$, па $\sin(45° + 45°) \neq \sin 45° + \sin 45°$. Такође, $\cos(\alpha + \beta)$ није једнако $\cos\alpha + \cos\beta$, или $\mathrm{tg}(\alpha + \beta)$ није $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta$.

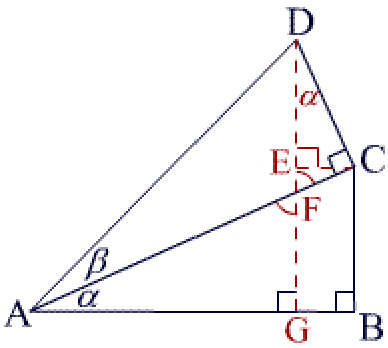
3.1. Збир и разлика углова

За све углове α и β тачне су адиционе једнакости:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta},$$

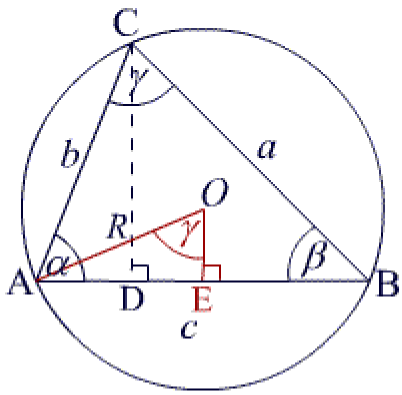
гдје горње (доње) знакове узимамо заједно.

Примјер 3.1.1. Полазећи од слике десно, доказати адициону формулу за синус:
$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.



Доказ: $\sin(\alpha + \beta) = \frac{GD}{AD} = \frac{GE + ED}{AD} = \frac{BC + ED}{AD} =$
$\frac{BC}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} + \frac{ED}{CD} \cdot \frac{CD}{AD} = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.♦

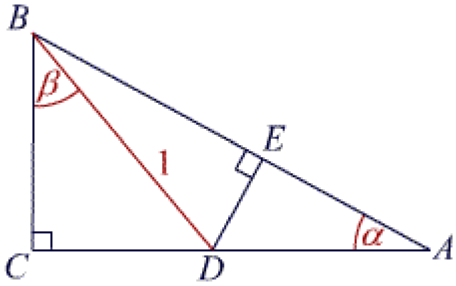
Примјер 3.1.2. Полазећи од сљедеће слике, доказати адиционе формуле за синус:
а) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$;
б) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.



Доказ а) Ставимо да је полупречник описане кружнице $R = \frac{1}{2}$, па синусна теорема (примјер 1.3.) даје $\sin\alpha = a$, $\sin\beta = b$ и $\sin\gamma = c$. То исто слиједи и из слике десно; из ΔAEO:
$\sin\gamma = \frac{c/2}{1/2} = c$, итд. Затим, имамо
$c = AD + DB = b\cos\alpha + a\cos\beta =$
(синусна теорема) $= \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta$. Како је $c = \sin\gamma =$
$\sin(\pi - (\alpha + \beta)) = \ = \sin(\alpha + \beta)$, добијамо тражену формулу. **б)** Из (а) слиједи

$\sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$, јер је косинусна функција парна, а синусна непарна.♦

Примјер 3.1.3. Полазећи од сљедеће слике[1], доказати адициону формулу за косинус збира.



Рјешење: $BC=\cos\beta$, $CD=\sin\beta$, јер је троугао *BCD* правоугли јединичне хипотенузе. Даље је $\angle CBA = 90° - \alpha$, тако да је $\angle CAB = \alpha$ и $\angle BDE = \alpha+\beta$. Троугао *ADE* је такође правоугли. Из ΔBDE слиједи

$DE=\cos(\alpha+\beta)$, па из ΔADE је $DA=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$. Коначно, из ΔABC добијамо $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta+\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}}$. Поједностављивање овог израза даје адициону формулу за косинус збира $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.♦

Примјер 3.1.4. Полазећи од адиционе формуле за синус, доказати адиционе формуле за косинус: $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$, гдје горњи знак иде са горњим, а доњи са доњим.

Доказ: За горњи знак, имамо редом $\cos(\alpha+\beta)=\sin(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta))=$

$\sin((\frac{\pi}{2}-\alpha)-\beta) = \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos\beta-\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos\beta = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$. За доњи знак $\cos(\alpha-\beta)=\sin((\frac{\pi}{2}-\alpha)-\beta) = \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos\beta+\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\sin\beta =$

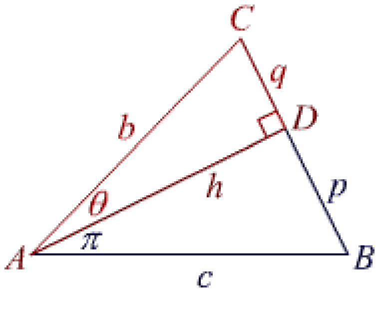
$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.♦

Задаци 3.1.5.

1. Доказати адиционе формуле за тангенс:

а) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1\text{-}\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$; **б)** $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$.

2. Помоћу површина троугла *ABC* на слици десно доказати адициону формулу за синусе $\sin(\pi+\theta)=\sin\pi\cdot\cos\theta+\cos\pi\cdot\sin\theta$.



[$P_{ABC}=P_{ABD}+P_{ADC}\Rightarrow$
$bc\sin(\pi+\theta)=ch\sin\pi+bh\sin\theta$,
гдје је $h=c\cos\pi$, односно $h=b\cos\theta$]

[1] Leonard M. Smiley, University of Alaska Anchorage, Mathematics Magazine, December, 1999.

3. Користећи слику и аналогију са примјером 2.2.1. доказати адициону формулу за косинусе $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

$$[\cos(\alpha+\beta)=\frac{AG}{AD}=\frac{AB-EC}{AD}=\frac{AB}{AC}\frac{AC}{AD}-\frac{EC}{CD}\frac{CD}{AD}=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta]$$

4. Израчунати вриједности тригонометријских функција углова:
а) $\alpha=75°$; **б)** $\beta=15°$; **в)** $\gamma=105°$.

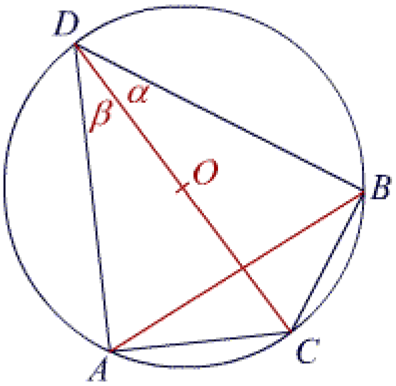
5. Углови α и β су редом из II и III квадранта. Ако је $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ и $\cos\beta=-\frac{4}{5}$, наћи **а)** синус; **б)** косинус; **в)** тангенс; угла $\alpha+\beta$.

6. Ако је $\alpha+\beta=45°$ израчунати $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)$.

7. Ако је $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=a$ и $\operatorname{tg}\beta=b$, израчунати $\operatorname{tg}\alpha$.

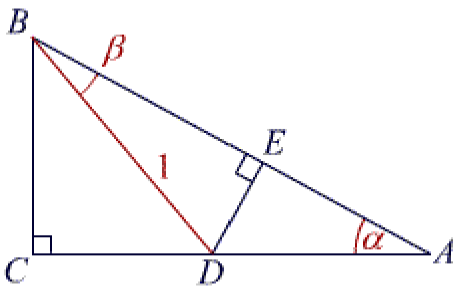
8. Ако је $\operatorname{tg}\alpha=\frac{m}{m+1}$ и $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{2m+1}$, израчунати $\alpha+\beta$.

9. Доказати адициону формулу за синус збира помоћу сљедеће слике и Птоломејеве теореме (0.0.1.).



[Кружница описана четвороуглу $ABCD$ има пречник дужине 1. Тада је $CD=1$, $BD=\cos\alpha$, $BC=\sin\alpha$, $AD=\cos\beta$, $AC=\sin\beta$, $AB=\sin(\alpha+\beta)$. Према Птоломејевој теореми је $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$.]

10. Полазећи од дате слике[2] доказати адициону формулу за синус збира.



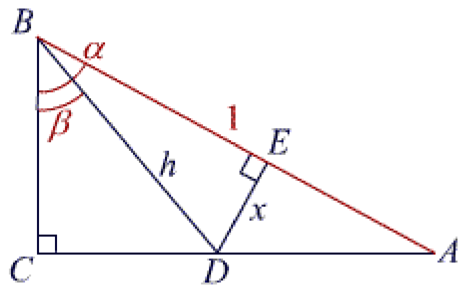
[$BE=\cos\beta$, $DE=\sin\beta$, $\angle BDC=\alpha+\beta$, $BC=\sin(\alpha+\beta)$, из тангенса ΔADE слиједи $AE=\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha}$. Из ΔABC слиједи

$$\sin\alpha=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha}},$$

а отуда $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$]

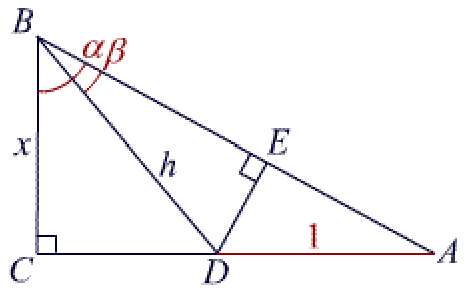
[2] Smiley, L. and Smiley, D. "Geometry of Addition and Subtraction Formulas.", Math. Mag. 72, 366, 1999.

11. Полазећи од сљедеће слике доказати адициону формулу за синус разлике.



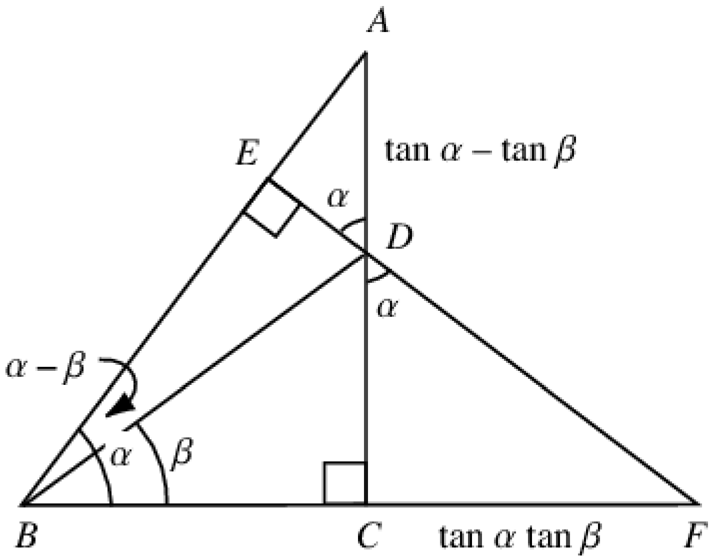
[$BC = \cos\alpha$, $CD = h\cdot\sin\beta$,
$AC = \sin\alpha - h\cdot\sin\beta$, $\angle ABD = \alpha - \beta$,
$\cos\alpha = h\cos\beta$, $x = h\sin(\alpha-\beta)$,
$x = (\sin\alpha - h\sin\beta)\cos\alpha$, па је
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$]

12. Полазећи од сљедеће слике доказати адициону формулу за косинус разлике.



[$\angle CBD = \alpha - \beta$, $AE = \sin\alpha$,
$DE = \cos\alpha$, $BE = h\cdot\cos\beta$,
$\cos\alpha = h\sin\beta$, $x = h\cos(\alpha-\beta)$,
$x = (\sin\alpha + h\cos\beta)\cos\alpha$,
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$]

13. Полазећи од сљедеће слике[3] доказати адициону формулу за тангенс разлике.



[$BF : BE = AD : DE$,
$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{DE}{BE}$$
$$= \frac{AD}{BF} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$]

3.2. Двоструки угао

Када у адиционим формулама (3.1.) ставимо $\beta = \alpha$ добијамо:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$
$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}.$$

[3] Ren, G. "Proof without Words: tan($\alpha - \beta$)." College Math. J. 30, 212, 1999.

Примјер 3.2.1. Доказати[4] да је $\left(\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}\right)^3+\left(\frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}\right)^3=4\cos 6\theta+24\cos 2\theta$. За које θ ова једнакост не важи? Ријешити једначину $\cos 6\theta+6\cos 2\theta=0$.

Рјешење: Из идентитета $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$, $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ (в. зад. 3.2.2.3.а и б) и формула за двоструки угао слиједи $\left(\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}\right)^3+\left(\frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}\right)^3$

$=(3-4\sin^2\theta)^3+(4\cos^2\theta-3)^3=(2\cos 2\theta+1)^3+(2\cos 2\theta-1)^3$

$=16\cos^3 2\theta+12\cos 2\theta$, уз услове $\sin\theta\neq 0$ и $\cos\theta\neq 0$, тј. $\theta\neq\frac{k\pi}{2}$ гдје је k произвољан цијели број. Из једнакости $\cos 6\theta=4\cos^3 2\theta-3\cos 2\theta$ налазимо $16\cos^3 2\theta=4\cos 6\theta+12\cos 2\theta$, па је $16\cos^3 2\theta+12\cos 2\theta=4\cos 6\theta+24\cos 2\theta$. Према томе, дата једнакост важи за све углове θ осим за $\theta=\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$. За рјешавање дате једначине можемо користити еквивалентну једначину

$\left(\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}\right)^3+\left(\frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}\right)^3=0$, одакле $\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}+\frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}=0$, односно

$\sin 3\theta\cos\theta+\cos 3\theta\sin\theta=0$, тј. $\sin 4\theta=0$, уз услове $\theta\neq\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$. Када из свих рјешења $\theta=\frac{m\pi}{4}$, $m\in\mathbf{Z}$ искључимо услове, добијамо опште рјешење дате једначине у облику $\theta=\frac{(2n-1)\pi}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$.♦

Задаци 3.2.2.

1. Наћи вриједности тригонометријских функција угла 2α ако је:

а) $\sin\alpha=\frac{7}{25}$, $90°\leq\alpha\leq 180°$;

б) $\cos\beta=-\frac{15}{17}$, $180°\leq\beta\leq 270°$;

в) $\mathrm{tg}\gamma=-\frac{9}{40}$.

2. Ако је φ у првом квадранту и tg $\varphi=2$, израчунати:

а) sin 2φ; **б)** cos 2φ; **в)** tg 2φ.

3. Изразити помоћу $\sin x$, $\cos x$, односно $\mathrm{tg}x$ редом функције:

а) $\sin 3x$; **б)** $\cos 3x$; **в)** $\mathrm{tg}3x$.

4. Поједноставити изразе:

а) $2\sin^2 x+\cos 2x$; **б)** $2\cos^2 x-\cos 2x$;

[4] Задатак са пријемног испита на Електротехнички факултет у Београду, септембра 1975. године.

в) $\cos^4 y+\sin^4 y+\frac{1}{2}\sin^2 2y$; **г)** $\cos^6 y+\sin^6 y+\frac{3}{4}\sin^2 2y$.

5. Доказати[5] да су једнакости $\frac{1+\cos(2x+630°)+\sin(2x+810°)}{1-\cos(2x-630°)+\sin(2x+630°)}$ = $\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}$ = ctg x, идентитети уз услове $x \neq 135°$ + k·360°, гдје је k цијели број.

6. Одредити[6] cos 2α, ако је $\mathrm{tg}^2\,\alpha - a\cdot \mathrm{tg}\alpha + 1 = 0$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$, a > 0.

3.3. Полууглови

Из формула за двоструки угао (3.2.) лако добијамо идентитете:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\ \text{тј. } 2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha;$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\ \text{тј. } 2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha;$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

Задаци 3.3.1.

1. Израчунати вриједности тригонометријских функција за углове:

а) $\alpha=\frac{\pi}{8}$; **б)** $\beta=\frac{\pi}{12}$.

2. Израчунати вриједности функција половине угла, ако је:

а) $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

б) $\sin\beta=-\frac{12}{13}$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$;

в) $\cos\gamma=\frac{24}{25}$, $\frac{3\pi}{2}<\gamma<2\pi$.

3. Скратити разломке:

а) $\frac{1+\cos 50°}{1-\sin^2 25°}$; **б)** $\frac{1-\cos^2 35°}{1-\cos 70°}$.

4. Ако је $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$ доказати идентитете:

а) $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$; **б)** $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$; **в)** $\mathrm{tg}x=\frac{2t}{1-t^2}$.

---

[5] Пријемни на Електротехничком факултету у Београду, јуна 1982.
[6] Пријемни на ЕТФ у Београду, за кандидате без потпуне школске спреме, септембра 1970.

5. Поједноставити изразе:

а) $\dfrac{1-\operatorname{tg}22°30'}{1+\operatorname{tg}22°30'}$; **б)** $\operatorname{tg}75° - \operatorname{tg}15°$.

6. Доказати идентитете:

а) $\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x} = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; **б)** $\dfrac{\cos x - \cos 2x - 1}{\sin x - \sin 2x} = \operatorname{ctg} x$.

3.4. Збир у производ

Теорема 3.4.1. За све углове α и β важе једнакости:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Доказ: Потпишимо адиционе формула за синус збира и разлике:

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y,$$

$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y.$$

Сабирањем, па одузимањем ових једнакости добијамо:

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y,$$

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x\cos y.$$

Смјена $x+y=\alpha$, $x-y=\beta$, непосредно даје $x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \dfrac{x-y}{2}$, а затим прве двије једнакости теореме. Кренемо ли од косинусних формула:

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y,$$

$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y,$$

сабирањем па одузимањем добићемо:

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\cos y,$$

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x\sin y.$$

Исте смјене дају трећу и четврту једнакост. ♦

Задаци 3.4.2.

1. Без употребе калкулатора израчунати:

а) $\cos 75° + \cos 15°$; **б)** $\sin 15° + \sin 105°$;

в) $\sin 105° - \sin 75°$; **г)** $\cos 15° - \cos 105°$.

2. Трансформисати у производ:

а) $\cos 30° + \cos 40°$; **б)** $\sin^2 3\alpha - \sin^2\alpha$;

в) $\cos^2 3\beta - \cos^2 5\beta$; **г)** tg 15° + tg 75°.

3. Трансформисати у производ:

а) sin 18° + sin 24° + sin 36° + sin 42°; **б)** sin 20° + sin30° + sin 40° + sin 50°;

в) cos 24° + cos 30° + cos 34° + cos 40°; **г)** cos 30° + cos 40° + cos 50° + cos 60°.

4. Трансформисати у производ:
а) $2 - 4\cos^2\alpha$; **б)** $3 - 4\sin^2\alpha$.

5. Трансформисати у производ, за угао $\beta \in (0°, 90°)$:
а) $\sqrt{1+\cos\beta} + \sqrt{1-\cos\beta}$; **б)** $\sqrt{1+\cos\beta} - \sqrt{1-\cos\beta}$.

6. За које углове α и β је тачно:
а) $\sin\alpha + \sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$; **б)** $\sin\alpha - \sin\beta = \sin(\alpha - \beta)$.

3.5. Производ у збир

Теорема 3.5.1. За све углове углове α и β важе једнакости:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\,(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)),$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)),$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)).$$

Доказ: Примјените адиционе формуле за збир и разлику на десним странама.♦

Задаци 3.5.2.
1. Без употребе калкулатора израчунати:
а) sin 75° cos 15°; **б)** sin 15° sin 75°; **в)** cos 135° cos 45°.

2. Поједноставити и израчунати:
а) $\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12}$; **б)** $\cos\frac{7\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$; **в)** $\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{11\pi}{12}$.

3. Доказати да је:
а) $\frac{1}{2\sin 10°} - 2\sin 70° = 1$; **б)** $\frac{1+2\cos 80°}{2\cos 10°} - 2\cos 70° = 0$.

4. Доказати да за свако $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ важе једнакости:
а) $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$;
б) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$.

[Помножити једнакости са $2\sin\frac{x}{2}$.]

5. Доказати:
а) sin 20° sin 40° sin 80° = $\frac{\sqrt{3}}{8}$; **б)** sin 10° sin 50° sin 70° = $\frac{1}{8}$;
в) tg 10° tg 50° tg 70° = $\frac{\sqrt{3}}{3}$; **г)** tg 20° tg 40° tg 80° = $\sqrt{3}$.

6. Доказати једнакост $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.

[Помножити са $\sin\frac{\pi}{7}$ па превести у збир.]

II Тригонометријске релације

Алгебарска **једнакост** је исказ облика $f_1(x) = f_2(x)$, гдје су $f_1(x)$ и $f_2(x)$ бројеви чије вриједности зависе од вриједности броја, промјенљиве x. На примјер, $\sin x + \cos x = 1$ једнакост која је тачна једино за $x = \frac{\pi}{4} + 2m\pi$, или $x = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$, гдје су m и n произвољни цијели бројеви.

Идентитет је једнакост која је увијек тачна, осим за понеку вриједност x-а, као на примјер једнакост $\frac{x-1}{x-1} = 1$ која је тачна за сваку вриједност x осим за $x = 1$.

Једначина је једнакост која је увијек нетачна, осим за понеку вриједност x-а, као на примјер једнакост $x + 2 = 3$ која је нетачна за сваку вриједност x осим за $x = 1$.

Еквивалентне су једнакости које су тачне за исте скупове вриједности промјенљиве. Еквивалентне трансформације једнакости су оне које доводе до еквивалентних једнакости. На примјер, ако имамо једнакост $f_1(x) = f_2(x)$ и идентитет $g_1(x) = g_2(x)$, тада је дата једнакост еквивалентна са једнакошћу $f_1(x) + g_1(x) = f_2(x) + g_2(x)$; рецимо $3 \sin x + 2 = 1$ еквивалентна је са $3 \sin x = -1$.

4. Тригонометријски идентитети

Тригонометријске идентитете ћемо подјелити на: 1. **основне** који су засновани на дефиницијама основних тригонометријских функција $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{ctg}\, x$ и њиховим основним везама; 2. **сложеније** за доказивање адиционим формулама; 3. **условне** идентитете, овдје углавном у вези са угловима.

4.1. Основни идентитети

Сљедеће једнакости су идентитети:

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;
2. $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\alpha \ne \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$;
3. $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\alpha \ne k\pi$, $k \in Z$;
4. $\mathrm{tg}\alpha\, \mathrm{ctg}\alpha = 1$;
5. $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$;
6. $\sin^2\alpha = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$.

Задаци 4.1.1.

1. Доказати сљедеће идентитете:

а) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$; **б)** $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$;

в) $1 + \mathrm{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; **г)** $ctg^2 x + 1 = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

2. Доказати идентитете:

а) $\dfrac{\cos x}{1-\mathrm{tg} x} - \dfrac{\sin x}{\mathrm{ctg} x - 1} = \cos x + \sin x$; **б)** $\dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x} - \left(\dfrac{1}{\mathrm{tg}^2 x} + \dfrac{1}{\mathrm{ctg}^2 x}\right) = 2$;

в)
$$\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}+\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin x-\cos x}=2;$$

г)
$$\sin^6 x+\cos^6 x-2\sin^4 x-\cos^4 x+\sin^2 x=0.$$

3. Свођењем на први квадрант доказати једнакости:

а) $$\frac{\left(1+\mathrm{tg}^2(x-90°)\right)\left(\dfrac{1}{\sin^2(x-270°)}-1\right)}{\dfrac{1+\mathrm{ctg}^2(x+270°)}{\cos^2(x+90°)}}=\sin^2 x;$$

б) $$\frac{\sin^3(x-1{,}5\pi)\cos(2\pi-x)}{\mathrm{tg}^3(x-0{,}5\pi)\cos^3(x-1{,}5\pi)}=\cos x.$$

4. Израчунати:

а) $\dfrac{3\sin x+\sin 3x}{3\cos x+\cos 3x}$, ако је $x=\frac{2\pi}{3}$;

б) $\dfrac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}$, ако је x = -135°.

5. Доказати идентитете:

а) $$\frac{1+\sin x\cos x}{\cos^3 x-\sin^3 x}+\frac{1}{\sin x+\cos x}+\frac{\sin^2 x-2\cos x-1}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x-1};$$

б) $$\frac{\sin^3 y+\cos^3 y}{\sin y+\cos y}+\frac{\sin^3 y-\cos^3 y}{\sin y-\cos y}+\frac{\sin^4 y-\cos^4 y}{\sin^2 x-\cos^2 x}=3.$$

6. Ако је α оштар угао, доказати неједнакост
$$\sqrt{\sin\alpha}\cdot\sqrt[4]{\mathrm{tg}\alpha}+\sqrt{\cos\alpha}\cdot\sqrt[4]{\mathrm{ctg}\alpha}\ge\sqrt[4]{8}.$$

[користите $\left(\sqrt{2}t-1\right)^2\ge 1$ са смјеном $t=\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha}$]

4.2. Идентитети са адиционим формулама

Једноставне посљедице адиционих формула за сабирање углова (3.1.) су идентитети:

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha,$$
$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha,$$
$$\mathrm{tg}3\alpha=\frac{3\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Ако у адиционим формулама за двоструки угао (3.2.) ставимо t = tg α, лако добијамо:

$$\sin 2\alpha=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos 2\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \mathrm{tg}2\alpha=\frac{2t}{1-t^2},\ \mathrm{tg}3\alpha=\frac{3t-t^3}{1-3t^2}.$$

За обрнуте формуле, за полууглове (3.3.) треба познавати и величине углова.

Примјер 4.2.1. Одредити вриједност $\cos\dfrac{\pi}{8}$.

Рјешење: Из $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{1+\sqrt{2}}{4}$, слиједи $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$. ♦

Теорема 4.2.2. За реалне бројеве a и b од којих бар један није нула и за сваки реални број x постоје реалан розитиван број c и број $\varphi\in[0, 2\pi]$ такви да је:

$$a\sin x + b\cos x = c\sin(x+\varphi),$$
$$a\cos x + b\sin x = c\cos(x-\varphi).$$

Доказ: Помножимо ли и подјелимо први дати израз са $c=\sqrt{a^2+b^2}$ добићемо

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right).$$

Како је $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, то су ови разломци косинус и синус истог угла, тј. постоји угао $\varphi\in[0, 2\pi]$ такав да је $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$. Према адиционим формулама за збир и разлику углова (3.1.) је $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$, и аналогно $a\cos x + b\sin x = c\cos(x-\varphi)$ што је и требало доказати. ♦

Задаци 4.2.3.

1. Доказати:

а) $\frac{1-tg^2\frac{\pi}{12}}{1+tg^2\frac{\pi}{12}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{8}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}=2$.

2. Доказати идентитете:

а) $(\cos x+\cos y)^2+(\sin x+\sin y)^2=4\cos^2\frac{x-y}{2}$;

б) $(\cos x-\cos y)^2+(\sin x-\sin y)=4\sin^2\frac{x-y}{2}$.

3. Доказати[7] да важи идентитет $\frac{(1-\sin\alpha-\cos\alpha)(1-\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1-\sin\alpha)}=-2$.

[множењем бројника $1-\sin\alpha-\sin\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=-2\sin\alpha+2\sin^2\alpha$]

4. Доказати[8] да је $\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}=2$.

[… $=\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\left(\pi-\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)=$

$\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}=2$]

5. Доказати једнакости:

[7] Општинско такмичење у Србији, 28. Фебруар 1981.

[8] Међуопштинско такмичење у Србији, 14. Март 1976.

а) $\sin x + \sin(x+y) + \sin(x+2y) + ... + \sin(x+6y) + \sin(x+7y)$ =

$$\frac{\sin\left(x+\frac{7y}{2}\right)\sin 4y}{\sin\frac{y}{2}};$$

б) $\cos x + \cos(x+y) + \cos(x+2y) + ... + \cos(x+6y) + \cos(x+7y)$ =

$$\frac{\cos\left(x+\frac{7y}{2}\right)\sin 4y}{\sin\frac{y}{2}}.$$

[а) л.с. = $(\sin x + \sin(x+y)) + (\sin(x+2y) + \sin(x+3y)) + \cdots$ = збирове у производ = $2\cos\frac{y}{2}\left(\sin\frac{2x+y}{2} + \sin\frac{2x+5y}{2} + \sin\frac{2x+9y}{2} + \sin\frac{2x+13y}{2}\right)$ = $4\cos\frac{y}{2}\cos y\left(\sin\frac{2x+3y}{2} + \sin\frac{2x+11y}{2}\right) = 8\cos\frac{y}{2}\cos y\cos 2y\sin\left(x+\frac{7y}{2}\right) = \cdots$;
б) л.с. = $\frac{1}{\sin\frac{y}{2}}\left(\cos x\sin\frac{y}{2} + \cos(x+y)\sin\frac{y}{2} + \cdots + \cos(x+7y)\sin\frac{y}{2}\right)$ = производе у збир, поништавање = $\frac{1}{2\sin\frac{y}{2}}\left(\sin\left(x+\frac{15y}{2}\right) - \sin\left(x-\frac{y}{2}\right)\right) = \ldots$]

6. Доказати да је $\dfrac{1-\sin x}{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

7. Користећи теорему (4.2.2.) израчунати:
а) sin 15° + cos 15°; **б)** sin 15° – sin 15°;
затим доказати да је $\sin 15° = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$ и $\cos 15° = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$.

8. Користећи теорему (4.2.2.) доказати:
а) $\dfrac{\sin x + \sqrt{3}\cos x}{\cos x - \sqrt{3}\sin x} = \operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$; **б)** $\dfrac{\sin x - \sqrt{3}\cos x}{\cos x + \sqrt{3}\sin x} = \operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

9. Доказати неједнакост $\sin\alpha + \cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha < 2$.

[Прво, $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) < 2$. Друго, $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin^2\alpha \le \frac{1}{2}$. Из тога сљеди збир $< \sqrt{2} + \frac{1}{2} < 2$.]

4.3. Условни идентитети

Примјер 4.3.1. Из $x + y + z = 0$ сљеди $\sin x + \sin y + \sin z = -4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}$.

Доказ: На основу теореме о трансформацији збира синуса у производ (3.4.1.),
$\sin x + \sin y + \sin z = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \sin(x+y)$ = (двоструки угао 3.2.) =

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2} = 2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\right) =$$

(разлика косинуса у производ) = $2\sin\frac{x+y}{2}\left(-2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{-y}{2}\right)$ =

$-4\sin\frac{z}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}$, што је и требало доказати.♦

Задаци 4.3.2.

1. Показати да за углове троугла важе сљедеће једнакости:

i. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\gamma$;

ii. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$

iii. $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma=\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma$.

2. Ако је $\alpha+\beta+\gamma=180°$ доказати:

i. $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$;

ii. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma=2$;

iii. $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}+\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=1$.

3. Ако је $\alpha+\beta+\gamma=90°$ доказати:

i. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma=1$;

ii. $\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma}=\frac{\cos^2\gamma}{\cos^2\alpha}$;

iii. $\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta+\mathrm{ctg}\,\gamma=\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta\,\mathrm{ctg}\,\gamma$.

4. Ако је $\alpha+\beta=\gamma$ доказати:

i. $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$;

ii. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$;

iii. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2(1-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$.

5. Ако за углове троугла α, β и γ важи $\cos3\alpha+\cos3\beta+\cos3\gamma=1$, онда је један од тих углова 120°.

[Из $3\alpha+3\beta+3\gamma=540°$ сљеди $\cos3\gamma=-\cos(3\alpha+3\beta)$ па је дати услов $\cos3\alpha+\cos3\beta-\cos3\alpha\cos3\beta+\sin3\alpha\sin3\beta-1=0$. Отуда $\sin3\alpha\sin3\beta=(1-\cos3\alpha)(1-\cos3\beta)$, што након квадрирања постаје $(1-\cos^23\alpha)(1-\cos^23\beta)-(1-\cos3\alpha)^2(1-\cos3\beta)^2=0$. Даље добијамо $(1-\cos3\alpha)(1-\cos3\beta)(1-\cos3\gamma)=0$, па је $\alpha=120°$, или је $\beta=120°$, или $\gamma+120°$.]

6. Ако за углове троугла важи једнакост $\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}=\sqrt{3}$, онда је бар један угао 60°.

[Због $\sqrt{3}=\frac{\sin60°}{\cos60°}$ дати израз можемо писати $\sin\alpha\cos60°-\cos\alpha\sin60°+\sin\beta\cos60°-\cos\beta\sin60°+\sin\gamma\cos60°-\cos\gamma\sin60°=0$, односно $\sin(\alpha-60°)+\sin(\beta-60°)+\sin(\gamma-60°)=0$, па из датог примјера (4.3.1.) добијамо $-4\sin\frac{\alpha-60°}{2}\sin\frac{\beta-60°}{2}\sin\frac{\gamma-60°}{2}=0$, одакле је $\alpha=60°$, или $\beta=60°$, или $\gamma=60°$.]

5. Једначине

Тригонометријске једначине овдје дијелимо на **линеарне**, у којима се тригонометријске функције sin x и cos x појављују само у линеарној форми, и остале, **нелинеарне**.

5.1. Линеарне једначине

Општа линеарна тригонометријска једначина је

$$a\sin x + b\cos x = c.$$

Када је $a \neq 0$, можемо увести смјену $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$. Након множења са cos φ дата једначина постаје $\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi = \frac{c}{a}\cos\varphi$, односно $\sin(x+\varphi) = \frac{c}{a}\cos\phi$, коју рјешавамо аналогно сљедећем примјеру.

Примјер 5.1.1. Наћи сва рјешења тригонометријских једначина:

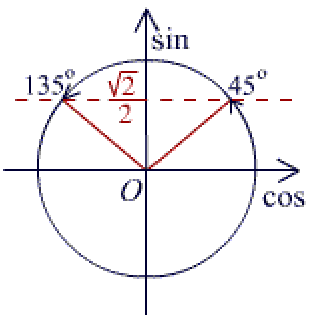
а) $\sin(x+60°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos(x+\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$;

в) $\operatorname{tg}(x-30°) = \sqrt{3}$;

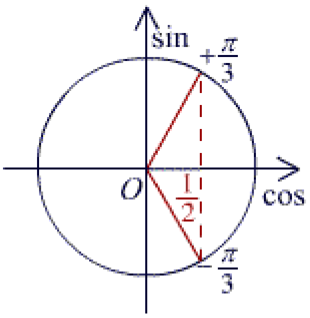
г) $\operatorname{ctg}(x-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Рјешење: **а)** На синусној оси (ординати) нађимо вриједност $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$ и



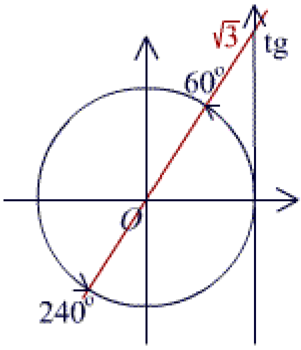
повуцимо паралелу са косинусном осом (апсцисом) кроз ту тачку (слика лијево). Пресјеци паралеле (испрекидано) и јединичне кружнице одређују углове 45° и 135°. То значи да је једно рјешење слиједи из x + 60° = 45°, а друго из једнакости x + 60° = 135°. Додајући (одузимајући) добијеном рјешењу цијели број k пуних кругова, добијамо опет тачна рјешења. Према томе, сва рјешења добијамо из једнакости: x + 60° = 45° + k·360° и x + 60° = 135° + k·360°.

Рјешења су $x_1 = -15° + k\cdot 360°$ и $x_2 = 75° + n\cdot 360°$ ($\forall k,n\in$**Z**). **б)** Слично, имамо



паралелу са ординатом кроз тачку $\frac{1}{2}$ на косинусној оси (апсциси) и одговарајуће основне углове $\pm\frac{\pi}{3}$. Међутим, сваки пут када након пуног угла дођемо у исту позицију са покретним краком основног угла, његовим радијус вектором, имаћемо исти косинус. Према томе, рјешења су

$x_{12} = \pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, гдје је κ произвољан цијели број.



в) Повучемо праву кроз исходиште O и тачку $\sqrt{3}$ тангенсне осе. Права одређује основне углове 60° и 240°, али се сва рјешења могу дефинисати помоћу само једног од њих:

$$x - 30° = 60° + k\cdot 180°.$$

Према томе, сва рјешења једначине су облика

$$x = 90° + k\cdot 180°,$$

гдје је k произвољан цијели број.♦

Када је $a = b = c$ дата општа линеарна тригонометријска једначине је сагласност, рјешење је (скоро) сваки угао x. Када је $a = b = 0$, али $c \neq 0$, дата једначина је контрадикција, нема рјешења. Када је $ab = 0$, али $a^2 + b^2 \neq 0$ тада имамо једноставне облике аналогне претходном примјеру (5.1.1.) под а) и б). Када је $ab \neq 0$, али је $c = 0$, тада једначину лако сводимо на једноставне облике истог примјера под в) и г). У случају $abc \neq 0$, једначина има рјешење ако и само ако је $-1 \le \sin(x+\varphi) = \frac{c}{a}\cos\phi \le 1$, тј. $a^2 + b^2 \le 1$ као у теореми 4.2.2.

Задаци 5.1.2.

1. Наћи сва рјешења једначина:

а) $\sin x - \cos x = 1$; **б)** $\sqrt{3}\sin x - \cos x = -\sqrt{3}$;

в) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$; **г)** $\sin x + \cos x = -1$.

2. Свести на линеарну тригонометријску једначину и наћи сва рјешења:

а) $3\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin x$; **б)** $2 - 2\sqrt{2}\sin x = \cos 2x$;

в) $\sin y \cos(x-y) + \cos y \sin(x-y) = 0{,}5$; **г)** $\cos y \cos(x-y) - \sin y \sin(x-y) = -0{,}5$.

3. Одредити сва рјешења једначина:

а) $\left|\mathrm{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right| = 1$; **б)** $\left|\mathrm{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)\right| = \sqrt{3}$;

в) $\left|2\cos\left(3x + \frac{\pi}{5}\right)\right| = \sqrt{2}$; **г)** $\left|2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\right| = 1$.

4. Свести на линеарну једначину и рјешити:

а) $\mathrm{tg}(2x + 30°) + \mathrm{ctg}(2x + 30°) = 4$; **б)** $\cos^2 x + 3\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1$;

в) $\sin 3x - \sqrt{3}\cos x = 1 + 2\sin x \cos 2x$; **г)** $\sin^2\left(\frac{\pi}{8} + x\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

5. Рјешити систем једначина:

а) $\begin{cases} \sin x \cos y = \sqrt{3} \\ \cos x \sin y = 1 \end{cases}$; **б)** $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4} \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2} \end{cases}$;

в) $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{3} \\ \cos x + \cos y = 1 \end{cases}$; **г)** $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1 \end{cases}$.

6. Наћи све углове x за које су тачне неједнакости:

а) $\sin(x - 30°) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; **б)** $\cos(x + \frac{\pi}{3}) \leq \frac{1}{2}$;

в) $\operatorname{tg}(x + 45°) < \sqrt{3}$; **г)** $\operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{4}) > \frac{\sqrt{3}}{3}$.

5.2. Нелинеарне једначине

Нелинеарну једначину облика $f(x) = g(x)$ пишемо у облику $f(x) - g(x) = 0$, затим лијеву страну растављамо на факторе. Ако дођемо до факторизације $h_1(x) \cdot h_2(x) \cdot h_3(x) \cdot \ldots = 0$, онда је рјешење полазне једначине унија рјешења једначина $h_1(x) = 0$, $h_2(x) = 0$, $h_3(x) = 0$, ... , јер је производ бројева једнак нули када је било који од фактора једнак нули.

Примјер 5.2.1. Наћи сва рјешења једначине $\sin 2x + 2\cos x = \sin x + 1$.

Рјешење: Дату једначину пишемо у облику $\sin 2x + 2\cos x - \sin x + 1 = 0$, затим лијеву страну сводимо на $(\sin x + 1)(\cos x - \frac{1}{2}) = 0$. Даље, тражимо унију свих рјешења једначина $\sin x = -1$, и $\cos x = \frac{1}{2}$. Рјешења прве су $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, а друге $x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2l\pi$, гдје су k и l произвољни цијели бројеви.♦

Задаци 5.2.2.

1. Растављањем на факторе рјешити једначине:

а) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 6 = 0$; **б)** $\operatorname{ctg}^2 x + 3\operatorname{ctg} x - 4 = 0$;

в) $\cos^2 x - 0{,}5\cos x + 0{,}06 = 0$; **г)** $\sin^2 x + 0{,}5\sin x + 0{,}04 = 0$.

2. Наћи рјешења у степенима (минутама и секундама):

а) $6(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x + \cos x) = 1$; **б)** $3(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x - \cos x) = 2$.

3. Поједноставити једначине и наћи рјешења у радијанима:

а) $\frac{1 - \cos 2y + \sin 2y}{1 + \cos 2y + \sin 2y} = -\sqrt{3}$; **б)** $\frac{1 + \cos 2y}{\cos 2y} \cdot \frac{1 + \cos 4y}{\sin 4y} = \sqrt{3}$.

4. Наћи рјешења једначина у степенима, минутама и секундама:

а) $\frac{\sin z + \sin 3z}{1 + \cos 2z} = 0{,}6$; **б)** $\frac{\cos 2z}{1 + \sin 2z} = 0{,}6$.

5. Трансформисати у производ и наћи сва рјешења једначина:

а) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$; **б)** $\cos 2x - \sin 4x - \cos 6x = 0$;

в) $\sin 2x + \cos 4x - \sin 6x = 0$; **г)** $\frac{\sqrt{2} - \cos x - \sin x}{\sin x - \cos x} = 0$.

6. Наћи сва рјешења једначина:

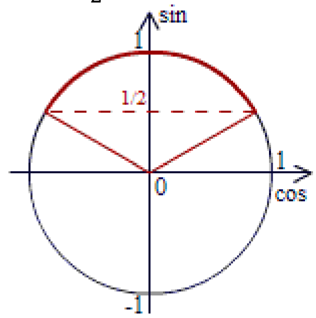
а) sin x + sin5x = 2; **б)** cos3x + cos5x = 2.

[а) $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$, $5n - k + 1 = 0$.]

6. Тригонометријске неједначине

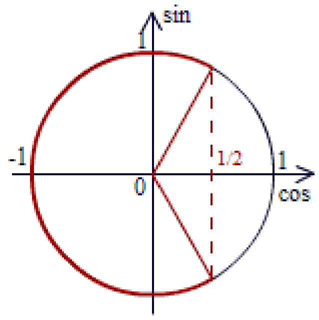
Неједначина која за непознату вриједност има аргумент (угао) тригонометријске функције назива се тригонометријска неједначина. Рјешавамо их алгебарским поједностављивањем неједнакости до једног од облика: sin $x < 0$, sin $x > 0$, cos $x < 0$, ..., tg $x > 0$, чија рјешења затим тражимо на тригонометријској кружници.

Примјер 6.0.1. Рјешити тригонометријску неједначину $\sin 2x - \frac{1}{2} > 0$.



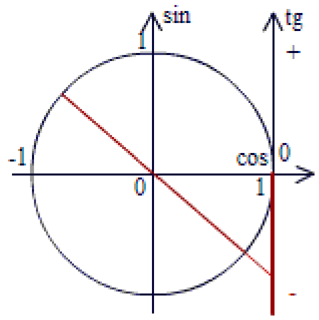
Рјешење: Дата неједначина еквивалентна је са $\sin 2x > \frac{1}{2}$. На слици десно видимо тригонометријску кружницу и граничне углове од $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$ чији синус је $\frac{1}{2}$. Све тачке на синусној оси изнад ½ имају тражене вриједности за синус угла 2x. Дакле, рјешења су такви бројеви x да је $\frac{5\pi}{6} < 2x < \frac{\pi}{6}$, тј. $\frac{5\pi}{12} < x < \frac{\pi}{12}$. Када сваком од ових рјешења додамо пуни угао 2π, добијамо сва рјешења дате неједначине у облику $\frac{5\pi}{12} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{12} + 2k\pi$, гдје је $k \in$ Z
(k је произвољан цијели број).♦

Примјер 6.0.2. Наћи сва рјешења једначине $\cos(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2} < 0$.



Рјешење: Дата неједначина еквивалентна је са $\cos \varphi < \frac{1}{2}$. На слици десно видимо да неједначину рјешавају углови φ из интервала $(\frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3})$. Према томе $\frac{\pi}{3} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{3}$, односно $\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x - \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, гдје је k произвољан цијели број. Посебно је $\frac{7\pi}{12} + 2k\pi < x < \frac{23\pi}{12} + 2k\pi$, тј. рјешење дате неједначине је угао x из интервала $(\frac{7\pi}{12}, \frac{23\pi}{12})$ и рјешење је сваки други угао који се из тог
интервала до добије додавањем $k \in$ Z пуних углова, додавањем $2k\pi$.♦

Примјер 6.0.3. Рјешити неједначину $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) < \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.



Рјешење: Дата неједначина еквивалентна је са $\mathrm{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) < 0$. На слици видимо тангенсну осу, тангенту на тригонометријску кружницу у крајњој десној тачки, чије исходиште је на апсциси (косинусна оса), а вриједности расту горе. Негативне вриједности тангенса су испод тачке 0. Према томе $3x - \frac{\pi}{4} \in$

$$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

и такође $3x$ може имати све вриједности које се добију додавањем неколико пуних кругова ($2k\pi$ радијана) овој унији. Дакле, $3x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ плус $2k\pi$, гдје је k произвољан цијели број. Тачније, рјешење дате неједначине је сваки број x такав да је $-\frac{\pi}{12} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{12} + 2k\pi$ или $\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$, када $k \in \mathbb{Z}$.♦

Задаци 6.0.4.

1. Наћи сва рјешења неједначина:

а) $|\sin 2x| > \frac{1}{2}$; **б)** $|\cos(x - \frac{\pi}{4})| < \frac{1}{2}$;

в) $|\mathrm{tg}(x - \frac{\pi}{3})| < 1$; **г)** $|\mathrm{ctg}\, 3x| > 1$.

2. Рјешити неједначине:

а) $\sin x + \cos x > 1$; **б)** $\sin x - \cos x < 1$;

в) $\sin x - \sqrt{3} \cos x < 1$; **г)** $\sqrt{3} \sin x + \cos x > 1$.

3. Изједначити са нулом, раставити на факторе и ријешити:

а) $\sin x + \cos 2x > 1$; **б)** $\cos x - \sin 2x < 0$.

4. Наћи сва рјешења:

а) $|\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x| < \frac{4\sqrt{3}}{3}$; **б)** $|\mathrm{tg}\, x - \mathrm{ctg}\, x| > 2\sqrt{3}$.

5. $\sin x \sin 2x < \sin 3x \sin 4x$, када $x \in (0, \pi/2)$.

6. Шта је веће: $\cos \sin x$, или $\sin \cos x$? Када? Зашто?

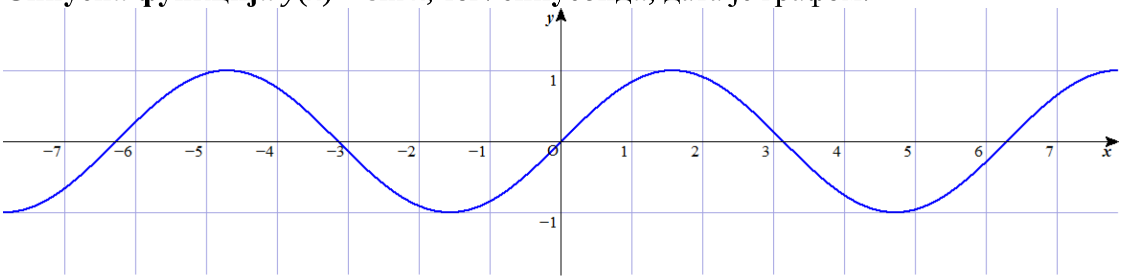
III Тригонометријске функције

7. Периодичне функције

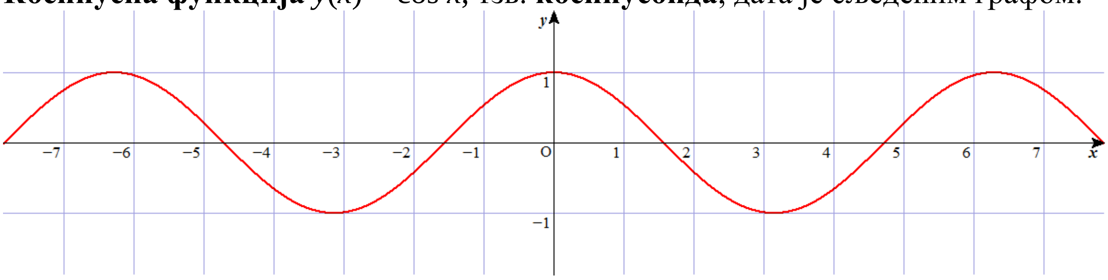
Периодичне функције су функције облика $y = f(x)$ које имају особину понављања своје вриједности (y) у регуларним интервалима или **периодима** апсцисе (осе x).
У математици, постоји посебна група функција које називамо **кружне тригонометријске функције**, или само **тригонометријске функције**, које све имају особину **периодичности**. Основне периодичне функције су основне тригонометријске функције: синусоида, косинусоида и евентуално тангенсоида или котангенсоида. У даљем тексту ћемо подразумијевати да су углови ових функција (x) дати у радијанима, осим у посебним случајевима које ћемо нагласити. На примјер $\sin x°$, $\cos x°$, или $\operatorname{tg} x°$.

7.1. Основне функције

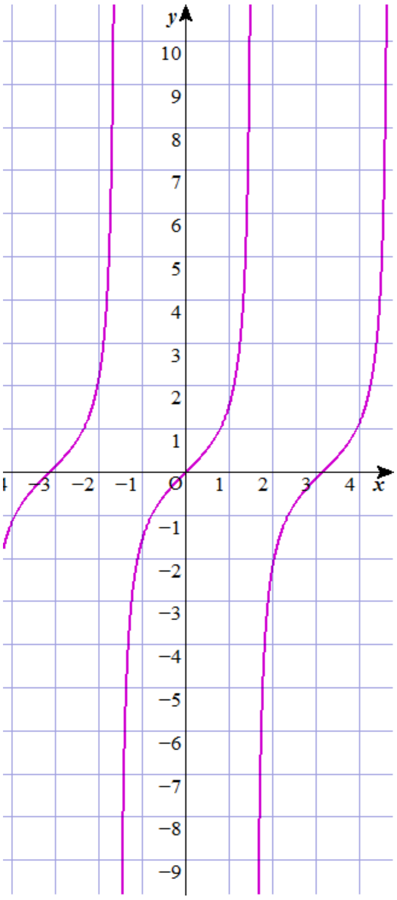
Синусна функција $y(x) = \sin x$, тзв. **синусоида**, дата је графом.



Домен ове функције је скуп реалних бројева **R**, кодомен је затворени интервал [-1, 1].Граф синусне функције пресјеца апсцису (X-осу) у тачкама 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, ..., ($\pi \approx 3{,}14$). Мјеста пресјека функције са апсцисом називамо **нуле** функције. Ова функција достиже максималне вриједности 1, односно -1 ординате (Y-осе) у тачкама $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi$, $\pm\frac{\pi}{2} + 4\pi$, … . Иначе, максимална одступања ординате од осе осциловања периодичне функције називамо **амплитудом** периодичне функције. Према томе, синусна функција има период, интервал послије којег се њен граф понавља једнак 2π, и амплитуду 1. Граф ове функције је централно симетричан у односу на исходиште координатног система, што значи да је синусна функција **непарна**, $(\forall x \in \mathbf{R})\ y(-x) = -y(x)$.
Косинусна функција $y(x) = \cos x$, тзв. **косинусоида**, дата је сљедећим графом.



Домен и кодомен ове функције су једнаки претходној. Граф косинусне функције добијемо транслацијом синусне функције за $\frac{\pi}{2}$ у лијево. Према томе, $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, односно $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$. Такође, косинусна функција има период 2π, и амплитуду 1. Обе функције, синусоида и косинусоида нису бијекције (обострано једнозначна пресликавања). Граф ове функције је осно симетричан у односу на y-осу, што значи да је косинусна функција **парна**, $(\forall x \in \mathbf{R})\ y(-x) = y(x)$.



На слици лијево је **тангенсна функција** $y(x)$ = tg(x), тзв. **тангнсоида**. Граф тангенсне функције пресјеца апсцису (x-осу) у тачкама 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, ... , чије су приближне вриједности редом ±3,14; ±6,28; ±9,42; ... . То су **нуле** ове функције. Период тангенсне функције је $\pi \approx 3{,}14$.

Асимптота функције је права којој се граф бесконачно приближава, без додира. Тангенсоида има вертикалне асимптоте, праве паралелне ординати (y-оси) у тачкама $x = \pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, $\pm\frac{5\pi}{2}$, …, тј. у тачкама апсцисе чије су приближне вриједности ±1,57; ±4,71; 7,85; ... . Тангенсна функција нема амплитуду, јер њене ординате неограничено расту у близини (вертикалних) асимптота. Домен тангенсне функције чине сви реални бројеви осим оних на x-оси куда пролазе асимптоте ове функције; кодомен је скуп свих реалних бројева. У свим тачкама домена, тангенсна функција је растућа.

Котангенсна функција $y(x)$ = ctg(x), тзв. котангенсоида, пресјеца апсцису у тачкама $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, $\pm\frac{5\pi}{2}$, …, има исти период π као тангенсоида, али је свугдје опадајућа. Асимптоте котангенсне функције су вертикалне праве $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi$, ...

Тангенсна и котангенсна функција су узајамно реципрочне, њихов производ једнак је јединици. Обе, тангенсна и котангенсна функција су непарне.

Задаци 7.1.1.

1. Наћи тачну вриједност:

а) sin 120°; **б)** cos 300°; **в)** tg -210°;
г) sin -2π; **д)** cos $\frac{5\pi}{4}$; **ђ)** tg $\frac{9}{4}\pi$.

2. Написати све вриједности за угао θ од -4π до 6π за које је:

а) $\sin\theta = 1$; **б)** $\cos\theta = 1$; **в)** $\mathrm{tg}\,\theta = 1$.

3. Скицирати граф функције y, за угао θ од од -2π до 4π:

а) $y = 2\sin\theta$; **б)** $y = 0.5\cos\theta$; **в)** $y = -\mathrm{tg}\,\theta$.

4. Скицирати граф функције y, за угао t од од -2π до 4π:

а) $y = \sin 2t$; **б)** $y = \cos 0.5t$; **в)** $y = \mathrm{tg}(-t)$.

5. Скицирати граф функције y, за угао x од од -2π до 4π:

а) $y = 1 - \sin x$; **б)** $y = 1 + \cos\theta$; **в)** $y = \mathrm{tg}\,x - 1$.

6. Скицирати граф функције $f(x)$, за угао x од од -2π до 4π:

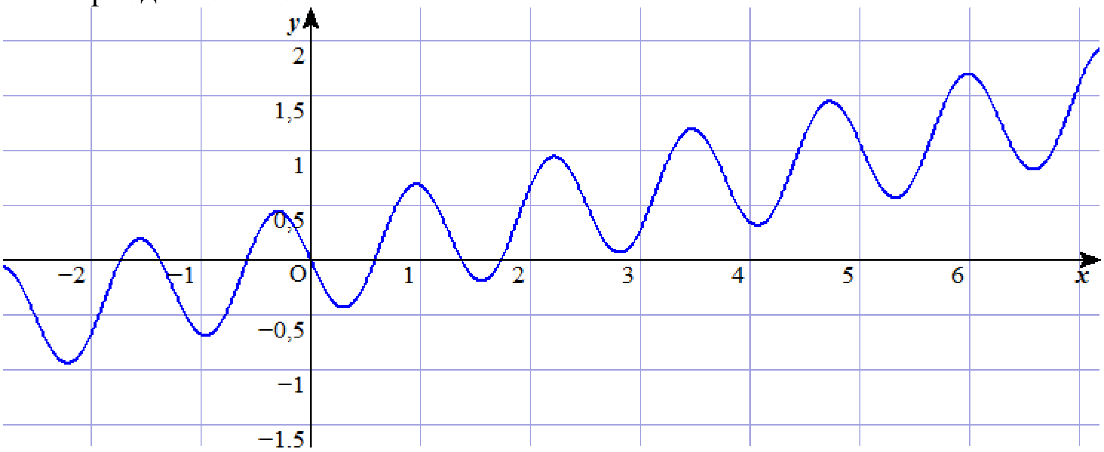
а) $f(x) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$; **б)** $f(x) = \cos(x - \frac{2}{3}\pi)$; **в)** $f(x) = \text{tg}(\frac{1}{6}\pi - x)$.

7.2. Период

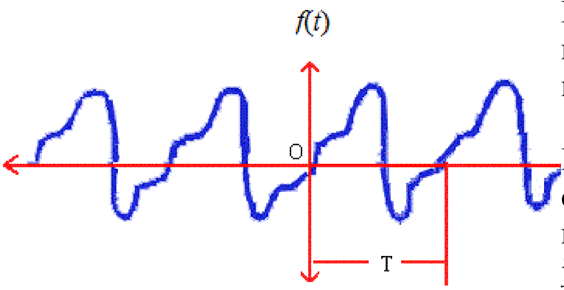
Дефиниција 7.2.1. Функција $f : D_f \to \mathbf{R}$, $D_f \subseteq \mathbf{R}$, је периодична ако постоји реалан број T различит од нуле, такав да је за све $t \in D_f$, $t \pm T \in D_f$, $f(t + T) = f(t)$. Број T је период функције f.

Основне периодичне функције су: константне функције, тригонометријске функције и разломљена функција $\{x\}$.

На сљедећој слици доле је граф функције која није перидодична. Иако дуж апсцисе (x-осе) постоје графичке сличности, вриједности ордината се постепено и непериодично повећава.

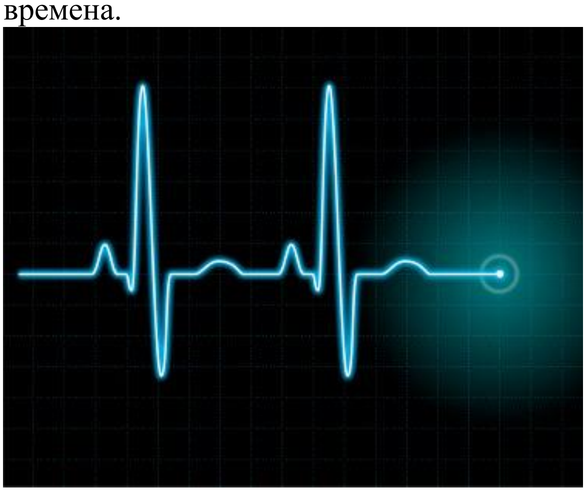


Лако је видјети да било која константна функција $f(t) = c = \text{const.}$ има особину периодичности, са произвољним периодом $T \in \mathbf{R}^+$. Наиме, $(\forall t \in \mathbf{R})\ f(t + T) = f(t) = c$.



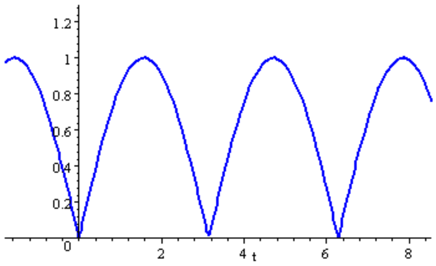
На слици лијево је примјер графа непознате периодичне функције $f(t)$ са периодом T.

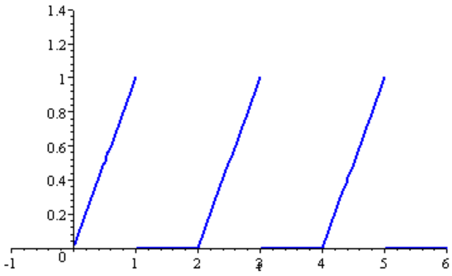
Електрокардиограм (ЕКГ), на сљедећој слици десно је примјер једне периодичне функције из медицине. То је графички запис електричне активности срца у току кратког периода времена.



Са сваким откуцајем, од врха до дна нашег срца преноси се електрични сигнал који проузрокује контракцију и пумпање крви. Име ЕКГ долази од три грчке ријечи: електро, кардио – срце, грам – писати.

На сљедеће двије слике дате су још два графа функција које су такође периодичне.



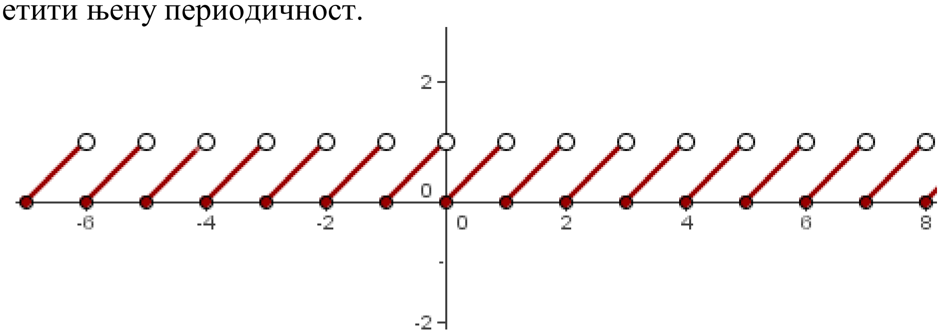


Примјер 7.2.2. Наћи период функције $\{x\} = x - [x]$, гдје је $[x]$ „највеће цијело од x“.

Рјешење: Прво, таблично дајемо вриједности за неколико x-ова.

x	1	1,2	1,5	1,7	2	2,3	2,5	2,8	3
$[x]$	1	1	1	1	2	2	2	2	3
$\{x\}$	0	0,2	0,5	0,7	0	0,3	0,5	0,8	0

Након табелирања је лакше скицирати граф ове необичне функције и примјетити њену периодичност.



Даље, из $f(x) = \{x\} = x - [x]$, сљеди $f(x + T) = x + T - [x + T]$, па ако је $f(x + T) = f(x)$, тада је $x + T - [x + T] = x - [x]$. Отуда је $T = [x + T] - [x]$, тј. $T \in \mathbf{Z}$. Најмањи је позитиван цијели број 1 и то је основни период дате функције.♦

Примјер 7.2.3. Нека је дата нека функција $f(x)$ и позитиван реалан број a такав да за свако $x \in \mathbf{R}$ важи једнакост $f(x + a) + f(x) = 0$. Доказати да је $f(x)$ периодична и наћи њен период.

Доказ: Дата једнакост се може писати $(\forall x \in \mathbf{R})$ $f(x + a) = -f(x)$. Замјеном „x“ са „$x + a$“ добијамо $f(x + 2a) = -f(x + a) = f(x)$ за свако реално x. Према томе, $(\forall x \in \mathbf{R})$ $f(x + 2a) = f(x)$, што значи да је функција $f(x)$ периодична са периодом $T = 2a$.♦

Примјер 7.2.4. Наћи период функције $y = a \cdot \mathrm{tg}(bx + c)$.

Рјешење: Када се x повећа за непознати период T, тада се аргумент $\alpha = bx + c$ повећа за период π тангенсне функције. Дакле, $b(x + T) + c = (bx + c) + \pi$.

Рјешавањем ове једначине добијамо $T = \dfrac{\pi}{b}$.♦

Примјер 7.2.5. Наћи период функције $f(x) = a\sin kx + b\cos kx$.

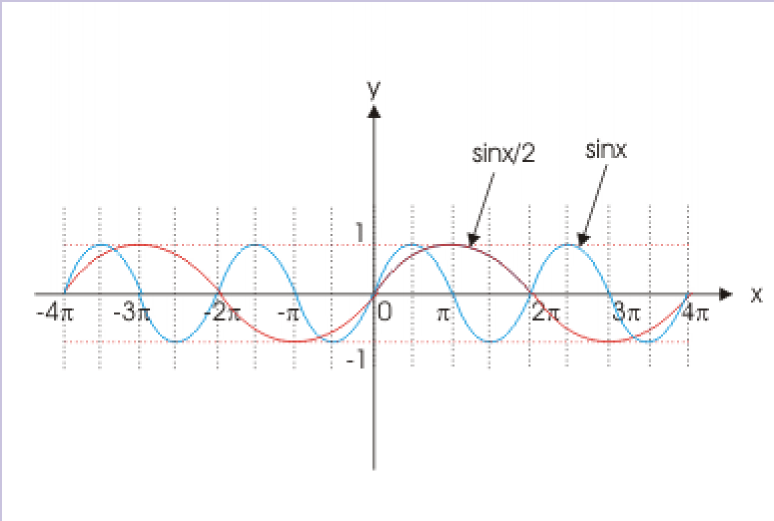
Рјешење: Смјеном $a = r\cos\beta$ и $b = r\sin\beta$, одакле сљеди $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ и $f(x) = r\cos\beta\sin kx + r\sin\beta\cos kx = r\sin(kx + \beta)$. Ова функција има амплитуду r и исти период као функција $\sin(kx + \beta)$. Када се угао $\alpha = kx + \beta$ повећа за период синусне функције, за 2π, тада се аргумент x повећа за непознати реални број T, тј. $(kx + \beta) + 2\pi = k(x + T) + \beta$. Отуда $T = 2\pi/k$. То је тражени период дате функције $f(x)$.♦

Примјер 7.2.6. Наћи период функције $\sin^2 x$.

Рјешење: Из $\sin^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ сљеди да је период ове функције једнак периоду функције $\cos 2x$. Отуда, тражени период је $T = 2\pi/2 = \pi$.♦

НЗС правило 7.2.7. Када су двије функције периодичне, са основним периодима T_1 и T_2, тада је и њихов збир периодична функција са основним периодом који је најмањи заједнички садржалац бројева T_1 и T_2.

Рецимо, функција $y(x) = \sin x + \sin\frac{x}{2}$, има периоде сабирака редом $T_1 = 2\pi$ и $T_2 = 4\pi$, чији НЗС је 4π. Према томе, њен период $T = \text{НЗС}(T_1, T_2) = 4\pi$, што се лако види на слици:



.

НЗС за цијеле бројеве знамо наћи. Такође знамо наћи НЗД (највећи заједнички дјелилац) цијелих бројева. Тада, ако имамо разломке , можемо користити формулу:

НЗС = (НЗС бројника)/(НЗД називника).

На примјер, за разломке 3/5 и 2/3 НЗС бројника 3 и 2 је 6, а НЗД називника 5 и 3 је 1, па је број 6/1 најмањи број (НЗС) чији количник са датим разломцима је цијели број. Други примјер, НЗС$(\frac{9}{10}, \frac{15}{14})$ = НЗС(9, 15)/НЗД(10, 14) = 45/2; провјера: $\frac{45}{2} : \frac{9}{10} = 25$ и $\frac{45}{2} : \frac{15}{14} = 21$.

На исти начин можемо наћи НЗС за ирационалне бројеве облика $3\sqrt{2}/5$, $2\sqrt{5}/3$, ..., или облика $2\pi/3$, $3\pi/5$, ... На примјер, НЗС$(\pi/3, 3\pi/2)$ = НЗС$(\pi, 3\pi)$/НЗД$(2, 3)$ $= 3\pi/1 = 3\pi$.

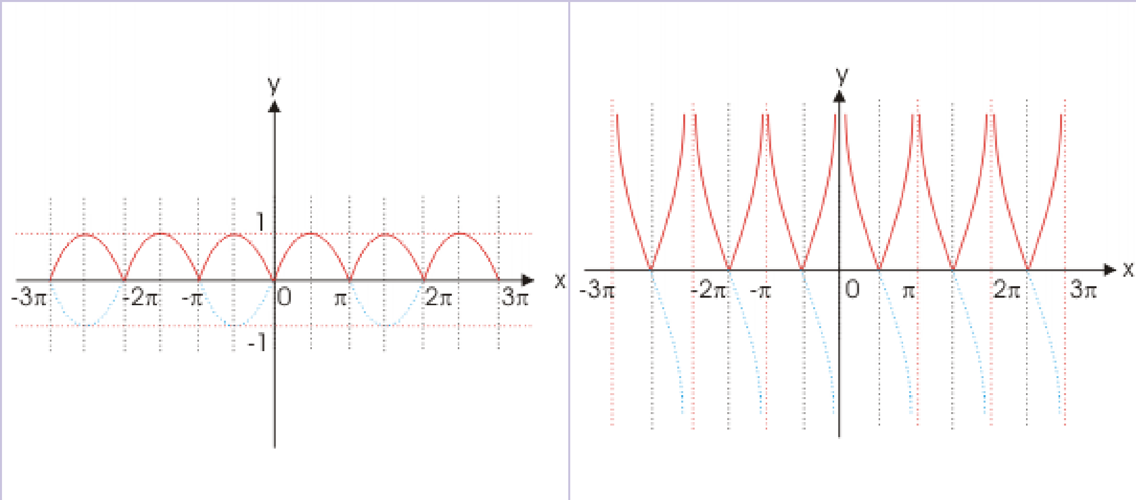
НЗС правило не важи за друге ирационалне бројеве, као што не важи за ко-функције, нити за парне функције.

Примјер 7.2.8. Наћи период функције $f(x) = \sin^3 x$.

Рјешење: Из $f(x) = \sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4} = \dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{3}{4}\sin 3x$. Знамо да први сабирак има период $T_1 = 2\pi$, други период $T_2 = 2\pi/3$. Отуда, $T = \text{НЗС}(T_1, T_2) = 2\pi$.♦

Задаци 7.2.9.

1. Који су основни периоди функција на сљедећим сликама:



2. Наћи основни период функције: **а)** $f(x) = 3 + 2\sin\frac{\pi x+3}{5}$; **б)** $f(t) = 5 - 3\cos\frac{3-\pi t}{2}$.

3. Наћи периоде функција:

а) $y = \sin 2x + \cos 2x$; **б)** $y = \sin\frac{x}{4} - \cos\frac{x}{4}$; **в)** $y = \sqrt{3}\sin(x - \pi) + \cos(x - \pi)$.

4. Израчунати периоде функција:

а) $f(x) = \sin\left(3\pi x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(2\pi x + \frac{\pi}{3}\right)$; **б)** $f(x) = |\sin x| + |\cos x|$;

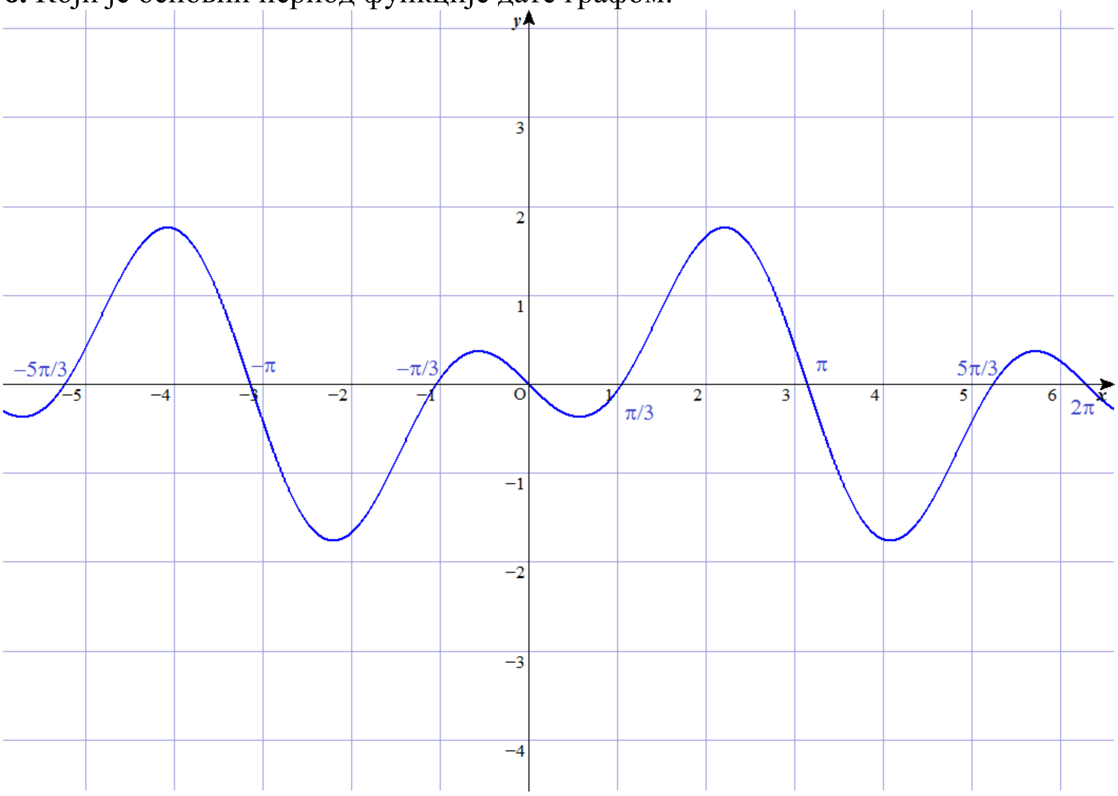
в) $f(x) = \sin^2 x + \cos^4 x$; **г)** $f(x) = \sin\{x\}$.

[2; π/2; π/2; 1.]

5. Наћи периоде функција:

а) $y = \sin x + \sin 2x$; **б)** $y = \cos 3x - \cos 2x$; **в)** $y = \sin x + \cos 2x$.

6. Који је основни период функције дате графом:



7.3. Амплитуда и ток

Кратко речено, **амплитуда** је половина растојања од минималне до максималне вриједности кодомена периодичне функције. Када кодомен није ограничен, кажемо да нема амплитуде, или да је амплитуда бесконачна. На примјер, таква је тангенсна функција.

Прецизније, **амплитуда периодичне функције** или пригушеног осциловања, је максимално растојање од референтног нивоа било у позитивном или у негативном смјеру. Периодична функција може представљати вибрацију, талас, или описати кретање клатна, односно опруге.

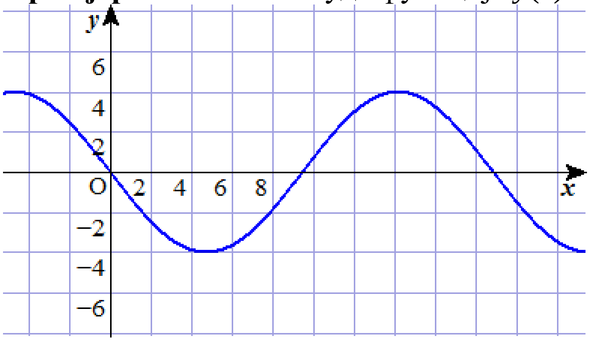
На примјер, синусоида $y = A\sin(\omega t + \alpha)$, гдје $A > 0$, гдје су ω и α константе, може представљати удаљеност честице која се креће праволинијски током времена t приликом осциловања око њеног исходишта O. Константа A је амплитуда, која је највећа удаљеност досезања честице од тачке O.

Израз амплитуда се користи и код тзв. *пригушених осцилација* за означавање одговарајућег коефицијента, чак и ако он није константан. На примјер, функција $y = 2^{-t}\sin 3t$ има амплитуду $A = 2^{-t}$ која се смањује ка нули када t неограничено расте.

Функција је (строго) **растућа** на оном дијелу свог домена гдје њена ордината (строго) расте заједно са апсцисом. Функција је (строго) **опадајућа** на оном дијелу домена гдје ордината (строго) опада док апсциса расте.

Примјер 7.3.1. Амплитуда функције $y(x) = a\sin(bx + c)$, или функције $y(x) = a\cos(bx + c)$, је $|a|$. Посебно, амплитуда функције

$$y(x) = -4\sin\left(\frac{x}{3}\right)$$

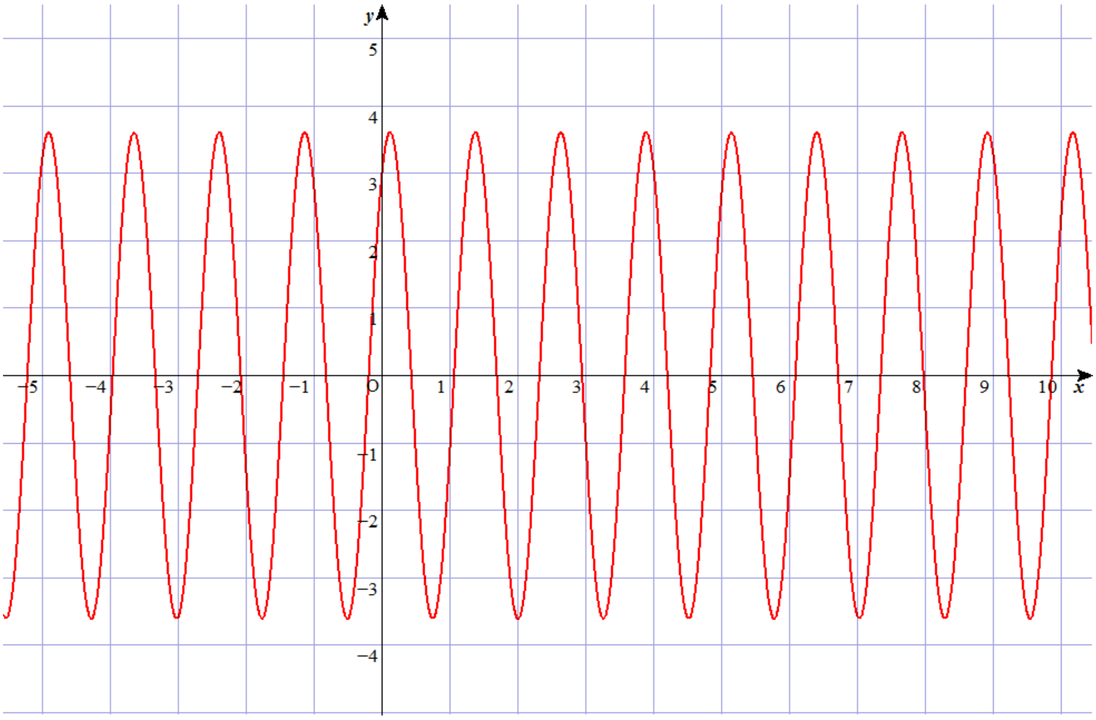


дате графом на слици лијево је 4. На графу видимо да функција опада за $x \in (-5, 5)$, односно расте за $x \in (5, 15)$, и даље периодично.

Примјер 7.3.2. Амплитуда функције $y(x) = a_1\sin(bx + c) + a_2\cos(bx + c)$ је $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Доказ: Можемо писати $y(x) = A\left(\frac{a_1}{A}\sin(bx+c) + \frac{a_2}{A}\cos(bx+c)\right)$, гдје је $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Даље, постоји угао θ такав да је $\cos\theta = \frac{a_1}{A}$ и $\sin\theta = \frac{a_2}{A}$, јер важи основни тригонометријски идентитет $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{a_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{A}\right)^2 =$ $\frac{a_1^2}{a_1^2+a_2^2} + \frac{a_2^2}{a_1^2+a_2^2} = \frac{a_1^2+a_2^2}{a_1^2+a_2^2} = 1$. Према томе, дата функција је $y(x) = A(\cos\theta\cdot\sin(bx + c) + \sin\theta\cdot\cos(bx + c)) = A\sin(bx + c + \theta)$, која има амплитуду $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. ♦

Посебно, на сљедећој слици је граф функције $y(x) = 2\sin 5x + 3\cos 5x$, која има амплитуду $A = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}6$.



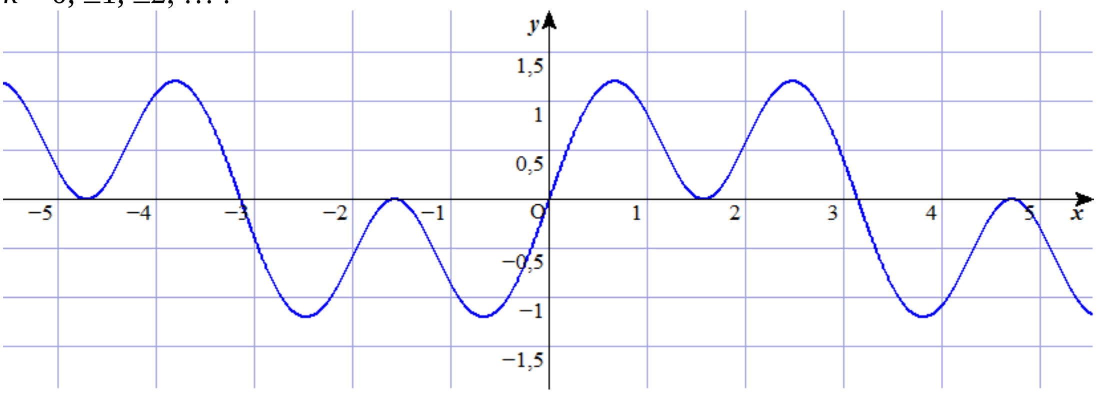
Примјер 7.3.3. Нацртати граф функције представљене изразом

$$y = \frac{\sin x + \sin 3x}{\sqrt{1+\cos 2x}}$$

пошто се он претходно трансформише на простији облик[9] ($\sqrt{a}$, $a > 0$, је позитиван број).

Рјешење: Дефиниционо подручје је $1 + \cos 2x > 0$, тј. $2\cos^2 x > 0$, што је испуњено за свако $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. $\sin 3x = \sin(x + 2x) = \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x$ $= \dots = \sin x\,(3 - 4\sin^2 x)$. $y = \sqrt{2}\cdot\frac{\cos x \sin 2x}{|\cos x|} = \begin{cases} \sqrt{2}\cdot\sin 2x, & \cos x > 0 \\ -\sqrt{2}\cdot\sin 2x, & \cos x < 0 \end{cases}$. Иначе, $\cos x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$, односно $\cos x < 0 \Leftrightarrow x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Период: $\sin 2x$, $T = \pi$. Нуле: $\sin 2x = 0$, $x = \frac{k\pi}{2}$. Екстреми: $\sin 2x = 1$ за $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.



.♦

Задаци 7.3.4.

[9] 13. Републичко такмичење средњошколаца БиХ у математици, 1971.

1. Колике су амплитуде функција:
а) $y = 2\sin(3x - 4)$; **б)** $y = -\cos(\frac{\pi}{4} - 2x)$; **в)** $y = 0{,}5\mathrm{tg}(4x + \frac{\pi}{3})$.

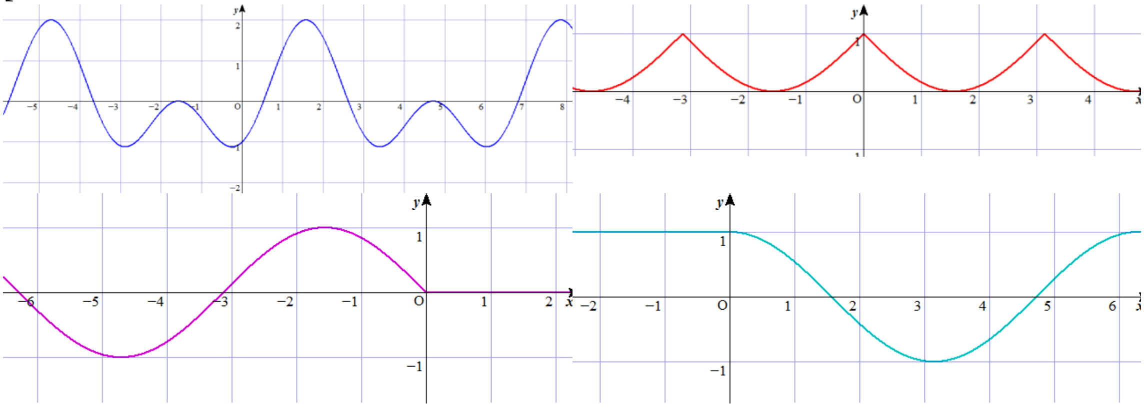
2. Израчунати амплитуде функција:
а) $y = 2\sin^2(x - \frac{\pi}{6})$; **б)** $y = -\cos^2(2x + \frac{\pi}{4})$; **в)** $y = 1{,}5\mathrm{tg}^2(3x + \frac{\pi}{3})$.

3. Користећи примјер (7.3.2.) наћи амплитуде функција:
а) $y = \sin 2x + \cos 2x$; **б)** $y = \sin\frac{x}{4} - \cos\frac{x}{4}$; **в)** $y = \sqrt{3}\sin(x - \pi) + \cos(x - \pi)$.

4. Процјенити вриједности амплитуда за функције:
а) $y = \sin x + \sin 2x$; **б)** $y = \cos 3x - \cos 2x$; **в)** $y = \sin x + \cos 2x$.

5. Наћи амплитуду и нацртати граф функције:
а) $f(x) = 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x$; **б)** $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$;
в) $f(x) = \sin x + |\sin x|$; **г)** $f(x) = \cos x + |\cos x|$.

6. Испитати ток и нацртати график функције:
а) $f(x) = \sin x - \cos 2x$; **б)** $f(x) = \sqrt{\sin^2 x - 2|\sin x| + 1}$;
в) $f(x) = \sin\dfrac{|x| - x}{2}$; **г)** $f(x) = \cos\dfrac{|x| + x}{2}$.

[

]

7.4. Аркус функције

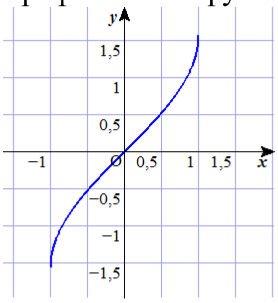
Инверзне тригонометријске функције изводимо из основних на сљедећи начин:

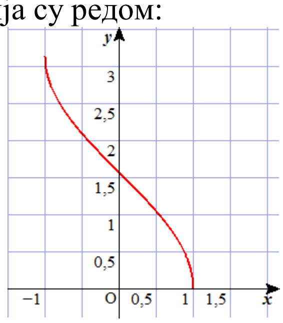
- **аркуссинус**: $a = \arcsin b \Leftrightarrow b = \sin a$, $a \in [-\pi/2, \pi/2]$;
- **аркускосинус**: $a = \arccos b \Leftrightarrow b = \cos a$, $a \in [0, \pi]$;
- **аркустангенс**: $a = \mathrm{arctg}\, b \Leftrightarrow b = \mathrm{tg}\, a$, $a \in [-\pi/2, \pi/2]$;
- **аркускотангенс**: $a = \mathrm{arcctg}\, b \Leftrightarrow b = \mathrm{ctg}\, a$, $a \in [0, \pi]$.

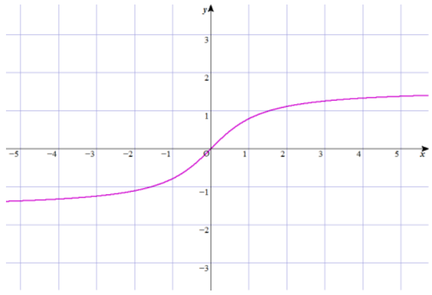
На тај начин су једнозначно дефинисане инверзне функције:

- $y = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$;
- $y = \arccos x$, $x \in [-1, 1]$;
- $y = \mathrm{arctg}\, x$, $x \in \mathbf{R}$;
- $y = \mathrm{arcctg}\, x$, $x \in \mathbf{R}$.

Графови ових функција су редом:







Примјер 7.4.1. Доказати идентитет arcsin x + arccos $x = \frac{\pi}{2}$.

Доказ: Нека је α = arcsin x. Тада је x = sin α, па је $\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$, а због $x \in$ [-π/2, π/2] не долази у обзир негативан косинус. Слично, нека је β = arccos x. Тада је x = cos β и $\sin\beta = \sqrt{1-x^2}$. Зато је sin($\alpha + \beta$) = x^2 + (1 – x^2) = 1, па је

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in$ **Z**. Како је α ∈ [-π/2, π/2] и β ∈ [0, π] то је

$\alpha + \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, па је $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.♦

Примјер 7.4.2. Израчунати $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$.

Рјешење: Нека је α = $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$. Тада је $\cos\alpha = \sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)$ и $\alpha \in$ [0, π].

Како је $\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{7}\right)$, биће $\cos\alpha = \cos\frac{9\pi}{14}$. Отуда $\alpha = \pm\frac{9\pi}{14} + 2k\pi$, $k \in$ **Z**. Долази у обзир само $\alpha = \frac{9\pi}{14}$.♦

Примјер 7.4.3. Доказати идентитет $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} = \mathrm{arctg}(1+\sqrt{2})^2$.

Доказ: Нека је $\alpha = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$. Због $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4} + \alpha < \frac{\pi}{2}$ $(0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Rightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$), биће $\alpha + \frac{\pi}{4} = \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right)$. Међутим, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, па је $\mathrm{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2}+1)^2$, што значи $\alpha + \frac{\pi}{4} = \mathrm{arctg}(1+\sqrt{2})^2$.♦

Задаци 7.4.3.

1. Израчунати: arcsin 0,5 ; arccos $\frac{\sqrt{2}}{2}$; arctg(-$\sqrt{3}$) ; arcctg 0.

2. Доказати идентитет:

а) arctg x + arcctg $x = \frac{\pi}{2}$;

б) arccos(-x) = π - arccos x.

3. Израчунати:

а) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$;

б) $\arcsin\left(\cos\frac{3\pi}{5}\right)$;

в) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{8\pi}{3}\right)$; **г)** $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\dfrac{8\pi}{3}\right)\right)$.

[7π/10; -π/10; -π/6; π/3]

4. Доказати идентитет:

а) $\arccos\frac{1}{7} + \arccos\frac{1}{2} = \arccos(-\frac{11}{14})$; **б)** $2\operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}14 = \operatorname{arctg}\frac{32}{43}$;

в) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7}\ \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.

5. Одредити домен функције:

а) $f(x) = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$; **б)** $f(x) = \arcsin\dfrac{x^2\sqrt{2}}{2\sqrt{x^4-2x^2+2}}$;

в) $f(x) = \arccos\dfrac{1}{x}$; **г)** $f(x) = \arcsin\dfrac{|x|}{x-2}$;

д) $f(x) = \arccos\sqrt{1+x^2}$; **ђ)** $f(x) = \arccos(2\sin x)$.

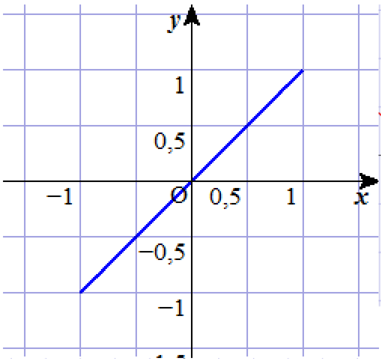
[а) D = **R**, јер $\left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right| \le 1$; б) D = **R**, јер $x^4 - 2x^2 + 2 = (x^2-1)^2 + 1 > 0$ и $-1 \le \dfrac{x^2\sqrt{2}}{2\sqrt{x^4-2x^2+2}} \le 1$; в) $\left|\dfrac{1}{x}\right| \le 1$, тј. $|x| \ge 1$; г) D = $(-\infty, 1]$; д) само $x = 0$; ђ) $2\sin x \le 1$, тј. $-\pi/6 + k\pi \le x \le \pi/6 + k\pi$, $k \in$ **Z**.]

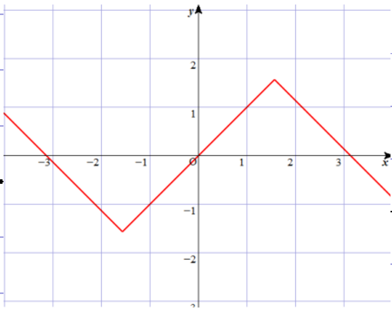
6. Нацртати график функције:

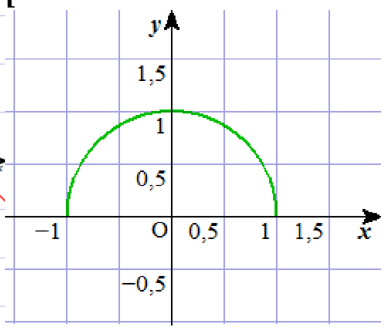
i. $y = \sin(\arcsin x)$; **ii**. $y = \arcsin(\sin x)$; **iii**. $y = \sin(\arccos x)$;

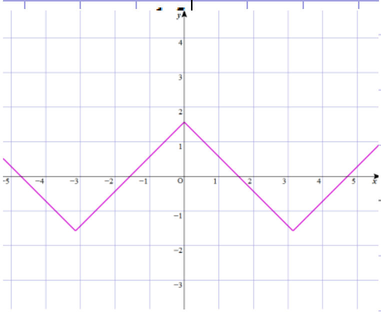
iv. $y = \arcsin(\cos x)$; **v**. $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$.

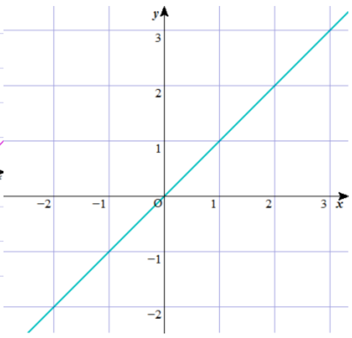
[







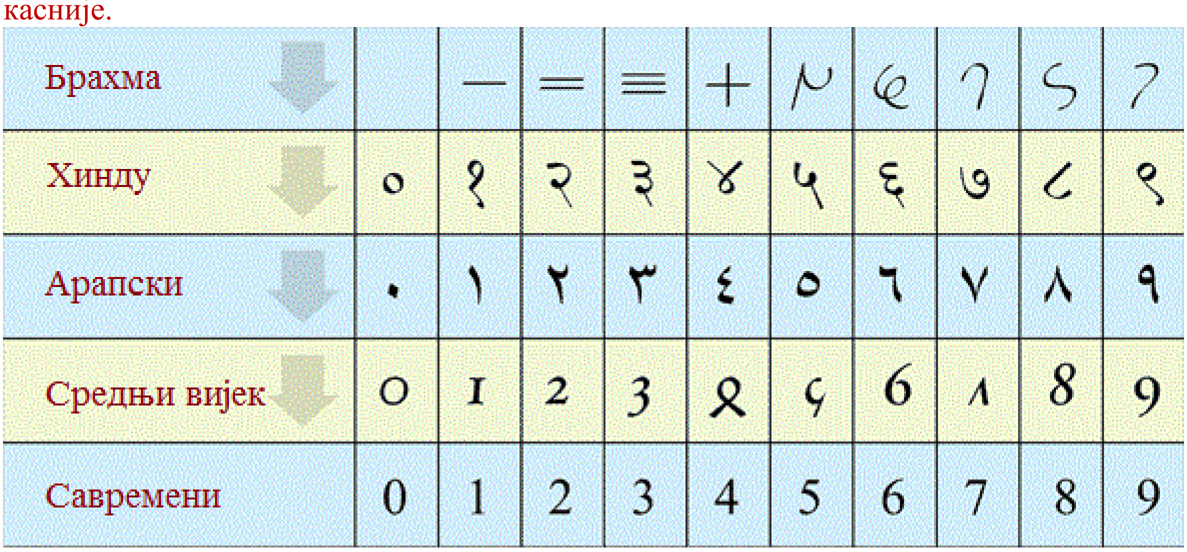




]

IV Бројеви

Историја бројеве је дуга колико и историја математике. Антички Египћани су 3000 г.п.н.е. открили природне бројеве, које су писали у бази 10. Познавали су и једноставне разломке. Вавилонци су ипак рађе користили базу 60. Претпостављамо да је база 10 кориштена у аналогији са 10 прстију на рукама, а база 60 због великог броја фактора тог броја. Доказ постојања ирационалних бројева открио је 500 г.п.н.е. ученик Питагорејске школе у Античкој Грчкој (Хипасус) који је због тога убијен. Сам доказ објавио је Еуклид око 200 година касније.



Индијско-арапски бројеви са базом 10 и нулом су се појавили око 600 године нове ере. Тај декадни систем бројева, заједно са негативним бројевима је постао основа европске математике 15. вијека. У сљедећем вијеку је први пут употребљен имагинарни број. Комплексна аритметика је постала дио математике у 17. вијеку, а вијек касније је дефинисан логаритам негативног броја. Реални бројеви су прецизно дефинисани тек у 19. вијеку.

8. Реални бројеви

Знамо да се скуп реалних бројева означава са **R** и да су његови подскупови:

- скуп **природних** бројева **N** = {1, 2, 3, …},
- скуп **цијелих** бројева **Z** = {…, -1, 0, 1, 2, …},
- скуп **рационалних** бројева **Q** = $\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbf{Z} \wedge n \in \mathbf{N}\}$,
- скуп **ирационалних** бројева **I** = **R** \ **Q**.

Рационални бројеви се могу представити разломцима са цјелобројним бројником и називником. На примјер, децимални број -7 једнак је разломку -7/1, а децимални број 1,5 једнак је разломку $\frac{15}{10}$ или $\frac{3}{2}$. Понекад то није очигледно, па нам је потребан поступак, или доказ да је дати децимални број једнак неком разломку.

Примјер 8.0.1. Наћи раломак једнак децимални периодичном броју 0,151515... .

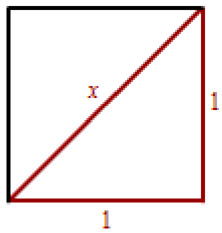
Рјешење: Ставимо 0,151515... = x. Множимо једнакост са 100, па добијамо 15,151515... = 100x, тј. 15 + 0,151515... = 100x. Отуда једначина 15 + x = 100x, односно 99x = 15, чије рјешење је $x = \frac{15}{99}$. Према томе, дати децимални периодични број једнак је разломку $\frac{5}{33}$.♦

Сваки децимални периодични број могуће је на овај начин представити у облику цјелобројног разломка, што значи да су сви периодични децимални бројеви рационални. Другим ријечима, ако постоје ирационални бројеви они морају имати непериодичан децимални запис.

Теорема 8.0.2. Број који помножен самим собом даје 2 није рационалан број.

Доказ: Претпоставимо супротно, да такав број x јесте рационалан. Тада постоји скраћен, редукован разломак $x = \frac{m}{n}$. Како је $x \cdot x = 2$, то је $\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} = 2$, односно $m \cdot m = 2 \cdot n \cdot n$. Према томе, број m је паран те он мора бити облика $m = 2k$, гдје је k неки цијели број. Вратимо ли m у претходну једнакост, након скраћивања једнакости са 2 добијамо $n \cdot n = 2 \cdot k \cdot k$, одакле закључак да је и број n паран број. Ако је полазни дати разломак скраћен, онда не могу оба дијела, бројник и називник бити парни бројеви. То је контрадикција. Неизбјежан је закључак да полазна претпоставка није тачна. Другим ријечима, немогућа је претпоставка да је тражени број рационалан, односно број који помножен самим собом даје 2 је ирационалан.♦

Овакав доказ, да постоје ирационални бројеви, потиче из Античке Грчке. Број који би помножен самим собом имао резултат 2 је дужина дијагонале квадрата странице дужине 1.



Поред **корјена** неких цијелих бројева (нпр. $\sqrt{2} \approx 1.41421...$), веома познати ирационални бројеви су: **пи** (однос обима и пречника круга) $\pi \approx 3.14159...$,
природни (Ојлеров) број $e \approx 2.71828...$ и **златни пресјек** (подјела дужи: *цијела дуж* : *већи дио* = *већи дио* : *мањи дио* =) $\varphi \approx 1.618034$.

Задаци 8.0.3.

1. Представити у облику разломка децимални број: 0,222… ; 2,32323… ; 29,5175175… .

2. Представити у облику децималног броја разломак: $\frac{4}{9}, \frac{17}{99}, 2\frac{113}{999}$.

3. Доказати да је ирационалан број који помножен самим собом даје 3.

4. Ако је производ два броја ирационалан број, онда је и њихов збир ирационалан. Доказати.

8.1. Степеновање

Ради скраћеног писања дефинишемо степен са цјелобројним експонентом изразом:

Дефиниција 8.1.1. $(\forall a \in \mathbf{R})\ a^n \Leftrightarrow a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, гдје се фактор a појављује $n \in \mathbf{N}$ пута. Број a називамо база, n изложилац или експонент, a^n степен базе a са изложиоцем n.

То значи да је $a^1 = a$, $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$, ..., и уопште $a^{k+1} = a^k \cdot a$, гдје је $k = 1, 2, 3, \ldots$. На примјер, видимо да је $(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2 \cdot 3}$. Аналогно вриједи и уопште, степен се степенује тако што се база препише, а изложиоци помноже.

Даље, из дефиниције сљеди $a^2 \cdot a^3 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^{2+3}$, или $a^2 : a^3 = (a \cdot a) : (a \cdot a \cdot a) = \frac{1}{a}$. Било би досљедно проширити скуп изложилаца на скуп цијелих бројева. Тиме уводимо нове ознаке: $a^0 = 1$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, …, и уопште $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Дакле, степени исте базе множе се тако што се база препише, а изложиоци саберу;

односно степени исте базе дјеле се тако што се база препише, а изложиоци одузму.
Када множимо степене различитих база, тада морамо имати једнаке изложиоце. Рецимо, $a^2 \cdot b^2 = (a \cdot a) \cdot (b \cdot b) = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = (ab)^2$. Дакле, степене различитих база и једнаких изложилаца множимо тако што помножимо базе, а изложилац препишемо.
Дефиниција и поменута правила се досљедно проширују на степене са рационалним изложиоцима, а затим уопште на изложиоце који могу бити произвољни бројеви.
Правила 8.1.2. Основне особине операција са степенима, ($\forall m, n \in \mathbf{R}$):

1. $(\forall a \neq 0)\ a^0 = 1, \ldots, \ a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$;
2. $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$;
3. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ и $a^m : a^n = a^{m-n}$;
4. $a^n b^n = (ab)^n$ и $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$, $b \neq 0$.

Изразе са степенима поједностављујемо растављањем на факторе, смањивањем броја база и примјеном претходних правила гдје је то могуће.
Задаци 8.1.3. Израчунати:

1. а) $\dfrac{3^{-2}+3^0}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} - 2(-3)^{-2} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}}$; **б)** $\dfrac{0.6^0 - 0.1^{-1}}{0.6^{-2} - (-0.6)^{-1} \cdot 0.1^{-1} + (-0.1)^{-2}}$.

2. а) $(x + x^{-1}) : (x - x^{-1})$, ако је $x = \dfrac{2^{-n}+1}{2^{-n}-1}$;

б) $(a + 1)^{-1} + (b + 1)^{-1}$, ако је $a = (2 + \sqrt{3})^{-1}$, $b = (2 - \sqrt{3})^{-1}$.

3. Извршити назначене операције у изразу:

а) $\left(\dfrac{3a^{-1}x^2}{5b^{-2}y^3}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{10ax^{-3}}{9by^{-2}}\right)^{-3}$, $abxy \neq 0$; **б)** $\left(\dfrac{7m^{-2}p^1}{3n^{-1}q^3}\right)^{-3} : \left(\dfrac{5m^{-1}p^3}{2n^{-2}q^{-1}}\right)^{-2}$, $mnpq \neq 0$.

4. Поједноставити изразе, за $a > 0$, $b > 0$, $ab > 1$:

а) $\dfrac{\left(a+\dfrac{1}{b}\right)^a \cdot \left(a-\dfrac{1}{b}\right)^b}{\left(b+\dfrac{1}{a}\right)^a \cdot \left(b-\dfrac{1}{a}\right)^b}$; **б)** $\dfrac{\left(a^2-\dfrac{1}{b^2}\right)^a \cdot \left(a-\dfrac{1}{b}\right)^{b-a}}{\left(b^2-\dfrac{1}{a^2}\right)^b \cdot \left(b+\dfrac{1}{a}\right)^{a-b}}$.

5. Поједноставити:

а) $(75^x + 30^x + 12^x)(5^x - 2^x)$;

б) $\left(\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}\right)^2$.

6. Доказати идентитете, $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$:

а) $(x^n - x^{-n})(x^n + x^{-n} - 2)^{-1} = (x^n + 1)(x^n - 1)^{-1}$; **б)** $(x^n - x^{-n})(x^n + x^{-n} + 2)^{-1} = (x^n - 1)(x^n + 1)^{-1}$.

8.2. Корјеновање

Негдје око 820. год. је Ал Хорезми (Перзијанац по коме је настала ријеч „алгоритам“) називао је ирационалне бројеве „*inaudible*“, што је на латинском преводу било „сурдус“ (глув, мутав). У енглеском језику „*surd*” је ирационалан број добијен корјеновањем.

Дефиниција 8.2.1. Симболом $\sqrt[n]{a}$ означавамо број чији је n-ти степен једнак броју a. Читамо га “n-ти корјен броја a”. Сматраћемо да $n \in \mathbf{N}$ и $a \in \mathbf{R}$.

Ако је n непаран тада је $\sqrt[n]{a^n} = a$, а ако је n паран тада је $\sqrt[n]{a^n} = |a|$. Ако је $a \geq 0$ и тада је $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. Даље, ако су $m, n \in \mathbf{N}$ и $a, b \geq 0$, тада је

1. $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$,
2. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$,
3. $\sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}$,
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$,
5. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ и такође $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$.

Примјер 8.2.2. Који од бројева је већи:

а) $5\sqrt{3}$ или $3\sqrt{5}$; **б)** $\sqrt{2}$ или $\sqrt[3]{3}$; **в)** $\sqrt{2} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}$ или $\sqrt{3 + \sqrt{5}}$.

Рјешење: а) упоредимо квадрате датих бројева, $25 \cdot 3 > 9 \cdot 5$, па је први број већи; **б)** трећи степени: $2\sqrt{2}$ или 3, а квадрати ових: 8 и 9, што значи други број је већи ($\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$); **в)** помножимо оба са $\sqrt{2}$, па добијамо дилему: $2 + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$ или $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$. Како је $\sqrt{6 \pm 2\sqrt{5}} = \sqrt{\left(\sqrt{5} \pm 1\right)^2} = \sqrt{5} \pm 1$, то је први број $2 + \sqrt{5} - 1$, а други $\sqrt{5} + 1$. Вриједности тих бројева су једнаке.♦

Примјер 8.2.3. Поједноставити:

а) $\sqrt{4500}$; **б)** $(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25})(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5})$; **в)** $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + 2 - \sqrt{2}$.

Рјешења: а) Растављамо на факторе $\sqrt{4500} = \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 125} = 2 \cdot 3 \cdot 5\sqrt{5} = 30\sqrt{5}$; **б)** то су фактори збира кубова $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 2 + 5 = 7$; **в)** $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2} - 1$, па је резултат 1.♦

Примјер 8.2.4. Рационалисати:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; **б)** $\dfrac{5}{2 - \sqrt{3}}$; **в)** $\dfrac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$.

Рјешења: Рационалисати разломак значи трансформисати га у разломак једнаке вриједности али са имениоцем рационалним бројем: **а)** $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; **б)**

$\frac{5}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{5(2+\sqrt{3})}{4-3} = 10+5\sqrt{3}$; **в)** $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdot \frac{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}} =$
$\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-3} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, затим даље рационалишемо проширујући добијени разломак са $\sqrt{2}$ и добијамо $\frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$.♦

Примјер 8.2.5. Доказати **Лагранжов идентитет**: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$, $A \geq 0$, $B \geq 0$, $A^2 \geq B$. Ова формула се користи за трансформацију израза са корјенима.

Доказ: Ставимо $\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}} = x$. Имаћемо $x^2 = 2(A+\sqrt{A^2-B}) = 4\cdot \frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}$, па је

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}} = 2\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \quad \dots\dots\dots (1).$$

Ставимо $\sqrt{A+\sqrt{B}}-\sqrt{A-\sqrt{B}} = y$. Имаћемо $y^2 = 2(A-\sqrt{A^2-B}) = 4\cdot \frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}$, па је

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}-\sqrt{A-\sqrt{B}} = 2\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}} \quad \dots\dots\dots (2).$$

Сабирање, односно одузимањем једнакости (1) и (2) сљеди Лагранжов идентитет.♦

Задаци 8.2.5.

1. Упростити изразе:

а) $2\sqrt{40\sqrt{12}} + 3\sqrt{5\sqrt{48}} - 2\sqrt[4]{75} - 4\sqrt{15\sqrt{27}}$;

б) $\sqrt{5ab}\cdot\sqrt[6]{5ab}\cdot\sqrt[3]{5ab^4}$.

2. Који од бројева је већи:

а) $0{,}5\sqrt{2}$ или $0{,}3\sqrt{5}$; **б)** $\sqrt{3}$ или $\sqrt[3]{5}$; **в)** $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$ или $\sqrt{2+\sqrt{3}}$;

г) $7\sqrt{0{,}3}$ или $3{,}5\sqrt{0{,}4}$ **д)** $\sqrt[3]{7}$ или $\sqrt{4}$; **ђ)** $2\sqrt{2}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}$ или $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$.

3. Поједноставити:

а) $\sqrt{10800}$; **б)** $\sqrt{5400}$;

в) $\sqrt{75-12\sqrt{21}}$; **г)** $\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$;

д) $\left(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$; **ђ)** $\sqrt{6+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{5}}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{5}}}$.

4. Рационалисати разломке:

а) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; **б)** $\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; **в)** $\frac{5}{2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}}$;

г) $\frac{4}{2\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{2}}$; **д)** $\frac{1}{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}}$; **ђ)** $\frac{1}{2+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{10}}$.

5. Користећи Лагранжов идентитет одредити:

а) $\sqrt{3\pm 2\sqrt{2}}$; **б)** $\sqrt{4\pm 2\sqrt{3}}$; **в)** $\sqrt{7\pm 4\sqrt{3}}$; **г)** $\sqrt{3\sqrt{3}\pm 2\sqrt{6}}$.

6. Израчунати вриједност израза $A = \left(\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{1-a^3}}+\frac{\sqrt{1-a^3}}{a\sqrt{a}}\right)^{-1}$, за $a = \sqrt[3]{\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{2x}}$, x, y > 0.

7. Израчунати: $\left(\frac{\sqrt[4]{ax^3}-\sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2}\cdot\sqrt{1+2\sqrt{\frac{a}{x}}+\frac{a}{x}}$.

8. Доказати да је:

а) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \begin{cases} 2, & 1\le x\le 2 \\ 2\sqrt{x-1}, & x>2 \end{cases}$;

б) $\sqrt{2}\left(2a+\sqrt{a^2-b^2}\right)\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}} = \sqrt{(a+b)^3}-\sqrt{(a-b)^3}$, $a, b > 0, a > b$.

8.3. Разломљени изложиоци

Дефиниција 8.3.1. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$.
Према овој дефиницији, степене са рационалним изложиоцем множимо, или дјелимо према истим правилима за цјелобројне изложиоце. На примјер,

$4^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{2}}$ = (заједничка база) = $2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{(-3)\cdot(-\frac{1}{2})} = 2^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}} = 2^{\frac{13}{6}} = 4\cdot\sqrt[6]{2}$. Други примјер, упоредимо бројеве $9^{\frac{1}{2}}$ и $25^{\frac{1}{3}}$ сводећи их на степене са једнаким експонентом. То су $9^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{3}{6}} = 729^{\frac{1}{6}}$ и $25^{\frac{1}{3}} = 25^{\frac{2}{6}} = 625^{\frac{1}{6}}$ који имају исти изложилац 1/6, што значи да је већи први од наведених степена, тј. $9^{\frac{1}{2}} > 25^{\frac{1}{3}}$.

Примјер 8.3.2. Упростити израз $\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt[3]{(a(a-b))^2}}\cdot\frac{a^{\frac{2}{3}}\left(a\sqrt{a}-b\sqrt{b}\right)}{(a-b)^{\frac{1}{3}}}$.

Рјешење: $\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{(a(a-b))^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{a^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}\right)}{(a-b)^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}\left(a^3-b^3\right)}{a^{\frac{2}{3}}(a-b)} = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a-b} =$

a^2+ab+b^2, $a, b > 0, a \ne b$.♦

Задаци 8.3.3.

1. Израчунати:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{a^4 b^{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt[4]{a^{-5}}}}{\left(b^2 \cdot \sqrt[5]{a^2 b^3}\right)^2}$; **б)** $\dfrac{\sqrt[4]{a^{\frac{1}{3}} b^5 \cdot \sqrt[5]{b^{-1}}}}{\left(a^3 \cdot \sqrt[3]{ab^2}\right)^2}$.

2. Израчунати вриједност израза

а) $\left(12 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$ за $x = \left(6 + 2\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$;

б) $\dfrac{9b^{\frac{4}{3}} - \dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{b^2}}{\sqrt{a^{\frac{3}{2}} b^{-2} + 6a^{\frac{3}{4}} b^{-\frac{1}{3}} + 9b^{\frac{4}{3}}}} \cdot \dfrac{b^2}{a^{\frac{3}{4}} - 3b^{\frac{5}{3}}}$, за $a = 3\sqrt{7}$, $b = 4$.

3. Скратити разломке:

а) $\dfrac{a-b}{a^{0,5} - b^{0,5}}$; **б)** $\dfrac{x + 2x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} + y}{x - y}$;

в) $\dfrac{x^{0,6} + y^{0,9}}{x^{0,4} - y^{0,6}}$; **г)** $\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}$.

4. Упростити изразе:

а) $\left(3a + \sqrt{6a-1}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(3a - \sqrt{6a-1}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

б) $\left(\dfrac{a-x}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x}} - \dfrac{a+x}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{x}}\right) \cdot 2(ax)^{-\frac{1}{3}}$, $a, x > 0$;

в) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{(x+y)^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{(x+y)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}\right)^{-2} - \dfrac{x+y}{2\sqrt{xy}}$, $x, y > 0$;

г) $\dfrac{\left((x+2)^{-\frac{1}{2}} + (x-2)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} + \left((x+2)^{-\frac{1}{2}} - (x-2)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}}{\left((x+2)^{-\frac{1}{2}} + (x-2)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} - \left((x+2)^{-\frac{1}{2}} - (x-2)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}}$, $x > 2$.

5. Израчунати:

а) $\left(\dfrac{\left(p^2+q^2\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(p^2-q^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(p^2+q^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(p^2-q^2\right)^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-2}$, за $p = q\left(\dfrac{a^2+b^2}{2ab}\right)^{\frac{1}{2}}$, $q, a, b > 0$;

б) $\left((m-1)^{-\frac{1}{2}} + (m+1)^{-\frac{1}{2}}\right) : \left((m-1)^{-\frac{1}{2}} - (m+1)^{-\frac{1}{2}}\right)$, за $m = (p^2+q^2) : (2pq)$, $p, q > 0$;

6. Доказати идентитете:

а) $\left(\left(\left(\dfrac{p^{\frac{1}{3}}+1}{p^{\frac{1}{3}}-1}\right)^2+3\right)\cdot\left(\left(\dfrac{p^{\frac{1}{3}}-1}{p^{\frac{1}{3}}+1}\right)^2+3\right)\right)^{-1}\cdot\dfrac{p-1}{p+1}-\dfrac{2}{p^{\frac{1}{3}}-1}=1$;

б) $\dfrac{q^{\frac{1}{3}}}{2-q^{\frac{1}{3}}}-\left(\dfrac{72-9q}{8}:\left(\left(\dfrac{4+q^{\frac{1}{3}}}{2-q^{\frac{1}{3}}}\right)^3+1\right)\right)^{-\frac{1}{4}}=-1$.

9. Комплексни бројеви

У скупу реалних бројева није могуће израчунати други корјен од негативног броја. То је зато што се квадрирањем негатиних, као и позитивних реалних бројева доијају позитивни реални бројеви. Број чији квадрат је минус један називамо *имагинарна јединица*. Досљедно је и бројеве чији су квадрати негативни реални бројеви називати имагинарним бројевима. Збир имагинарног и реалног броја називамо *комплексан број*.

9.1. Рачунске операције

Дефиниција 9.1.1. Број $i=\sqrt{-1}$ такав да је $i^2 = -1$ називамо **имагинарна јединица**.

Производ реалног броја и имагинарне јединице је **имагинарни број**. Збир реалног и имагинарног броја је **комплексан број**. Тачније, ако су x и y реални бројеви ($x, y \in \mathbf{R}$), тада је $z = x + iy$ комплексан број, при чему x и y називамо редом **реални** и **имагинарни** дио тог комплексног броја. Пишемо $\mathrm{Re}(z) = x$ и $\mathrm{Im}(z) = y$. Примјетимо да су оба, Re и Im комплесног броја реални бројеви.
Модуо, или апсолутна вриједност комплексног броја $z = x + iy$ је реални број $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Скуп комплексних бројева означавамо **C**.

Примјетимо да $\left(\sqrt{-1}\right)^2 \neq \sqrt{(-1)^2}$, или да је $\sqrt{-49} = \sqrt{49\cdot(-1)} = \sqrt{49}\cdot\sqrt{-1} = 7i$.

Даље, да је $i^3 = i^2\cdot i = (-1)\cdot i = -i$, затим $i^4 = i^3\cdot i = -i\cdot i = 1$, или $i^5 = i^4\cdot i = i$, и тако даље, $i^{53} = i^{52}\cdot i = (i^4)^{13}\cdot i = 1^{13}\cdot i = 1\cdot i = i$.
Са друге стране, $2i + 3i = 5i$, или $(2 - 5i) + (3 + 4i) = (2 + 3) + (-5 + 4)i$.
Комплексне бројеве сабирамо тако што сабирамо реални дио са реалним, а имагинарни са имагинарним. Досљедно је $(3 - 2i)\cdot(5 - 7i) = 15 - 21i - 10i + 14i^2 = 15 - 31i - 14 = 1 - 31i$.

Дефиниција 9.1.2. Број $\bar{z} = x - iy$ називамо **коњуговано комплескан** број броја $z = x + iy$.

Важи и обрнуто, $\bar{z} = 5 - 4i$ је коњугован броју $z = 5 + 4i$, али је и број $\bar{\bar{z}}=\overline{5-4i}=5+4i$ коњугован броју $\bar{z} = 5 - 4i$. Другим ријечима, комплексни бројеви су узајамно коњуговани.

Производ (узајамно) коњугованих бројева је реалан број. На примјер:
$(5+4i)\cdot\overline{(5+4i)} = (5 + 4i)\cdot(5 - 4i) = 25 - 20i + 20i - 16i^2 = 25 + 16 = 41 \in \mathbf{R}$.

Примјер 9.1.3. Показати да се збир и разлика, затим производ и количник комплексних бројева $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 5 - 4i$ може представити у облику комплексног броја $z = x + iy$, гдје су x и y реални бројеви.

Резултати: $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (5 - 4i) = (2 + 5) + (3 - 4)i = 7 - i$,

$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (5 - 4i) = (2 - 5) + (3 + 4)i = -3 + 7i$,
$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)\cdot(5 - 4i) = (2\cdot5 + 3\cdot4) + (-2\cdot4 + 3\cdot5)i = 22 + 7i$,
$z_1 : z_2 = \frac{2+3i}{5-4i}\cdot\frac{5+4i}{5+4i} = \frac{-2+23i}{25+16} = -\frac{2}{41}+\frac{23}{41}i$.♦

Комплексан број z, елеменат скупа **C** када је представљен у облику $z = x + iy$, $x, y \in$ **R** називамо **алгебарски облик** комплексног броја z.

Како је сваки елеменат $z \in$ **C** облика $z = x + iy$, то за $x = 0$ имамо чисто имагинаран број z, а за $y = 0$ имамо реалан број. Према томе је **R** $\subseteq$ **C**.

Комплексне бројеве не упоређујемо по величини.

Примјер 9.1.4. Колико је $\sqrt[3]{-1}$?

Рјешење: Тражимо све могуће резултате у облику комплексног броја. Из $\sqrt[3]{-1} = x + iy$, гдје су x и y реални бројеви, сљеди $(x+iy)^3 = -1$, односно $x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i = -1$, па $x(x^2 - 3y^2) + y(3x^2 - y^2)i = -1$. Да би добијени комплексни број лијево био једнак броју десно потребне су двије једнакости: $x(x^2 - 3y^2) = -1$ и $y(3x^2 - y^2) = 0$. Из друге једнакости, за $y = 0$ добијамо у првој једнакости $x^3 = -1$, чије је једино реално рјешење $x = -1$. Затим имамо $3x^2 = y^2$, што са првом од једнакости даје $x = \frac{1}{2}$, а затим $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Према томе, трећи корјен јединице у скупу комплексних бројева може бити: -1, $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.♦

Задаци 9.1.5.

1. Представити у облику имагинарног броја:
а) $\sqrt{-9} + \sqrt{-16} - \sqrt{-25}$; **б)** $\sqrt{-8} - \sqrt{-18} + \sqrt{-50}$; **в)** $\sqrt{-x^2} + \sqrt{-x^2 + 2xy - y^2} - \sqrt{-y^2}$.

2. Израчунати, свести на облик $x + iy$: **а)** i^{125}; **б)** $i^{27} + i^{33}$; **в)** $i^{56} - i^{71}$.

3. Свести на облик $x + iy$:
а) $(2 - 3i) + (-5 + 4i)$; **б)** $(3 - i)^2 + (-7 + 2i)$; **в)** $(6 - 5i)(4 - 9i)$; **г)** $(4 - 3i)(4 + 3i) + 2 + i$.

4. Наћи реални Re(z) и имагинарни Im(z) дио комплексног броја z:
а) $z = \frac{2-3i}{3+2i}$; **б)** $z = \frac{1+2i}{2-i} + \frac{1-i}{1+i}$; **в)** $z = \frac{3+5i}{7+2i} - \frac{i}{1-4i}$; **г)** $z = \frac{7-5i}{4+3i} + 2 - i$.

5. Наћи модуле комплексних бројева:
а) $3 + 4i$; **б)** $5 - 12i$; **в)** $-7 + 24i$; **г)** $-8 - 15i$.

6. Рјешити по z једначину ($z = x + iy$):
а) $2z - 3\bar{z} = 5 - 4i$; **б)** $5z - 4\bar{z} = 2 + 3i$; **в)** $z^2 + 2\bar{z} = 1$; **г)** $\bar{z}^2 - 2z = i$.

7. Дата је функција $f(z) = z^2 + 2iz - 3 + 5i$.
а) Одредити $f(3 + 4i)$ и $f(3 - 4i)$; **б)** Одредити $f(7 + 3i)$ и $f(7 - 3i)$.

8. Доказати да ($\forall z_1, z_2 \in$ **C**) важи: **а)** $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; **б)** $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

9. Дата је функција $f(z) = z^2 + 2z - 3$. Доказати да је $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$ за свако $z \in$ **C**.

10. Рјешити по z једначину ($z = x + iy$):
а) $|z| + z = 1 + 2i$; **б)** $|z| - z = 2 - i$; **в)** $z^2 = -2i$; **г)** $z^2 = -3 + 4i$.

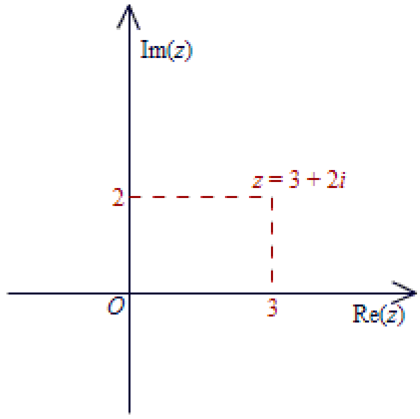
11. Дат је комплексан број z_1. Наћи комплексан број $z = x + iy$ ако је:

а) $z_1 = 2 + 3i$, затим $\mathrm{Re}(z_1 \cdot z) = 1$ и $\mathrm{Im}\left(\dfrac{\bar{z}}{z_1}\right) = -\dfrac{1}{13}$;

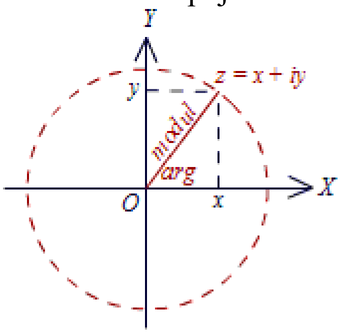
б) $z_1 = 3 - 2i$, затим $\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}) = 1$ и $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z}{\bar{z}_1}\right) = \dfrac{1}{13}$.

9.2. Комплексна раван

Комплексна раван, или **Гаусова раван** је Декартов правоугли систем координата чије тачке су комлексни бројеви ($z = x + iy$), при чему су на апсциси и ординати редом вриједности реалног и имагинарног дијела датог комплексног броја.



Сваком комплексном броју одговара јединствена тачка у комплексној равни. На слици десно је број $z = 3 + 2i$ представљен тачком са координатама (3, 2). Зато можемо писати $z = (3, 2)$, подразумјевајући одговарајући комплексан број.



Комплексна раван се у литератури назива и **Аргандова раван**, а **Аргандов дијаграм** цртежом положаја датог комплексног броја, као на слици лијево.

Лако је видјети да се положај тачке $z = x + iy$ може задати **модулом**, овдје удаљеношћу $\rho = \overline{Oz} = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ дате тачке од исходишта координатног система и **аргументом**, углом $\theta = \angle xOz$ под којим се види тачка из исходишта према апсциси.

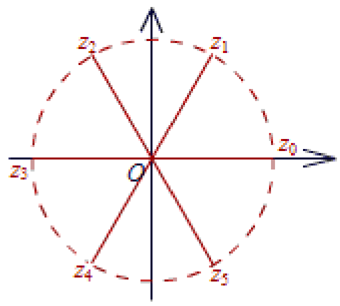
На датом Агандовом дијаграму видимо да су модуо $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и аргумент θ = arctg($\frac{x}{y}$), односно да су реални и имагинарни дјелови комплексног броја $x = \rho \cos\theta$ и $y = \rho \sin\theta$. Све тачке на испрекиданој кружници имају једнаке модуле (ρ = const.), а све тачке на датој правој Oz имају једнаке аргументе (θ = const.).

Примјер 9.2.1. Доказати ($\forall z_1, z_2 \in$ **C**) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \wedge \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

Доказ: $z_1 z_2 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ =
$\rho_1\rho_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)]$ =
$\rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$.♦

***n*-ти корјен** комплексног броја z је комплексан број z_1, који означавамо $\sqrt[n]{z}$, који подигнут на n-ти степен даје z. Другим рјечима, ако је $z_1 = \sqrt[n]{z}$ тада важи једнакост $z = (z_1)^n$, и обрнуто. Како из претходног примјера (9.2.1.) сљеди $(z_1)^n = \rho_1{}^n(\cos n\theta_1 + \sin n\theta_1)$, то је $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\dfrac{\theta}{n} + i\sin\dfrac{\theta}{n}\right)$, гдје су ρ_1 и ρ, односно θ_1 и θ редом модули, односно аргументи комплексних бројева z_1 и z.

Примјер 9.2.2. Наћи сва рјешења једначине $z^6 = 5$ у скупу **C**.



Рјешење: Из $5 = 5 + 0\cdot i = 5\cdot(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi)$, гдје је k произвољан цијели број, сљеди $z_k = \sqrt[6]{5}\cdot\left(\cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6}\right)$, одакле добијамо 6 различитих резултата z_k (k = 0, 1, 2, 3, 4 и 5): $\sqrt[6]{5}$, $\sqrt[6]{5}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\sqrt[6]{5}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $-\sqrt[6]{5}$, $\sqrt[6]{5}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $\sqrt[6]{5}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. То су тачке на кружници полупречника $\sqrt[6]{5}$ и између којих је централни угао $\frac{\pi}{3}$, као на датој слици.♦

Задаци 9.2.3.

1. Какав је међусобни положај сљедећих тачака у комплексној равни: $a + ia$, $-a + ia$, $a - ia$, $-a - ia$?

2. Комплексни број $z = x + iy$ представити у коплексној равни, ако је:
а) $(3 + 5i)\,z = 21 + i$; **б)** $(2 - 7i)\,z = 13 + 34i$; **в)** $(4 + 3i)\,z = 2 - 11i$.

3. Који подскупови су у комплексној равни дефинисани релацијама:
а) $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$; **б)** $-1 \le \mathrm{Re}(z) \le 1$; **в)** $1 < |z| < 3$; **г)** $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{4}$.

4. Наћи реални и имагинарни дио, модул, аргумент и коњуговани број за:
$3i$, $-\pi/2$, $\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$, $1+\frac{i}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{1-i\sqrt{3}}$, $\frac{1+i}{1-i}$, $(2 - 3i)(1 + i)$, $\left(\frac{1}{1+i\sqrt{3}}\right)^2$.

5. Дата је тачка z_1. Гдје се налазе тачке z ако је: **а)** $|z - z_1| = 1$; **б)** $\arg(z\cdot z_1) = \pi$.

6. Гдје леже тачке z ако је утврђено да је:
а) $|z + 1| = 2$; **б)** $|z - i| < 1$; **в)** $\arg(z - 1) = \pi/4$; **г)** $\left|\frac{1}{z}\right| \le r$.

7. Одредити све вриједности бројева $\sqrt[3]{i}$, $\sqrt{2-3i}$, $\sqrt[5]{1+i}$, $\sqrt[4]{-1}$.

V Квадратна једначина

Прво историјски познато рјешење квадратне једначине помиње се у Берлинском папирусу из периода Средњег царства (око 2160-1700. г.п.н.е.) античког Египта. Своди се на рјешење система $x^2 + y^2 = 100$, $y = \frac{3}{4}x$.

Много касније су и антички Грци су били у стању рјешавати квадратне једначине, геометријским методама. У Еуклидовим елементима (око 325-270. г.п.н.е.) се три проблема односе на квадратне једначине. Грчки математичар Диофант (око 210-290. г.п.н.е.) у свом дјелу Аритметика је рјешавао квадратне једначине, али налазећи само једно рјешење, чак и када су оба била позитивни бројеви.

Са друге стране, неке конструкције рјешења налазимо и код математичара старе Индије из периода око 500. год. п.н.е. али немамо правих писаних доказа.

10. Рјешавање квадратне једначине

Квадратном једначином сматрамо полиномску једначину другог реда са једном непознатом.

Основни облик квадратне једначине је:

$$ax^2+bx+c=0,$$

гдје је x непозната, а коефицијенти a, b c су константни бројеви при чему је $a \neq 0$.

Канонски облик квадратне једначине је:

$$a(x-\alpha)^2+\beta=0,$$

гдје је $a \neq 0$, $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ и $\beta = \dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

Експлицитни облик квадратне једначине, односно **формула** за рјешење квадратне једначине у основном облику је:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Рјешење квадратне једначине је сваки број x са којим је квадратна једначина тачна једнакост.

10.1. Растављање на факторе

Квадратну једначину

$$ax^2+bx+c=0, \text{ гдје је } a \neq 0,$$

у неким случајевима рјешавамо погађањем, растављањем на факторе у облик

$$(m_1x+n_1)(m_2x+n_2)=0, \text{ гдје } m_1m_2 \neq 0.$$

Множењем и сређивањем ове добили бисмо

$$m_1m_2x^2+(m_1n_2+n_1m_2)x+n_1n_2=0,$$

одакле је $a=m_1m_2$, $b=m_1n_2+n_1m_2$ и $c=n_1n_2$.

Производ бројева је нула када је било који од тих бројева нула, па имамо два рјешења:

$$x_1=-\frac{n_1}{m_1}, \qquad x_2=-\frac{n_2}{m_2}.$$

Када је то могуће, **погађамо** бројеве чији производ је ac, а збир b. У овим ознакама, то су m_1n_2 и n_1m_2, па квадратни трином $ax^2+bx+c=0$ разлажемо на

четири сабирка $ax^2 + m_1n_2x + n_1m_2x + c = 0$ која затим по паровима растављамо на факторе.
Посебно је лаган случај када је $a = 1$ и када имамо невелика цјелобројна рјешења дате једначине.

Задаци 10.1.1.

1. Наћи сва рјешења једначина:
а) $\frac{3x-2}{3x-2} = 1$; **б)** $0 \cdot \sqrt{5x-13} = 0$; **в)** $\frac{5}{2x-1} = 0$; **г)** $4x^2 + 9 = 0$; **д)** $(x+2)(x-3)(x+4) = 0$.

2. Провјерити да ли су еквивалентне једначине: $(x^2 - 1) \cdot \frac{1}{x+1} = 0$ и $x - 1 = 0$.

Растављањем на факторе ријешити квадратне једначине:

3. а) $x^2 - 5x + 6 = 0$; **б)** $x^2 + 12x - 13$; **в)** $x^2 - 2x - 15 = 0$; **г)** $x^2 + 15x + 56 = 0$.

4.
а) $x^2 + 0{,}1x - 0{,}02 = 0$; **б)** $x^2 + 2x + \frac{3}{4} = 0$;
в) $x^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0$; **г)** $x^2 + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{6}}{4} = 0$.

5. а) $2x^2 - 13x + 15 = 0$; **б)** $3x^2 - 19x - 14 = 0$; **в)** $4x^2 + 9x + 2 = 0$; **г)** $5x^2 - 21x + 4 = 0$.

6. Формирати квадратну једначину чија су рјешења:
а) -13 и 5; **б)** $-\frac{2}{5}$ и $-\frac{3}{5}$; **в)** $2 \pm 3i$; **г)** $2 + i$ и $1+3i$.

7. Збир два броја је 16, а збир њихових квадрата је 130. Који су то бројеви?

8. Правоугли троугао има обим 24 и хипотенузу 10 центиметара. Наћи његове катете.

10.2. Свођење на канонски облик

Квадратну једначина у основном облику

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ гдје је } a \neq 0,$$

еквивалентна је низу сљедећих израза, од којих је посљедњи тзв. канонски облик

$$\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + \frac{c}{a} = 0,$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0,$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0,$$

$$\text{односно } a(x-\alpha)^2 + \beta = 0,$$

$$\text{гдје је } (a \neq 0)\ \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ и } \beta = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Квадратну једначину у канонском облику можемо рјешити растављањем на факторе (разлика квадрата).

Задаци 10.2.1.

Свести на канонски облик и рјешити једначине:

1. а) $x^2+2x+2=0$; **б)** $x^2-4x+1=0$; **в)** $x^2+3x-1=0$; **г)** $x^2-5x+7=0$.

2. а) $2x^2-3x+4=0$; **б)** $-3x^2+4x+5=0$; **в)** $\frac{1}{2}x^2+3x+2=0$; **г)** $-\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-9=0$.

3.

а) $(x-1)(x-2)+(x-2)(x-3)+(x-3)(x-4)=0$;

б) $(x+1)(x+2)+(x+2)(x+3)+(x+3)(x+4)=0$;

в) $\frac{x+1}{x+3}+\frac{2x-1}{x^2-9}=\frac{x-1}{x-3}+\frac{x+2}{x+3}$;

г) $\frac{2x+3}{x^2+x-6}+\frac{2x-3}{x^2+5x+6}=\frac{4}{x^2-4}$.

4. Дужина правоугаоника је за 6 cm већа од његове ширине. Површина правоугаоника је 91 cm^2. Наћи димензије правоугаоника.

5. Хипотенуза правоуглог троугла је за 9 m дужа од краће катете. Разлика дужина катета је 7 m. Колике су странице троугла?

6. Производ два узастопна непарна броја је за 1 мањи од њиховог петероструког збира. Који су то бројеви?

7. Наћи три узастопна цијела броја таква да је њихов троструки збир једнак производу већа два.

8. Два аутомобила напуштају раскрсницу, један на сјевер, други на исток. Када је ауто који иде на сјевер прешао 24 km, растојање између аута је било за четири километра дуже од троструког растојања које је прешао ауто у правцу истока. Наћи растојање између аута у том тренутку.

10.3. Рјешење формулом

Квадратну једначина у основном облику

$$ax^2+bx+c=0\text{, гдје је } a\neq 0,$$

ако је и је $b\neq 0$ и $c\neq 0$ називамо **потпуна**, а ако је $b=0$ или $c=0$ називамо **непотпуна**.

Из квадратне једначине у канонском облику лако слиједе слиједећа рјешења:

$$x_{12}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

У даљем тексту подразумијевамо да су коефицијенти a, b и c реални бројеви, мада је из начина добијања формуле рјешења јасно она једнако важи и за коефицијенте који нису реални.

Примјер 10.3.1. Једначине $amx^2=(a^2-m^2)x+am$ и $am(y^2+1)=a^2y+m^2y$ имају два једнака и два супротна корјена.

Доказ. Дате су једначине $amx^2-(a^2-m^2)x-am=0$ и $amy^2-(a^2+m^2)y+am=0$, чији су корјени

$$x_{12}=\frac{(a^2-m^2)\pm\sqrt{(a^2-m^2)^2+4a^2m^2}}{2am} \text{ и } y_{12}=\frac{(a^2+m^2)\pm\sqrt{(a^2+m^2)-4a^2m^2}}{4am},$$

односно $x_{12} = \dfrac{(a^2 - m^2) \pm \sqrt{(a^2 + m^2)^2}}{2am}$ и $y_{12} = \dfrac{(a^2 + m^2) \pm \sqrt{(a^2 - m^2)^2}}{2am}$, па је

$x_{12} \in \{\dfrac{a}{m}, -\dfrac{m}{a}\}$ и $y_{12} \in \{\dfrac{a}{m}, \dfrac{m}{a}\}$. Дакле, тврђење је тачно.♦

Дискриминанта квадратне једначине је (реалан) број под корјеном формуле:

$$D = b^2 - 4ac.$$

Када је $D > 0$ једначина има два различита, реална рјешења.
Када је $D = 0$ једначина има једно реално, двоструко рјешење.
Када је $D < 0$ једначина има коњуговано комплексна рјешења.

Примјер 10.3.2. Наћи сва рјешења једначина:

а) $x^2 + (1+i)x + i = 0$; **б**) $x^2 = 1 + i\sqrt{3}$.

Рјешење. а) $x_{12} = \dfrac{-1-i \pm \sqrt{(1+i)^2 - 4i}}{2} = \dfrac{-1-i \pm \sqrt{(1-i)^2}}{2} = \begin{cases} -i \\ -1 \end{cases}$, и заиста

$(-i)^2 + (1+i)(-i) + i = 0$, односно $(-1)^2 + (1+i)(-1) + i = 0$.

б) $x_{12} = \sqrt{1 + i\sqrt{3}}$ = (в. Примјер 9.2.2.) $\sqrt{2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)} = \sqrt{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)}$

$= \sqrt{\rho}\left(\cos\dfrac{\theta}{2} + i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$, гдје су $\rho = 2$ и $\theta = 60° + k\cdot 360°$, а k је произвољан цијели број, па је $x_{12} = \sqrt{2}\big(\cos(30° + k\cdot 180°) + i\sin(30° + k\cdot 180°)\big)$. Мада $k \in$ Z, имамо само два различита рјешења, рецимо за $k = 0$ и $k = 1$, а то су

$x_1 = \sqrt{2}(\cos 30° + i\sin 30°) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\dfrac{1}{2}\right)$ и $x_2 = \sqrt{2}(\cos 210° + i\sin 210°)$

$= \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\cdot\dfrac{1}{2}\right)$, што је лако провјерити.♦

Задаци 10.3.3.

1. Рјешити и дискутовати рјешења непотпуних квадратних једначина:

а) $ax^2 = 0$; **б**) $ax^2 + c = 0$; **в**) $ax^2 + bx = 0$.

2. Рјешити квадратне једначине формулом:

а) $6x^2 - x - 2 = 0$; **б**) $4x^2 - 8x + 5 = 0$;

в) $ix^2 - (1+i)x + \dfrac{1}{2} = 0$; **г**) $-3x^2 - (2-3i)x + 1 + i = 0$;

д) $x^2 + 2ix - i\sqrt{3} = 0$; **ђ**) $x^2 - 2ix + i = 0$.

3. Ако је једно рјешење једначине $4x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 3a + 2 = 0$ једнако 1, одредити могуће вриједности параметра a.

4. Наћи сва рјешења једначина:

а) $\dfrac{5x+9}{4(2x-3)} = \dfrac{3x^2+4x+12}{4x^2-9}$; **б**) $\dfrac{1}{2x-1} + \dfrac{2}{(2x-1)^2} = 0$.

5. У једначинама $x^2 - 2mx + m^2 - n^2 = 0$ и $(m^2 - n^2)y^2 - 2my + 1 = 0$ рјешења прве су реципрочна рјешењима друге. Доказати.

6. Једначине $x^2 - 4pqx + q^2(4p^2 - r^2) = 0$ и $y^2 - 2qry - q^2(4p^2 - r^2) = 0$ имају два једнака и два супротна корјена. Доказати.

7. Рјешити једначине:
а) $2x^2-|x+1|-3=0$; **б)** $3x^2+|x-1|-6=0$;
в) $|x+1|\cdot|x-2|=4$; **г)** $\left|x^2-4|x|+2\right|=1$.

8. Наћи вриједност параметра тако да квадратна једначина има двоструко рјешење:
а) $(4p+1)x^2-(5p-4)x+1=0$; **б)** $(q+1)x^2+(5q-3)x+3q=0$.

9. Испитати природу рјешења зависно од реалних параметра p и q:
а) $(p+3)x^2-2(p+1)x+p+5=0$; **б)** $(1-q)x^2+2(1+q)x-2-q=0$.

10. Рјешити тригонометријске једначине:
а) $2\cos^2 x+3\cos x+1=0$; **б)** $2\sin^2 x-7\sin x+3=0$; **в)** $2\cos^2-\sin x=1$;
г) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x-1=\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,x+1$; **д)** $|\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x|=2$; **ђ)** $2(\sin x+\cos x)^2-1=0$.

11. Рјешити слиједеће задатке свођењем на квадратну једначину.

а) Наћи бројеве чији збир је 21 а производ 90.

б) Годишњи профит предузећа дат је функцијом $P(x)=x^2+25x+150$, гдје је x број продатих производа током датог временског периода, а $P(x)$ остварени профит. Ако је профит био 300 КМ. Колико производа је продато?

в) Обим правоугаоника је 50 јединица дужине, а површина 144 квадратних. Наћи димензије правоугаоника.

г) Једна отворена кутија запремине 1083 литре је направљена од квадратне подлоге исјецањем по једног квадрата станице 3 dm са сваког ћошка. Наћи димензије оригиналне подлоге.

д) Конструктор хоће да постави стазу око базена за пливање, који је димензија 25 x 32 метара. Стаза треба бити исте ширине свугдје око базена. Колико широка би требала бити стаза ако конструктор има 310 квадратних метара материјала?

ђ) Ученици једног одјељења на излету договорили су се да свако пошаље по једну разгледницу осталим ученицима. Ако је послато 992 разгледница, колико је било ученика?

12. Смјеном, рјешити једначине:
а) $\left(2x^2+3x\right)^2-34\left(2x^2+3x\right)+280=0$ **б)** $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$;
в) $y^2+y+y^{-1}+y^{-2}=4$; **г)** $4y^2+12y+12y^{-1}+4y^{-2}=47$;
д) $u^3(8u^3+1)-1=8u^3$; **ђ)** $(u+2)^3+\dfrac{1}{(u+2)^3}=8{,}125$;
е) $2v^3-7v^2+7v-2=0$; **ж)** $15v^3+19v^2-19v-15=0$.

13. Рјешити једначине:
а) $x-\sqrt{13-x^2}=-1$; **б)** $x+\sqrt{5-x^2}=1$.

14. Наћи сва рјешења система једначина:
а) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ 2x+3y=13; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2+y^2=61 \\ xy=30; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{6}; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=12 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=2 \\ x^2+4xy+3y^2=1; \end{cases}$ **ђ)** $\begin{cases} -x^2-3xy+4y^2=2 \\ x^2-xy+y^2=-1. \end{cases}$

10.4. Виетове формуле

За квадратну једначину у основном облику

$$ax^2+bx+c=0,\ (a\neq 0)$$

при чему је

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

вриједе **Виетове формуле**:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Француски математичар аматер и астроном Виете (*François Viète*, 1540 – 1603.) доказао је овај теорем за полиноме произвољног степена, али само за позитивне корјене (*Vieta*, 1579.). Општи теорем је доказао француски математичар Гирард (*Albert Girard*, 1595 – 1632.).

Задаци 10.4.1.

1. Формирати квадратну једначину са реалним коефицијентима и a = 1, када су познати њени корјени x_1, x_2:

а) $x_1 = 5$, $x_2 = -3$; **б)** $x_1 = -\frac{3}{5}$, $x_2 = \frac{2}{5}$; **в)** $x_1 = -\frac{4}{7}$, $x_2 = -2$;

г) $x_1=2-\sqrt{3}$, $x_2=2+\sqrt{3}$; **д)** $x_{12}=7\pm 4i$; **ђ)** $x_{12}=\dfrac{m\pm n}{1\mp mn}$.

2. Помоћу Виетових формула погодити корјене одговарајућих квадратних једначина и раставити на факторе дате триноме:

а) $x^2+11x+24$; **б)** $x^2-21x+110$; **в)** $x^2+9x-52$;

г) $2x^2-3x+1$; **д)** $2x^2-3x-2$; **ђ)** $-6x^2-5x+6$.

3. У једначини $x^2+(s+1)x+s-1=0$ одредити реални параметар s тако да је збир квадрата њених рјешења једнак 19.

4. У једначини $x^2-(v-1)x+v+1=0$ одредити реални параметар v тако да је збир реципрочних вриједности њених рјешења 21.

5. Не рјешавајући квадратну једначину $x^2+px+q=0$ чија су рјешења x_1 и x_2 одредити вриједности слиједећих израза. Посебно, наћи те вриједности за p = -5, q = 6.

а) $x_1^3\cdot x_2^3$; **б)** $x_1^2x_2^2-x_1^3x_2^3$; **в)** $x_1^2+x_2^2$;

г) $x_1^3+x_2^3$; **д)** $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$; **ђ)** $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$.

6. Провјерити да ли су слиједећи бројеви рјешења једначине $x^2+x+1=0$:

а) $x_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ и $x_2 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$; **б)** $x_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ и $x_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

7. Дата је једначина $x^2 - x + 1 = 0$. Не рјешавајући је формирати квадратну једначину $y^2 + py + q = 0$ чија су рјешења са датом једначином у релацијама $y_1 = x_2 + \frac{1}{x_1}$ и $y_2 = x_1 + \frac{1}{x_2}$.

8. Дата је једначина $x^2 + x - 1 = 0$. Не рјешавајући је формирати квадратну једначину по *y*, чија су рјешења: $y_1 = \frac{x_1 - 1}{x_1 + 1}$, $y_2 = \frac{x_2 - 1}{x_2 + 1}$.

9. Дата је квадратна једначина $x^2 - 2(m-1)x + 1 - m^2 = 0$. Одредити реалан параметар *m* тако да је:

а) рјешења једначине су реална и једнака;
б) једно рјешење је нула;
в) рјешења су бројеви супротног знака;
г) једно рјешење је двоструко веће од другог.

10. Дата је квадратна једначина $(m+1)x^2 - 2(m+3)x + 9 = 0$. Одредити реалан параметар *m* тако да је:

а) рјешења једначине су реална и једнака;
б) рјешења су бројеви истог знака;
в) рјешења су бројеви супротног знака;
г) рјешења су реципрочни бројеви.

11. За дату једначину наћи везу између рјешења која не зависи од параметара:

а) $2(m+1)x^2 - 3mx - 2m + 1 = 0$; **б)** $(m-1)x^2 - (2m-1)x + \frac{2}{3}m = 0$;

в) $mx^2 - 3(m-1)x - \frac{2}{3}m = 0$; **г)** $(m+2)x^2 - \frac{3}{4}(m+2)x + 2m - 1 = 0$.

12. Наћи квадратну једначину и одредити за које вриједности параметра λ та једначина има реална рјешења, ако рјешења x_1 и x_2 задовољавају услове:
а) $x_1 + x_2 + x_1x_2 = 0$ и $x_1x_2 - (x_1 + x_2) = \lambda$; **б)** $x_1 + x_2 - x_1x_2 = \lambda$ и $x_1x_2 + \lambda(x_1 + x_2) = 0$.

13. У једначини $(2k+1)x^2 + (k+2)x - 2k + 1 = 0$ одредити параметар *k* тако да је:

а) $(x_1 + x_2)^3 \geq 0$; **б)** $x_1^2 + x_2^2 < 2$; **в)** $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 2$.

14. Двије славине пуне базен за *m* часова, а једна славина може сама да напуни исти базен за *n* часова брже од друге. За које вријеме свака од славина може сама напунити базен, ако је:

а) *m* = 2, *n* = 3 часова; **б)** *m* = 6, *n* = 5 часова;
в) *m* = 12, *n* = 7 часова; **г)** *m* = 4, *n* = 15 часова.

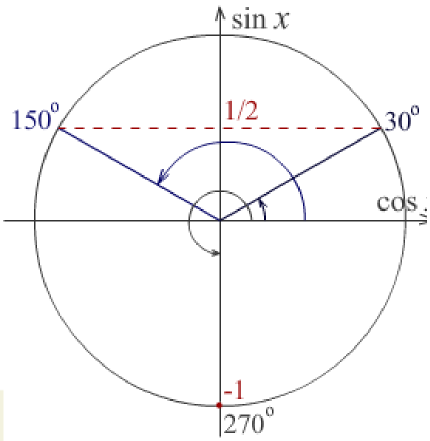
10.5. Примјери примјене

Наведени су само неки примјери примјена квадратне једначнине и то прво лакши случајеви у тригонометрији, а затим мало тежи задаци у алгебри уопште.

Примјер 10.5.1. Наћи сва рјешења по x једначине $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

Рјешење: Растављањем на факторе, добијамо $(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$, што је тачно ако је

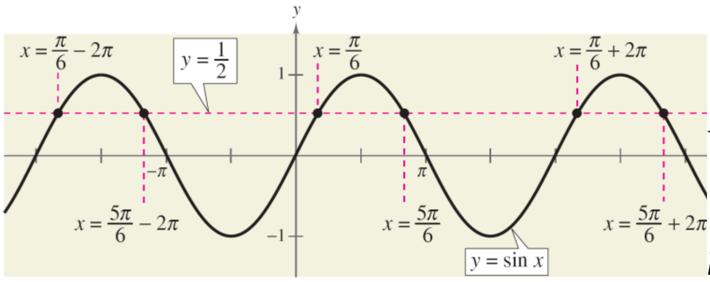
$2\sin x - 1 = 0$ или $\sin x + 1 = 0$.



У првом случају $\sin x = \frac{1}{2}$, односно

$x_1 = 30° + k_1 \cdot 360°$ или $x_2 = 150° + k_2 \cdot 360°$, гдје су k_1 и k_2 произвољни цијели бројеви, као на слици десно и доле. Та иста рјешења у радијанима су

$\frac{\pi}{6} + 2k_1\pi$ и $\frac{5\pi}{6} + 2k_2\pi$.

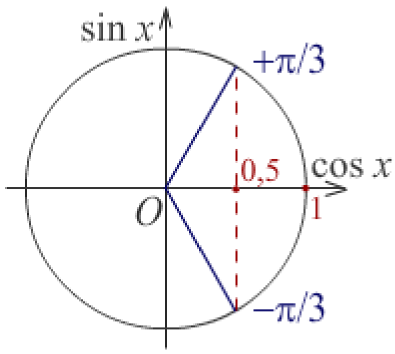


У другом случају је $\sin x = -1$, односно $x_3 = 270° + k_3 \cdot 360°$, гдје је и k_3 произвољан цијели број. Трећи скуп углова изражен у радијанима је $\frac{3\pi}{2} + 2k_3\pi$.♦

Примјер 10.5.2. Рјешити једначину у датом интервалу $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Рјешење: Користимо основни тригонометријски идентитет $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и добијамо

квадратну једначину $2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x - 3 = 0$, односно $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$, тј. $2t^2 - 3t - 1 = 0$ по непознатој $t = \cos x$. Њена рјешења су



$$t_{12} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ 0{,}5. \end{cases}$$

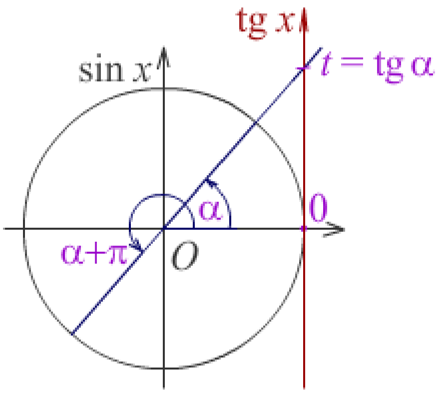
У горњем случају имамо $\cos x = 1$, тада имамо једно рјешење $x_1 = 0$. У доњем случају, $\cos x = 0{,}5$, имамо у датом интервалу два рјешења: $x_{23} = \pm\frac{\pi}{3}$.♦

Примјер 10.5.3. Рјешити и дискутовати једначину $\text{tg}\,x + \text{ctg}\,x = a$. Посебно, наћи сва рјешења за $a = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Рјешење: *Први начин*. Користимо основни тригонометријски идентитет $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$. Сређивањем добијамо квадратну једначину $t^2 - at + 1 = 0$, гдје је $t = \operatorname{tg} x$. Њена рјешења су

$$t_{12} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Ако је $a < 2$, једначина нема реалних рјешења. Када је a = 2, постоји само једно рјешење по $t = \operatorname{tg} x = 1$, одакле рјешења $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, гдје је k произвољан цијели број. Ако је $a > 2$,



тада имамо два (бесконачна) скупа рјешења за углове, која сљеде из $t_{12} = \operatorname{tg} x_{12} = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$.

Посебно, за $a = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$, имамо

$$t_{12} = \frac{\frac{4}{\sqrt{3}} \pm \frac{4}{\sqrt{3}}}{2} = \begin{cases} 2{,}30940... \\ 0 \end{cases}$$

што у горњем случају даје углове $x_1 = 66{,}59° + k \cdot 180°$, а у доњем $x_2 = k \cdot 180°$, за произвољан цјели број k. Множећи угао изражен у степенима са π/180, тј. са 0,017453... добијамо исти угао у радијанима.

Други начин. Користимо идентитете $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ и $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. Множећи дату једначину са $\sin x \cos x$ добијамо $\sin^2 x + \cos^2 x = a \sin x \cos x$, а отуда $\sin 2x = \dfrac{2}{a}$, итд.♦

Тригонометријске функције секанс и косеканс[10] су дефинисане једнакостима:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ и } \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

Примјер 10.5.4. Рјешити по x једначину $\sec^2 x - 2\tan x = 4$.

Рјешење: Из тригонометријског идентитета $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$ сљеди $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$. Растављањем на факторе добијамо $(\operatorname{tg} x - 3)(\operatorname{tg} x + 1) = 0$. Прва рјешења су када је први фактор нула, тј. $\operatorname{tg} x = 3$, други скуп рјешења сљеди из $\operatorname{tg} x = -1$. Из прве једначине, у радијанима добијамо основно рјешење $x_1 = \operatorname{arctg}(3) \approx 1{,}249046$ а из друге $x_2 = \operatorname{arctg}(-1) \approx 0{,}785398$. Затим, добијамо сва остала рјешења $x = x_k \pm n\pi$, гдје $k \in \{1, 2\}$, а $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$.♦

Могуће је и обрнуто, примјена тригонометрије у рјешавању квадратне једначине.

Примјер 10.5.5. Свака квадратна једначина по x може се писати

$$ax^2 + bx \pm c = 0,$$

[10] в. 1.2. Јединична кружница

гдје су оба a и c позитивни, а b може бити и позитиван и негативан. Уводећи смјену

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}}\,\mathrm{tg}\theta$$

и множећи једначину са $\cos^2\theta$ добијамо

$$\sin^2\theta + \frac{b}{\sqrt{ac}}\sin\theta\cos\theta \pm \cos^2\theta = 0 .$$

Користећи идентитете $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ или $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$ за предзнаке плус и минус, па $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$, добијамо редом

$$\mathrm{tg}\, 2\theta_1 = +\frac{2\sqrt{ac}}{b} \text{ и } \sin 2\theta_2 = -\frac{2\sqrt{ac}}{b} .$$

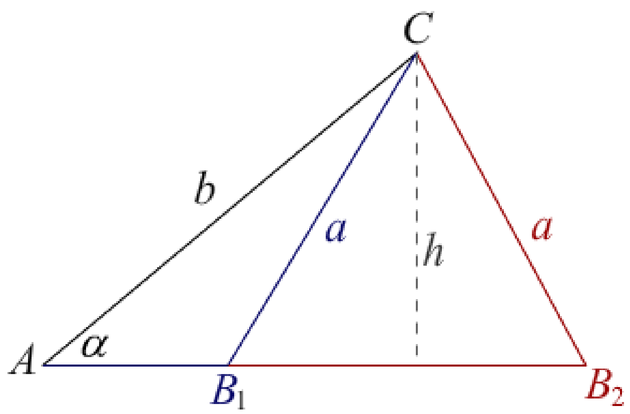
Отуда такође рјешења квадратне једначине, дефинисана угловима. Имагинарни корјени се могу добити само због друге, када је синус угла по апсолутној вриједности већи од један, тј. када је $b^2 - 4ac < 0$, што нам је и познато од раније.♦

Квадратне једначине имају примјену и у примјени тригонометрије у геометрији.

Примјер 10.5.6. Дат је троугао ABC, страницама $a = BC$, $b = AC$ и углом α у тјемену A. Наћи дужину треће странице уопште, и посебно за a = 14, b =16, α = 40°.

Рјешење: Користимо косинусну теорему $a^2 = b^2 + x^2 - 2bx\cos\alpha$, гдје је $x = AB$ непозната страница. Отуда квадратна једначина $x^2 - 2bx\cos\alpha + b^2 - a^2 = 0$, чија су рјешења

$$x_{12} = b\cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha} .$$



То је опште рјешење.

Једначина нема реалних рјешења када је њена дискриминанта негативна, односно када је

$$a^2 - b^2\sin^2\alpha < 0,$$

тј. када је $a < b\sin\alpha = h$, гдје је h висина из тјемена c. На слици лијево видимо да тада нема једнакокраког троугла B_1B_2C. Када је дискриминанта нула, тј. $a = h$, тада постоји само један, правоугли троугао ($B_1 = B_2$).

Када је дискриминанта позитивна, тада постоје два рјешења, троуглови са траженом страницом AB_1 и AB_2, чије су дужина наведених x_{12}.

У посебном случају, имамо рјешења $x_{12} = 16\cdot\cos 40° \pm \sqrt{14^2 - 16^2\cdot\sin^2 40°}$, тј.

$$x_{12} \approx 12{,}25671 \pm 9{,}49879.$$

Приближно, једно рјешење је 9,50 друго је 2,76.♦

Сљедећи су примјери примјене квадратне једначине у алгебри.

Примјер 10.5.7. Рјешити једначину

$$\frac{x^2 + ax + a^2}{x^2 - ax + a^2} = \frac{a^2}{x^2} .$$

Рјешење: Знамо да из $m : n = p : q$ сљеди $(m + n) : (m – n) = (p + q) : (p – q)$. Отуда еквивалентан облик дате једначине

$$\frac{2(x^2+a^2)}{2ax} = \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}.$$

Затим, сређивањем налазимо $x^2+ax-a^2=0$, те $x_{12} = \frac{-a\pm a\sqrt{5}}{2}$.♦

Примјер 10.5.8. Рјешити једначину

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = a(a-1).$$

Рјешење: Заграде пакујемо у квадрат бинома

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + 2\cdot\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x}{x-1} + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - 2\cdot\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x}{x-1} = a\cdot(a-1),$$

$$\left(\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}\right)^2 - \frac{2x^2}{x^2-1} = a(a-1),$$

$$\left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2 - \frac{2x^2}{x^2-1} - a(a-1) = 0.$$

То је квадратна једначина, са рјешењима

$$\frac{2x^2}{x^2-1} = \frac{1\pm\sqrt{(2a-1)^2}}{2}, \text{ односно}$$

$$\frac{2x^2}{x^2-1} = a \text{ или } \frac{2x^2}{x^2-1} = 1-a.$$

Прва једначина, за $a \le 0$ или $a > 2$ има два реална рјешења $x_{12} = \pm\sqrt{\frac{a}{a-2}}$. Друга једначина, за $a < -1$ или $a \ge 1$ има такође два реална рјешења $x_{34} = \pm\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}$.

Према томе, рјешења дате једначине су:

x_1, x_2, x_3, x_4 за $a \notin [-1, 2]$; x_1, x_2 за $a \in [-1, 0]$;
нема рјешења за $a \in (0, 1)$; x_3 и x_4 за $a \in [1, 2]$.♦

Примјер 10.5.9. Рјешити једначину

$$\sqrt[3]{(2-x)^2} - \sqrt[3]{(2-x)(7+x)} + \sqrt[3]{(7+x)^2} = 3.$$

Рјешење: Смјеном $u = \sqrt[3]{2-x}$ и $v = \sqrt[3]{7+x}$ имамо прво $u^3+v^3=9$, а затим $u^2-uv+v^2=3$. Према томе, имамо $(u^3+v^3)/(u^2-uv+v^2)$ = 9/3 = 3, односно имамо систем једначина $u^2-uv+v^2=3$ и $u+v=3$ чије су рјешења (2, 1) и (1, 2). Коначно, рјешења дате једначине су $x_1 = -6$ и $x_2 = 1$.♦

Квадратна једначину облика $x^2+px+q=0$ има рјешења $x_{12} = \frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$, помоћу којих се лако провјеравају Виетове формуле: $x_1+x_2=-p$ и $x_1x_2=q$. Обратно, познајући Виетове формуле и без познавања појединих рјешења лако за свако k = 1, 2, 3, … налазимо производ $x_1^k x_2^k = q^k$. Није много теже провјерити и сљедеће збирове:

1. $x_1 + x_2 = -p$,
2. ${x_1}^2 + {x_2}^2 = p^2 - 2q$,
3. ${x_1}^3 + {x_2}^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = -p(p^2 - 3q)$.

Међутим, могуће је наћи и општи збир, за произвољно $k \in 1, 2, 3, \ldots$.

Став 10.5.10. Ако су x_1 и x_2 рјешења квадратне једначине $x^2 + px + q = 0$, тада за збирове $S_n = x_1^n + x_2^n$, важи рекурентна релација[11]

$$S_n + pS_{n-1} + qS_{n-2} = 0,\ n \ge 2.$$

Доказ: Из $x_1^2 + px_1 + q = 0$ и $x_2^2 + px_2 + q = 0$, множењем прве једнакости са x_1^{n-2} а друге са x_2^{n-2} и сабирањем добијамо

$$(x_1^n + x_2^n) + p(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) + q(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}) = 0, \text{ тј.}$$

$$S_n + pS_{n-1} + qS_{n-2} = 0,$$

што је и требало доказати.♦

Из ове формуле, познајући два претходна члана низа S_n добијамо сљедећи. Примјетимо да је $S_0 = x_1^0 + x_2^0 = 2$, а знајући да је $S_1 = x_1 + x_2 = -p$, сада лако налазимо

$$S_2 = -pS_1 - qS_0 = p^2 - 2q,$$

$$S_3 = -pS_2 - qS_1 = -p^3 + 3pq,$$

$$S_4 = p^4 - 4p^2q + 2q^2,$$

$$S_5 = -p^5 + 5p^3q - 5pq^2,$$

$$S_6 = p^6 - 6p^4q + 9p^2q^2 - 2q^3,$$

$$S_7 = -p^7 + 7p^5q - 14p^3q^2 + 7pq^3, \ldots .$$

Примјер 10.5.11. Израчунати $\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)^7 + \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)^7$.

Рјешење: Нека су $x_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$ и $x_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$ рјешења квадратне једначине $x^2 + px + q = 0$. Тада је $p = -x_1 - x_2 = -1$ и $q = x_1x_2 = -3$. Из $S_7 = x_1^7 + x_2^7 =$ $-p^7 + 7p^5q - 14p^3q^2 + 7pq^3$ сљеди $\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)^7 + \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)^7$ = $-(-1)^7 + 7(-1)^5(-3) - 14(-1)^3(-3)^2 + 7(-1)(-3)^3 = 343$.♦

Примјер 10.5.12. Не развијајући степене одредити вриједност израза

$$\frac{1}{(1+\sqrt{2})^k} + \frac{1}{(1-\sqrt{2})^k},\ k \in \mathbf{N}.$$

Рјешење: Бројеви $x_{12} = 1 \pm \sqrt{2}$ су рјешења једначине $x^2 - 2x - 1 = 0$. Из доказаног става сљеди $S_{k-2} = S_k - 2S_{k-1}$, јер је p = -2 и q = -1. Замјењујући k редом добијамо

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{1-\sqrt{2}} = S_{-1} = S_1 - 2S_0 = 2 - 2\cdot 2 = -2,$$

[11] Ђуро Курепа, *Виша алгебра I*, Завод за издавање уџбеника СРС, Београд, 1969.

$$\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}+\frac{1}{(1-\sqrt{2})^2}=S_{-2}=S_0-2S_{-1}=2-2\cdot(-2)=6,$$
$$\frac{1}{(1+\sqrt{2})^3}+\frac{1}{(1-\sqrt{2})^3}=S_{-3}=S_{-1}-2S_{-2}=2-2\cdot 6=-14,$$
$$\frac{1}{(1+\sqrt{2})^4}+\frac{1}{(1-\sqrt{2})^4}=S_{-4}=S_{-2}-2S_{-3}=6-2\cdot(-14)=34,$$
$$\frac{1}{(1+\sqrt{2})^5}+\frac{1}{(1-\sqrt{2})^5}=S_{-5}=S_{-3}-2S_{-4}=-14-2\cdot 34=-82, \dots .$$

Примјер 10.5.13. Знајући збирове $\sum_{k=1}^{K} k^n$ за $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ израчунати збир
$$3^n+7^n+11^n+\dots+(4k-1)^n .$$

Рјешење: За $n = 2$. Помоћу формуле $x_1^2+x_2^2=p^2-2q$ налазимо
$$1^2+2^2=3^2-2\cdot1\cdot2,$$
$$3^2+4^2=7^2-2\cdot3\cdot4,$$
$$5^2+6^2=11^2-2\cdot5\cdot6,$$
$$\dots$$
$$(2K-1)^2+(2K)^2=(4K-1)^2-2(2K-1)\cdot 2K .$$
Пребацујући негативне сабирке лијево и сабирајући ове једнакости добијамо
$$3^2+7^2+11^2+\dots+(4K-1)^2=\sum_{k=1}^{2K}k^2+2\sum_{k=1}^{K}(2k-1)\cdot 2K$$
$$=\sum_{k=1}^{2K}k^2+4\left(2\sum_{k=1}^{K}k^2-\sum_{k=1}^{K}k\right).$$
Знамо да је $1+2+3+\dots+K=\frac{K(K+1)}{2}$ и $1^2+2^2+3^2+\dots+K^2=\frac{K(K+1)(2K+1)}{6}$, па имамо
$$3^2+7^2+11^2+\dots+(4K-1)^2 =$$
$$=\frac{1}{6}\cdot 2K(2K+1)(2\cdot 2K+1)+4\left(\frac{2}{6}K(K+1)(2K+1)-\frac{1}{2}K(K+1)\right)$$
$$=\frac{K}{6}(32K^2+24K-2).$$
Слично добијамо збирове за $n = 3, 4, \dots$.♦

Задаци 10.5.14. 1. Рјешити тригонометријске једначине:

i. $5(\sin x+\cos x)^2-12(\sin x+\cos x)+7=0$;

ii. $\operatorname{tg}x+2\operatorname{ctg}x=3$;

iii. $\operatorname{tg}(x^2-x)\operatorname{ctg}2=1$.

2. За које вриједности параметра λ једначина $\sin^2 x+\lambda\cos x\lambda=0$ има рјешења?

3. Рјешити и дискутовати једначину $\sin(3x)=\lambda\sin x$.

4. Наћи углове чији тангенс и синус дефинишу рјешења једначине $2x^2+3x+4=0$.

5. Наћи непознату страницу троугла задатог елементима:

i. $a = 6$, $b = 7$, $\alpha = 35°$; ii. $a = 39$, $b = 40$, $\beta = 70°$.

Странице a, b, c тоугла ABC су наспрам истоимених тјемена у којима су углови α, β, γ.

6. Рјешити једначину $\frac{x^2+2x+4}{x^2-2x+4}=\frac{x^2}{4}$.

7. Рјешити једначину $\left(\frac{x}{ax+b}\right)^2+\left(\frac{x}{ax-b}\right)^2=c$, $a\neq 0$.

8. Рјешити једначину $\sqrt[3]{(18-x)^2}-\sqrt[3]{(18-x)(10+x)}+\sqrt[3]{(10+x)^2}=7$.

9. Не развијајући биноме одредити вриједност израза $(1+\sqrt{2})^{-2000}+(1-\sqrt{2})^{-2000}$.

10. На три различита начина израчунати вриједност $(1+i\sqrt{3})^{1999}+(1-\sqrt{3})^{1999}$.

11. Наћи збир $(n+1)^k+(n+2)^k+...(2n)^k$, $k\in\{1, 2, \dots, 6\}$.

12. Доказати да је за природан број n израз:

i. $1^{2000}+2^{2000}+...+n^{2000}$ дјељив са $n+1$;

ii. $1^{2000}+2^{2000}+...+(2n)^{2000}$ дјељив са n.

VI Квадратна функција

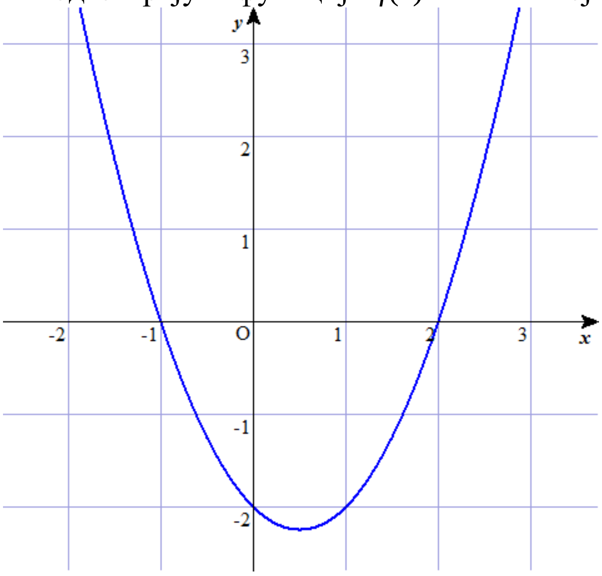
Око 2000. г.п.н.е. су египатски, кинески и вавилонски инжењери знали наћи површину квадрата помоћу дужина његових страница. Знали су да треба три пута више бала сјена ако се странице квадратнног амбара утростручe. Штавише, знали су израчунавати површине сложенијих фигура, попут правоугаоника или Т облика.

11. Основни облик

Основни облик квадратне функције је

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

гдје су $a \neq 0$, b и c реални коефицијенти, а њен граф у Декартовом правоуглом систему координата је **парабола**. Овдје нам није интересантан случај када је a = 0 и одговарајућа функција $f(x) = bx + c$ која није квадратна и чији граф је права.



На слици лијево је граф параболе

$$y(x) = x^2 - x - 2,$$

гдје је $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$.

Примјетимо да:

- за сваки реални број x постоји неки број $y(x)$;
- тачке -1 и +2 на апсциси којима пролази граф, су и нуле одговарајуће квадратне једначине $y(x) = 0$;
- тачке графа између нула и тачке изван нула су са различите стране апсцисе.

Да је граф квадратне функције заиста парабола лако је доказати, ако знамо нешто о параболама.

Примјер 11.0.1. Параболе чије гране иду горе или доле су дате једначином ($p \neq 0$):

$$(x-h)^2 = 4p(y-k).$$

Доказати да је ова једначина еквивалентна некој квадратној функцији.

Доказ. Дата једначина након сређивања постаје:

$$y = \frac{1}{4p}x^2 - \frac{h}{2p}x + \frac{h^2}{4p} + k.$$

Упоређивањем са основним обликом квадратне функције добијамо:

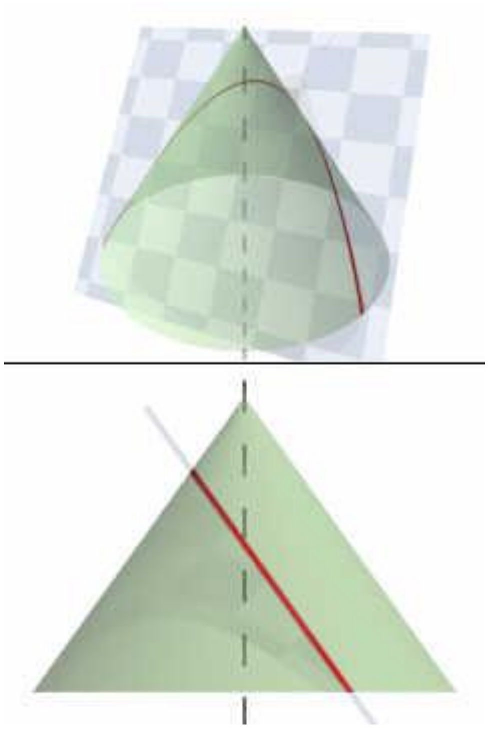
$$a = \frac{1}{4p}, \; b = -\frac{h}{2p}, \; c = \frac{h^2}{4p} + k.$$

Дакле, дакле граф параболе је заиста граф квадратне функције. Обратно, налазимо:

$$p = \frac{1}{4a}, \; h = -\frac{b}{2a}, \; k = c - \frac{b^2}{2a}.$$

Према томе важи и обратно, граф квадратне функције је граф параболе.♦

Антички грчки математичар Менаехмус (Μέναιχμος, 380–320. г.п.н.е.), пријатељ филозофа Платона, истраживао је конусне пресјеке и открио је параболу. Други антички грчки филозоф, Аполониус (Ἀπολλώνιος, 262-190. г.п.н.е.) дао је параболи име. Један од посљедњих великих грчких математичара, Папус (290-350. г.) нашао је фокус и директрисе параболе.



Парабола је геометријско мјесто тачака у равни једнако удаљених од дате тачке коју називамо жижа, или фокус параболе и дате праве коју називамо директриса параболе.

Отуда назив параболе (г. παραβολή), што у преводу са грчког значи једнако растојање.

Када конус, праву купу пресјечемо равнином паралелном са једном њеном изводницом, добијени пресјек је парабола.

11.1. Примјери парабола

1. примјер парабола су два вањска потпорна лука моста на горњој слици, средишњи лук се рефлектује на површини воде у кружницу.

2. примјер је Мек Доналдсов лого, на слици доле лијево. То је примјер двију парабола једне поред друге, чије су једначине облика:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k).$$

Оса *x* иде средином оба лука, слова М. Параметар *p* је негативан број, јер гране ових парабола иду доле. Жиже (фокуси) су испод лукова, а директриса ових парабола је права изнад.

3. Примјер је Смјешко, на слици горе десно. Осмјех на смјешку је облика параболе. То је парабола сличне једначине са претходном, осим што је параметар *p* овдје позитиван. Жижа ове параболе је негдје око носа, а права директриса иде испод браде.

4. Примјер, фарови на аутомобилу. Параболично огледало са тачкастим извором свјетлости у жижи одбија свјетлост паралелним снопом зрака.

5. примјер, лук у граду Сент Луис у америчкој савезној држави Мисури. То је примјер негативне параболе, чије гране иду доле.

6. примјер је сателитска антена. Инжењери користе формулу параболе

$$(x-h)^2 = 4p(y-k),$$

да би дизајнирали и конструисали сателитске антене јер парабола савршено концентрише у своју жижу паралелан сноп електромагнетних зрака које долазе из свемира.
Рисивер антене се поставља у жижу параболе. Примјетите да је ту управо обрнут ток у односу на сијалицу у аутомобилском фару.

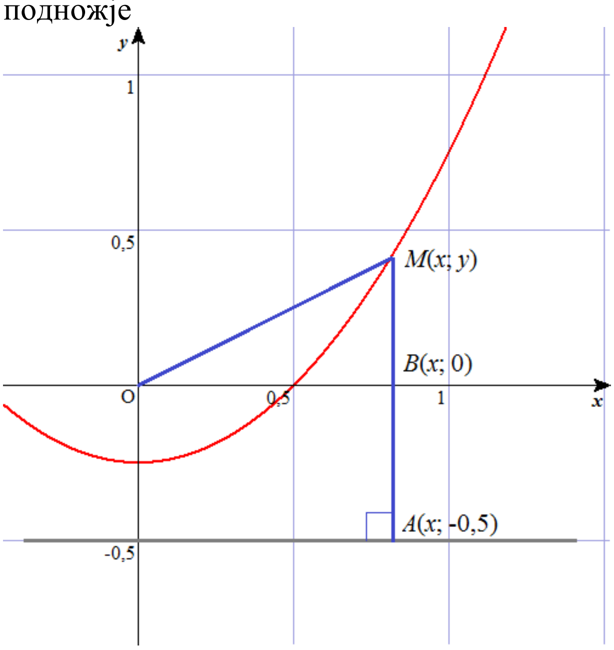
7. примјер, путања топовског ђулета. Галилео Галилеј (1564-1642.) је нашао да би сваки пројектил испаљен из топа летио по тачно параболичној путањи када не би било отпора ваздуха.

Од тада разумјемо зашто вода из водоскока формира облик параболе, слика лијево горе. Зато је и најбољи дизајн тобогана параболични (*Intimidator by Bolliger* & *Mabillard*, 2009), слика горе десно.

8. примјер. Геометријско мјесто тачака *M* једнако удаљених од исходишта координатног система *O* и праве паралелне апсциси са ординатом $y = -0{,}5$ је квадратна функција

$$y = x^2 - \frac{1}{4}.$$

Доказ. Дато је $OM = MA$, гдје су тачке $O(0, 0)$, $M(x, y)$ и $A(x; -0{,}5)$. Тачка *A* је подножје



нормале из *M* на праву паралелну *x*-оси која пролази *y*-осом кроз тачку $-0{,}5$. Иста нормала сјече апсцису у тачки $B(x, 0)$.

Из правоуглог троугла *OBM* слиједи

$$OM^2 = OB^2 + BM^2 = x^2 + y^2,$$

односно $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$. То је била Питагорина теорема. Са друге стране, лако видимо да је $MA = |y + 0{,}5|$.

Отуда и према датој једнакости је

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |\,y + 0{,}5\,|.$$

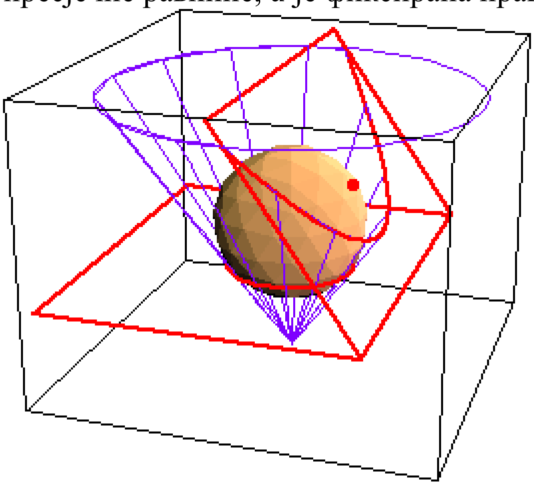
Квадрирањем и сређивањем налазимо

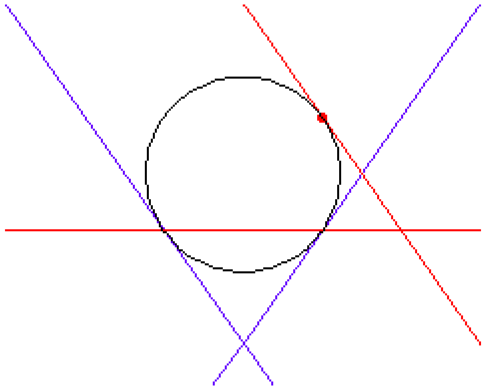
$$y = x^2 - \frac{1}{4}. \blacklozenge$$

Тачка O је жижа, а права $y = -0{,}5$ директриса добијене параболе.

9. примјер, Данделинова сфера. Пресјек праве купе и равнине паралелне са једном њеном изводницом је парабола.

Доказ. Рецимо, P је произвољна тачка пресјека, F је фиксирана тачка дате пресјечне равнине, d је фиксирана права у равни.





У купу упишимо сферу која тангира купу по кругу c. Она додирује дату раван у тачки F. Видјећемо да је F фокус конусног пресјека и да је одговарајућа директриса права d, по којој се сјеку дата раван и раван круга c.
Нека је Q тачка пресјека праве кроз P паралелне оси купе и равнине круга c. Дакле, PQ је окомито на раван круга c.
Нека је A тачка пресјека праве која пролази кроз P и врх купе са равни круга c.
Нека је PD окомица на праву d. Тада су PA и PF као тангенте на сферу из тачке P једнаке, тј.
$PA = PF$.
Из правоуглог троугла PQA имамо $PQ = PA \cdot \cos\alpha$.
Из правоуглог троугла PQD имамо $PQ = PD \cdot \cos\theta$.
Наведене три једначине дају

$$PA \cdot \cos\alpha = PD \cdot \cos\theta, \text{ затим}$$

$$PF \cdot \cos\alpha = PD \cdot \cos\theta, \text{ те}$$

$$PF = PD \cdot \frac{\cos\theta}{\cos\alpha}.$$

Угао између равни круга c и (најближе) изводнице купе је α. Угао између равни круга c и дате пресјечне равни је θ. Како је дата пресјечна раван паралелна изводници купе, углови α и θ су једнаки, па је $PF = PD$.♦

10. Задаци

1. Једначину дате параболе свести на основни облик:

а) $(x-1)^2 = 8(y-3)$; **б)** $(x+1)^2 = 4(3-y)$;
в) $(2+x)^2 = 6(5-y)$; **г)** $(2-x)^2 = 2(y-5)$.

2. Наћи једначину параболе ако су дати фокус и директриса:

а) $F(0, 1)$, $y = -1$; **б)** $F(0, -1)$, $y = 1$;
в) $F(1, -2)$, $y = 3$; **г)** $F(-1, 2)$, $y = -3$.

3. Наћи фокус и директрису параболе:

а) $y = x^2$; **б)** $y = -x^2$;
в) $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}$; **г)** $y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}$.

11.2. Нуле, знак и ток параболе

Домен функције је скуп свих реалних бројева x за које је $f(x)$ реалан број. Домен квадратне функције ($a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$):

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

је читав скуп реалних бројева.

Нуле функције су вриједности реалне промјенљиве x које рјешавају једначину $f(x) = 0$, односно то су мјеста гдје граф функције пресјеца, или додирује X-осу. Нуле квадратне функције су рјешења, корјени одговарајуће квадратне једначине

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Знак функције у тачки апсцисе x је позитиван, односно негативан, ако је ордината те тачке $y = f(x)$ позитивна, односно негативна.

Примјетимо да у триному дате квадратне функције за велике бројеве x доминира први сабирак. Рецимо, за квадратну функцију $f(x) = x^2 - x - 2$, имамо редом:

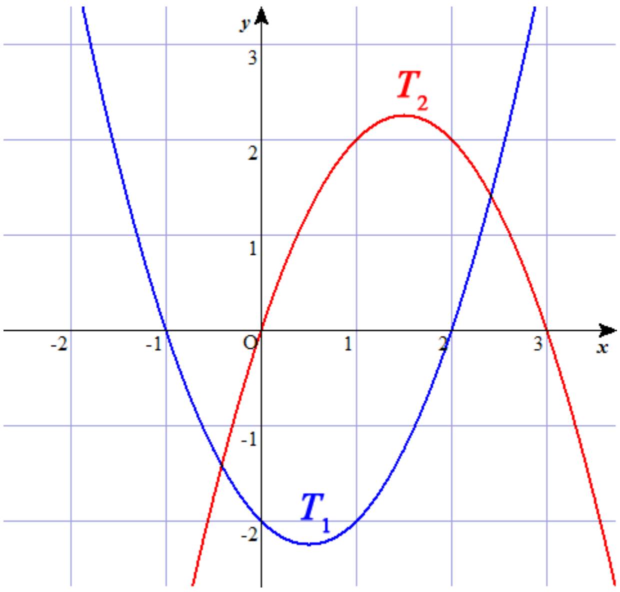
- $f(10) = 100 - 10 - 2 = 82$,
- $f(100) = 10\,000 - 100 - 2 = 9\,898$,
- $f(1000) = 1000\,000 - 1000 - 2 = 998998 \approx 1000^2$,
- …
- $f(x) = x^2 - x - 2 \approx x^2$, када $x \to \pm\infty$.

Зато што квадрат реалног броја не може бити негативан, у случају великих бројева x знак квадратне функције је знак коефицијента a. Како је $a \neq 0$, у наведеном триному за апсолутно велике бројеве x, тј. за $x \to \pm\infty$ слиједи:

$$a > 0 \;\Rightarrow\; f(x) \to +\infty, \text{ и } \; a < 0 \;\Rightarrow\; f(x) \to -\infty$$

и обрнуто, знак функције f за велике бројеве x је знак првог коефицијента a. Посљедица тога су само двије могућности графа квадратне функције:

- када је $a > 0$ тада гране (руке) параболе иду горе;
- када је $a < 0$ тада гране параболе иду доле.



На слици десно, у истом координатном систему имамо оба случаја:

$$y_1(x) = x^2 - x - 2,$$
$$y_2(x) = -x^2 + 3x.$$

Прва (плава) је функција чије нуле су -1 и 2, а гране иду горе; друга (црвена) је функција са нулама 0 и 3 и гранама ка доле.

Зато што је парабола симетрична, зато су тјемена ових парабола тачно између нула. Тјеме квадратне функције означавамо са $T(\alpha, \beta)$ гдје је

$$\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}, \beta = f(\alpha).$$

Из Виетових формула

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

лако налазимо опште координате тјемена $T(\alpha, \beta)$ параболе

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \ \beta = -\frac{D}{4a},$$

гдје је $D = b^2 - 4ac$ дискриминанта одговарајуће квадратне једначине. Посебно, за дате функције, имамо:

$$T_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right), \ T_2\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right).$$

Ток параболе се мјења у њеном тјемену. У датом случају имамо:

- за x од $-\infty$ до ½ граф прве параболе (ордината y_1) опада од $+\infty$ до $-9/4$, а за х од ½ до $+\infty$ расте од $-9/4$ до $+\infty$;
- за x од $-\infty$ до 3/2 граф прве параболе (ордината y_2) расте од $-\infty$ до 9/4, а за х од 3/2 до $+\infty$ опада од 9/4 до $-\infty$.

Тачка промјене тока је тјеме, односно екстремна вриједност функције.

- **Минимум** је тјеме испред којег функција пада, а затим расте.
- **Максимум** је тјеме испред којег функција расте, а затим пада.

У датом случају, T_1 је минимум, а T_2 је максимум функције.
Кодомен, или антидомен функције је скуп свих вриједности ординате функције. У датом случају, за прву и другу функцију имамо

$$y_1 \in \left(-\infty, -\frac{9}{4}\right] \ \text{ и } \ y_2 \in \left[\frac{9}{4}, +\infty\right),$$

а кодомени су скупови $K_1 = \left(-\infty, -\frac{9}{4}\right]$ и $K_2 = \left[\frac{9}{4}, +\infty\right)$.

Задаци 11.2.1.

1. Дату квадратну функцију свести на основни облик:

а) $2(x-y)^2 + 3(y+2x)^2 = 5y^2 + 8xy - y$;

б) $0{,}5(x+2y)^2 + 0{,}5(y-2x)^2 = 2{,}5y^2 + 2y - x$;

2. У истом координатном систему нацртати графове функција:

а) $y = x^2$, $y = 2x^2$ и $y = 0{,}5x^2$;

б) $y = 1 - x^2$, $y = 1 - 2x^2$ и $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$;

3. Испитати промјене и скицирати графике функција:

а) $y = -x^2 + 3$;

б) $y = x^2 - 3$;

в) $y = x^2 - 6x + 9$;

г) $y = -x^2 + 6x - 5$.

4. Наћи једначину квадратне функције, ако њен граф сјече апсцису у тачкама x_1 и x_2, а ординату у тачки y_0. Када је дата функција позитивна?

а) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ и $y_0 = 1$;

б) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ и $y_0 = -1$.

5. Наћи једначину квадратне функције, ако њен граф има тјеме у тачки $T(\alpha, \beta)$, и сјече ординату у тачки y_0. Наћи нуле функције.

а) $\alpha = 1$, $\beta = -1$ и $y_0 = 2$;

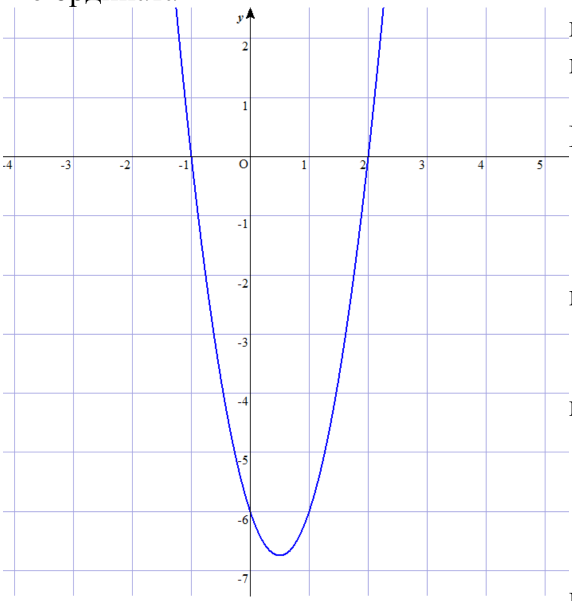
б) $\alpha = 1$, $\beta = 2$ и $y_0 = 1$.

6. Наћи једначину квадратне функције, ако њен граф садржи дате тачке. Наћи екстремну вриједност функције.
а) A(-1,-1), B(0, 0) C(1, 2); **б)** A(-2,-2), B(-1, 2) C(0, 0).

7. Дата је квадратна функција: **а)** $y = ax^2 + 2x + 1$; **б)** $y = x^2 + bx + 1$.
i) Наћи непокретну тачку функције;
ii) Наћи геометријско мјесто тјемена функције.

11.3. Неједначине

Ордината квадратне функције $y = ax^2 + bx + c$, за a > 0 је позитивна када је x изван интервала нула (x_1, x_2), а негативна унутар тог итервала. Обрнуто, ако је a < 0 ордината



исте функције је за x унутар интервала нула позитивна, а изван негативна.

Примјер 11.3.1. Функција

$$y = 3x^2 - 3x - 6$$

има нуле у тачкама

$$x_1 = -1,\ x_2 = 2,$$

па је

$$y < 0 \text{ за } x \in (-1, 2),$$
$$y = 0 \text{ за } x \in \{-1, 2\},$$
$$y > 0 \text{ за } x \notin [-1, 2],$$

као што се види на слици лијево.

Примјер 11.3.2. Функција

$$y = -3x^2 - 3x + 6$$

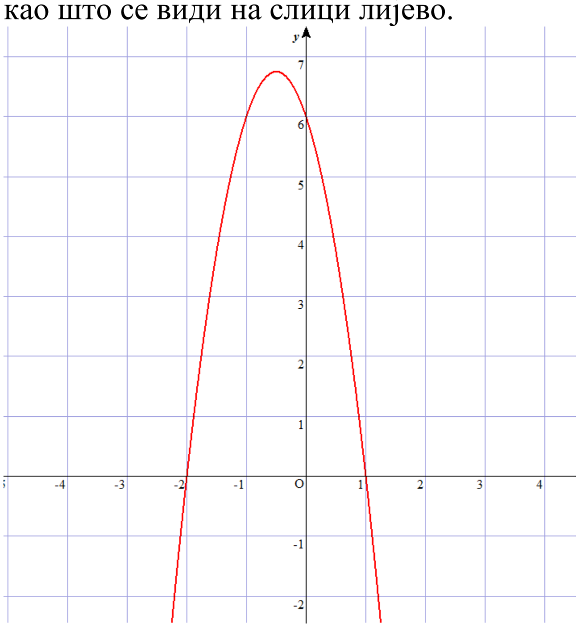
има нуле у тачкама

$$x_1 = -2,\ x_2 = 1,$$

па је

$$y < 0 \text{ за } x \notin [-2, 1],$$
$$y = 0 \text{ за } x \in \{-2, 1\},$$
$$y > 0 \text{ за } x \in (-2, 1),$$

као што се види на слици десно.



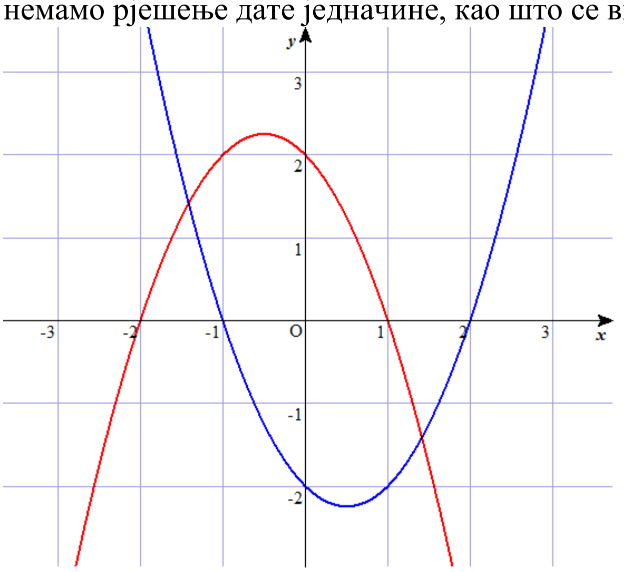
Примјер 11.3.3. Наћи сва рјешења неједначине

$$(x^2 - x - 2)(-x^2 - x + 2) \ge 0.$$

Рјешење. У истом координатном систему скицирамо графове оба фактора, функције

$$y_1 = x^2 - x + 2 \text{ и } y_2 = -x^2 - x + 2.$$

Нуле прве функције су -1 и 2, а друге -2 и 1. На интервалу (-∞, -2) ординате ових функција су са различитих страна x-оса, што значи да су супротног знака, а то значи да је њихов производ за такве х-ове негативан.
Такође, за $x \in (-1, 1)$ биће $y_1 < 0$ и $y_2 > 0$, што значи да је производ $y_1 \cdot y_2 < 0$ и немамо рјешење дате једначине, као што се види на слиједећој слици.



Напротив, за $x \in (-2, -1)$ ординате обе функције су са исте, горње стране апсцисе, што значи да је њихов производ позитиван.

Такође, за $x \in (1, 2)$ биће $y_1 < 0$ и $y_2 < 0$, што значи да је $y_1 \cdot y_2 > 0$ па су одговарајући х-ови рјешња дате неједначине.

Због „производ ≥ 0" биће рјешења и нуле функција.

Дакле, тражена рјешења су

$$x \in [-2, -1] \cup [1, 2].♦$$

На примјер, неједначину облика

$$f_1(x) \geq f_2(x)$$

преводимо у еквивалентан облик

$$f_1(x) - f_2(x) \geq 0$$

затим је растављамо на (квадратне) факторе и рјешавамо као у претходном примјеру (11.3.3.).

Задаци 13.3.4. Наћи сва рјешења неједначина:

1. а) $2x^2 - 16x + 30 < 0$; **б)** $-3x^2 - 12x - 9 \leq 0$.

2. а) $(x + x^2)(x^2 - x + 1) \geq 0$; **б)** $(x - x^2)(x^2 + x + 1) > 0$.

3. а) $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - x + 1} \geq 0$; **б)** $\dfrac{-x^2 - x + 2}{x^2 + x + 1} > 0$.

4. а) $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 5x + 4} \geq 0$; **б)** $\dfrac{3 + 4x + x^2}{2 - x - x^2} \leq 0$.

5. а) $\dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - x + 1} < 3$; **б)** $\dfrac{-x^2 - 2x + 3}{x^2 + x + 1} \leq 5$.

6. а) $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x - 3} \geq 1$; **б)** $\dfrac{-x^2 - x + 2}{x^2 + 2x - 8} > -1$.

12. Канонски облик

Канонски облик квадратне функције је

$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta,$$

гдје су $a \neq 0$, α и β реални коефицијенти.
Квадрирањем и сређивањем добијамо израз

$$y = ax^2 - 2\alpha a x + a\alpha^2 + \beta,$$

који упоређивањем са основним обликом квадратне функције

$$y = ax^2 + bx + c$$

даје $b = -2\alpha a$, $c = a\alpha^2 + \beta$, односно

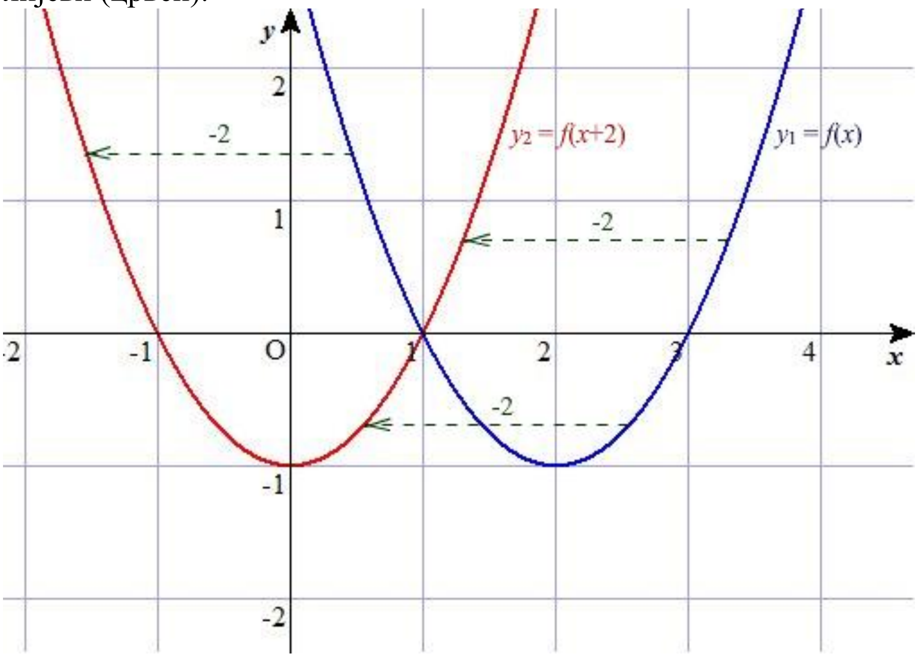
$$\alpha = -\frac{b}{2a},\ b = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Видјели смо (11.2.) да је $T(\alpha, \beta)$ тјеме квадратне функције, минимум ако је $a > 0$, или максимум ако је a < 0.

12.1. Трансформације графова

Примјер 12.1.1. $y = f(x) \to f(x+a)$

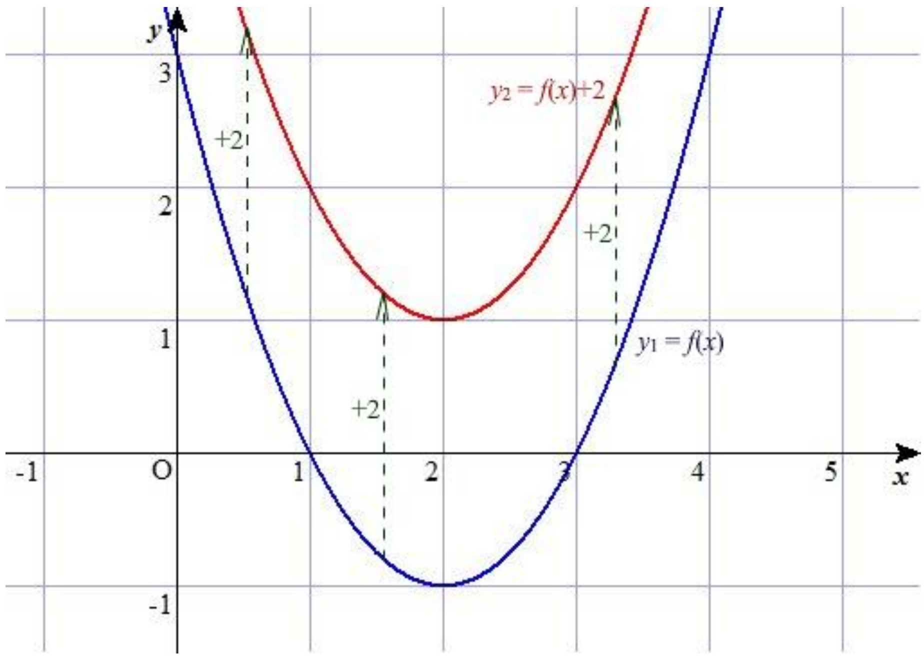
На слици даље дати су графови функција $y_1 = f(x)$ десни (плав) и $y_2 = f(x+2)$ лијеви (црвен).



Додавањем позитивног броја 2 самој функцији $y_1 = f(x)$ добија се нова функција чији граф је транслиран горе (паралелно ординати) за додати број. Обрнуто, додавањем негативног броја функцији добила би се нова функција чији граф је транслиран доле за апсолутну вриједност додатог броја.

Примјер 12.1.2. $y = f(x) \to f(x) + a$

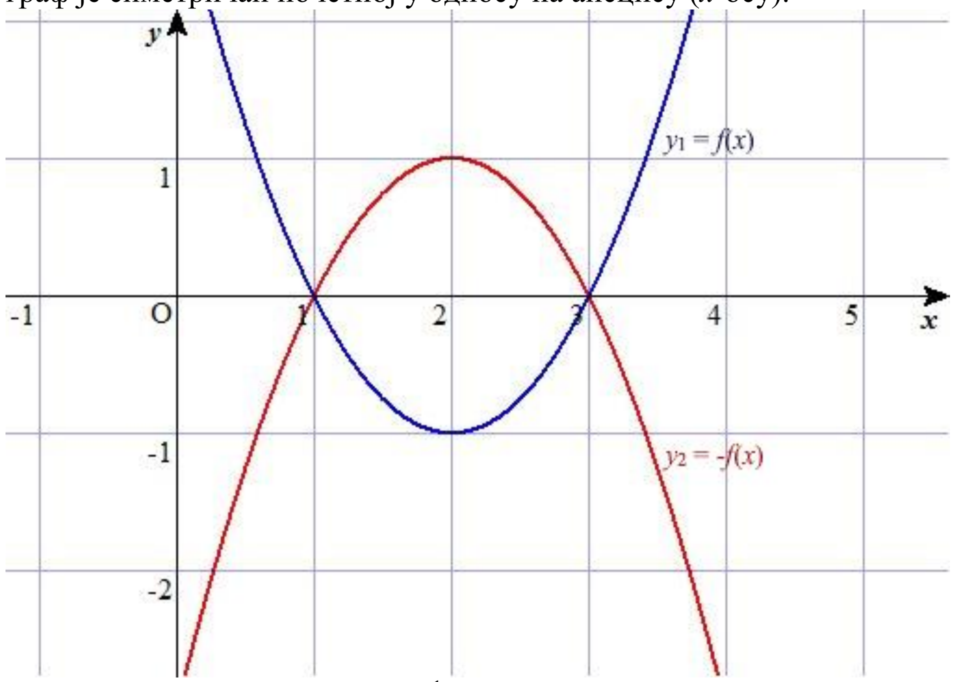
На слиједећој слици су графови функција $y_1 = f(x)$ доњи (плав) и $y_2 = f(x) + 2$ горњи (црвен).



Примјетимо да додавањем броја аргументу (x) транслација је супротно од смјера x-осе, а додавањем броја функцији транслација је сагласно са смјером y-осе.

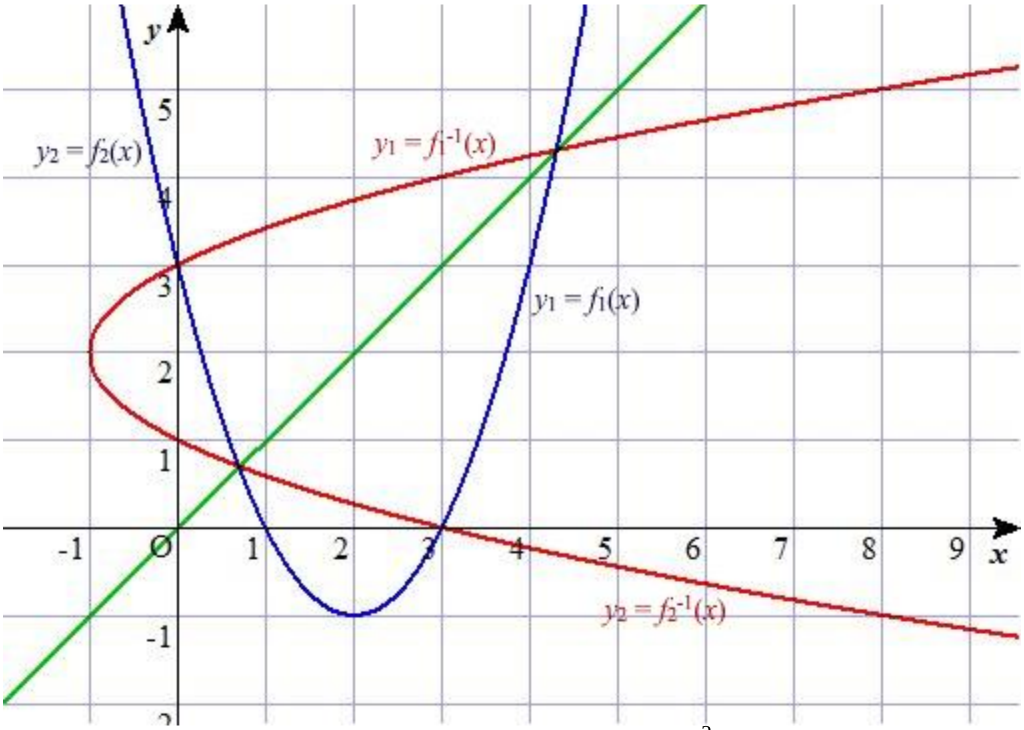
Примјер 12.1.3. $y = f(x) \to -f(x)$

На трећој слици, доле дати су графови функција $y_1 = f(x)$ горњи (плав) и $y_2 = -f(x)$ доњи (црвен). Множењем функције бројем –1 добија се нова функција чији граф је симетричан почетној у односу на апсцису (x-осу).

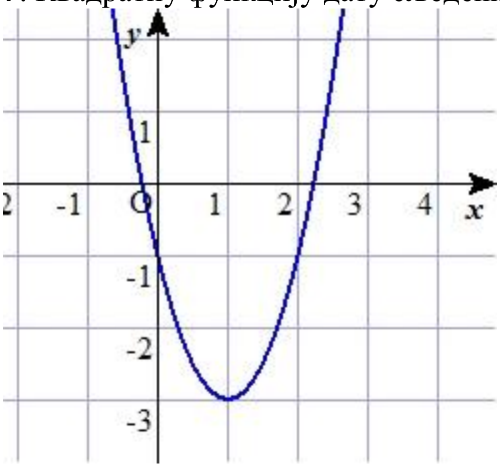


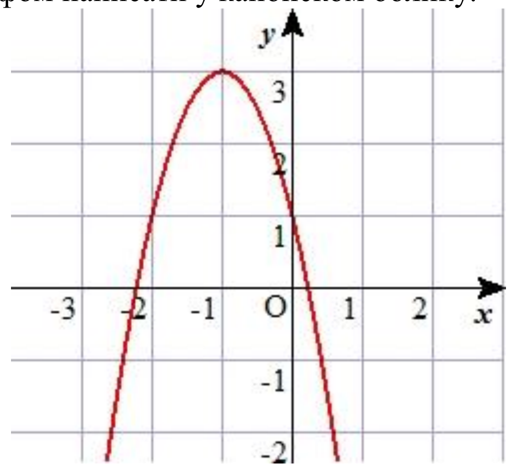
Примјер 12.1.4. $y = f(x) \to -f^{-1}(x)$

На четвртој слици даље, дати су графови функција $y = f(x)$ (плави) и њима инверзних функција $y = f^{-1}(x)$ (црвени), који су осно симетрични у односу на праву $y = x$, тј. симетралу првог и трећег квадранта.



Задаци 12.1.5. Полазећи од графа функције $y = \pm x^2$ скицирати графове.
1. а) $y = (x - 3)^2$; **б)** $y = (x + 1)^2$; **в)** $y = -(x + 3)^2$; **г)** $y = -(x - 1)^2$.
2. а) $y = x^2 - 3$; **б)** $y = x^2 + 1$; **в)** $y = 1 - x^2$; **г)** $y = 3 - x^2$.
3. а) $y = (x + 1)^2 - 3$; **б)** $y = (x - 2)^2 + 1$; **в)** $y = 1 - (x - 1)^2$; **г)** $y = 3 - (x + 2)^2$.
4. а) $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$; **б)** $y = -\sqrt{x}$, $x \geq 0$; **в)** $y = \sqrt{-x}$, $x \leq 0$; **г)** $y = -\sqrt{-x}$, $x \leq 0$.
5. Свести на канонски облик и скицирати граф функције:
а) $y = 2x^2 - 3x + 5$; **б)** $y = -2x^2 + 3x + 4$; **в)** $y = 0,5x^2 - x - 2$; **г)** $y = -0,5x^2 + x + 1$.
6. Испитати промјене и конструисати граф функције:
а) $y = x^2 - 3|x|$; **б)** $y = -x^2 + 2|x|$; **в)** $y = |x^2 - x| + x - 2$; **г)** $y = |x^2 + x| - x + 1$.
7. Квадратну функцију дату сљедећим графом написати у канонском облику.





8. Одредити вриједност параметра $m \in \mathbf{R}$ тако да функција

$$y = (m+1)x^2 + (m-5)|x| + m - 2$$

достиже најмању вриједност за x = 1. Испитати промјене и конструисати граф те функције.
9. Одредити вриједност параметра $n \in \mathbf{R}$ тако да функција

$$y = -nx^2 - (n+2)|x| + n - 1$$

достиже најмању вриједност за x = –1. Испитати промјене и конструисати граф те функције.

10. Одредити геометријско мјесто минимума функције:

а) $y = x^2 - (p-1)x + p(p-2)$; **б**) $y = x^2 + (q-2)x - q(q-1)$.

11. Рјешити функционалну једначину:

а) $f(x+1) = x^2 - 3x + 4$; **б**) $f(x-2) = x^2 + 2x - 3$.

12. Дуж дужине 14 подјелити на два дијела тако да је њихов збир квадрата минималан.

13. Број 12 разложити на два сабирка тако да је збир квадрата првог и двоструког квадрата другог минималан.

14. Одредити најмању вриједност израза

а) $x^6 + y^6$ ако је $x^2 + y^2 = n$; **б**) $x^6 - y^6$ ако је $x^2 - y^2 = m$.

13. Разни задаци

Овдје су задаци који би требали помоћи ученицима у увјежбавању градива из квадратних једначина и функција. Задатак треба пажљиво читати и рјешавати самостално, ако треба и у више покушаја. Тек као посљедњу опцију треба погледати, дио по дио рјешења.

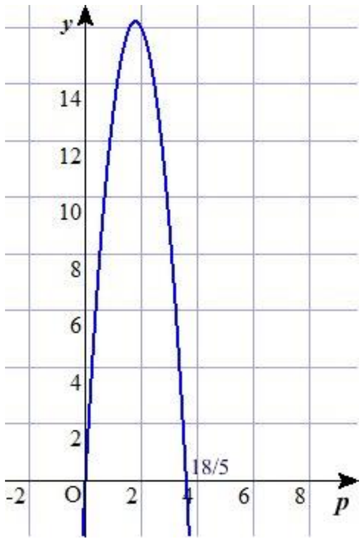
13.1. Квадратна на пријемним

Задаци са квадратним једначинама и квадратним функцијама давани на пријемним испитима на ЕТФ БЛ у периоду од 1982. до 2010.

1. Наћи S ⊂ **R** такав да за сваки број $p \in$ S једначина

$$(p-3)x^2 - 2px + 6p = 0$$

има реална рјешења.



Рјешење. Квадратна једначина са реалним коефицијентима има реална рјешења акко је:

$$D \geq 0 \iff$$
$$b^2 - 4ac \geq 0 \iff$$
$$(-2p)^2 - 4(p-3)6p \geq 0 \iff$$
$$4p^2 - 24p^2 + 72p \geq 0 \;/:4 \iff$$
$$p^2 - 6p^2 + 18p \geq 0 \iff$$
$$-5p^2 + 18p \geq 0 \iff$$

на слици десно је граф параболе на лијевој страни неједнакости, одакле читамо коначно рјешење:

$$p \in [0, \tfrac{18}{5}].\blacklozenge$$

2. Растављањем на факторе, одредити нуле полинома

$$P(x) = 6x^3 - 5x^2 - 2x + 1.$$

Рјешење. $P(x) = 6x^3 - \underline{5x^2} - 2x + 1 = 6x^3 - 6x^2 + \underline{x^2 - 2x + 1} = 6x^2(x-1) + (x-1)^2 =$
$= (x-1)(6x^2 + \underline{x} - 1) = (x-1)(6x^2 + 3x - 2x - 1) = (x-1)[3x(2x+1) - (2x+1)] =$
$= (x-1)(2x+1)(3x-1)$.

Према томе, нуле полинома су $P(x) = 0 \iff (x-1)(2x+1)(3x-1) = 0 \iff$

$x = 1 \lor x = -\frac{1}{2} \lor x = \frac{1}{3} \iff x \in \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}.\blacklozenge$

3. Одредити бар једну опадајућу квадратну функцију која сегмент [-4, -1] пресликава на сегмент [4, 1].

Рјешење. Непозната квадратна функција је $y = ax^2 + bx + c$, (a, b, $c \in \mathbf{R}$ $\wedge$ $a \neq$ 0). Та функција мора пролазити кроз тачке A(-4, 4) и B(-1, 1), крајеве сегмента.

A) $y(-4) = 4 \;\Leftrightarrow\; 4 = a\cdot(-4)^2 + b\cdot(-4) + c \;\Leftrightarrow\; 16a - 4b + c = 4$.

B) $y(-1) = 1 \;\Leftrightarrow\; 1 = a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c \;\Leftrightarrow\; a - b + c = 1$.

Добијамо систем двије линеарне једначине са три непознате, па једну од непознатих (a) узимамо за параметар. Одузимањем једначина и дјељењем са 3 добијамо $5a - b = 1$, отуда $b = 5a$. Смјеном b у лакшу, другу добијамо $c = -4a$. Према томе све параболе које пролазе датим тачкама A и B су дате квадратним функцијама $y = ax^2 + (5a-1)x - 4$, које зависе од само једног параметра a.

Требају нам опадајуће функције, што значи само оне од ових чије тјеме $T(\alpha, \beta)$ није између датих тачака A(-4, 4) и B(-1, 1). Другим ријечима, чија прва координата тјемена је изван x интервала (-4, -1), односно $\alpha \le -4$, или $\alpha \ge -1$.

Како је $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{5a-1}{2a}$, то мора бити $-\dfrac{5a-1}{2a} \le -4$ или $-\dfrac{5a-1}{2a} \ge -1$. Отуда $\dfrac{1+3a}{2a} \le 0$ или $\dfrac{1-3a}{2a} \ge 0$. Ако је $a > 0$ тада само прва од неједначина има рјешења: $a \ge \frac{1}{3}$. Ако је $a < 0$ тада опет, само прва једначина има рјешења $a \in \left[-\dfrac{1}{9}, 0\right)$. Према томе, било која вриједност параметра $a \in \left[-\dfrac{1}{9}, 0\right) \cup (0, +\infty)$ рјешава дати задатак. На примјер, за $a = \frac{1}{4}$ имамо рјешење

$y = \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{4}x + 1$.♦

4. Ријешити систем једначина:

$$x + xy + y = 11,$$
$$x^2y + xy^2 = 30.$$

Рјешење. Дати систем се може записати у сљедећем облику:

$(x+y) + xy = 11,$	$x + y = u$,
$xy\cdot(x+y) = 30$.	$xy = v$.
$u + v = 11,$	$u_1 = 5$, $v_1 = 6$;
$uv = 30$.	$u_2 = 6$, $v_2 = 5$.
$x_1 + y_1 = 5$,	$x_2 + y_2 = 6$,
$x1\cdot y1 = 6$.	$x_2\cdot y_2 = 5$.

Према томе, сва рјешења система су: $(x, y) = \{(5,1), (1,5), (2,3), (3,2)\}$.♦

5. Ријешити неједначину $\dfrac{3}{x-1} > -x$.

Рјешење. Под условом $x \neq 1$, дата неједначина еквивалентна је са

$\dfrac{3}{x-1} + x > 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{x^2 - x + 3}{x-1} > 0 \;\Leftrightarrow$ бројник је увијек позитиван $\Leftrightarrow$ $x - 1 > 0$, тј. рјешења су сви реални бројеви $x > 1$, односно $x \in (1, +\infty)$.♦

6. Ријешити неједначину $(1+x)^3 + 6(x-1)^2 < 4(1+x^3)$.

Рјешење. $(1 + x)^3 + 6(x - 1)^2 < 4(1 + x^3) \;\Leftrightarrow$

$(1 + x)^3 + 6(x - 1)^2 < 4(1 + x)(1 - x + x^2) \Leftrightarrow \underline{(1 + x)}^3 + 6(x - 1)^2 - 4\underline{(1 + x)}(1 - x + x^2) < 0 \Leftrightarrow$
$(1 + x)((1 + x)^2 - 4(1 - x + x^2)) + 6(x - 1)^2 < 0 \Leftrightarrow (1 + x)(-3 + 6x - 3x^2) + 6(x - 1)^2 < 0 \Leftrightarrow$
$-3(1 + x)(1 - 2x + x^2) + 6(x - 1)^2 < 0 \Leftrightarrow -3(1 + x)(x - 1)^2 + 6(x - 1)^2 < 0 \Leftrightarrow$
$-3(x - 1)^2((1 + x) - 2) < 0 \Leftrightarrow -3(x - 1)^3 < 0 \Leftrightarrow (x - 1)^3 > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow$
$x > 1$, тј. $x \in (1, +\infty)$.♦

7. Одредити реалан параметар у датој квадратној једначини тако да за њене корјене x_1 и x_2 вриједи дата једнакост:

1. $x^2 - 3ax + 1 - 2a^2 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 50$;
2. $x^2 - 6ax + 1 - 8a^2 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 50$;
3. $2kx^2 - (4k + 1)x + 1 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 3$;
4. $x^2 - 3ax + a^2 = 0$, $x_1^3 + x_2^3 = 18$;
5. $x^2 - 2(a - 3)x + 11 - 3a = 0$, $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 1$.

8. За које вриједности реалног параметра су оба корјена квадратне једначине:

$$(k - 2)x^2 - 2kx + k - 3 = 0$$

а) позитивна; **б**) негативна?

9. Дате су једначине

$$x^2 + ax + 1 = 0 \text{ и } x^2 + x + a = 0.$$

Одредити све вриједности параметра a за које те једначине имају бар једно исто рјешење.

10. Одредити коефицијенте квадратне једначине $x^2 + px + q = 0$ тако да њени корјени буду p и q.

11. Одредити за коју вриједност реалног параметра k неједнакост

$$x^2 - 2(4k - 1)x + 15k^2 - 2k - 7 > 0$$

вриједи за свако реално x.

12. Рјешити неједначину:

а) $\dfrac{4}{x - 1} \le 5 - x$; **б**) $(x^2 - 4x)^2 \ge 16$;

в) $(x^2 - 2x)^2 \ge 1$; **г**) $\dfrac{3(x - 1)^2 + 6(x - 1) - 9}{2x - 1} \le x$;

д) $\left|\dfrac{3x - 2}{x - 1}\right| \le 2$; **ђ**) $\left|\dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + x + 1}\right| < 2$

13. За које вриједности реалног параметра m су задовољене обе неједнакости

$$-3 < \frac{x^2 + mx - 2}{x^2 - x + 1} < 2.$$

14. Рјешити једначину:

1. $\sqrt{x + 3} - \sqrt{2x - 7} = \sqrt{4x - 9}$;
2. $\sqrt{x + 2} - \sqrt{2x - 9} = \sqrt{4x - 13}$;
3. $\sqrt{x + 4} - \sqrt{2x - 5} = \sqrt{4x - 5}$;

4. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$;
5. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+1}=0$;

15. Рјешити систем једначина:

а)
$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{2},\\ x+y=5.\end{cases}$$

б)
$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{10}{3},\\ x+y=10.\end{cases}$$

13.2. Задаци са такмичења

Задаци у вези са квадратним једначинама и функцијама давани на републичким такмичењима у БиХ од 1960. до 1974. године.

1. За које су све вриједности параметра m корјени једначине
$$(3m+2)x^2+(m-1)x+4m+3=0$$
реални и
a) оба мања од 1,
b) оба већа од 1,
c) један мањи а други већи од 1 ?

Резултат. a) $-1\le m<-\dfrac{2}{3}$, b) $-\dfrac{1}{2}<m\le-\dfrac{23}{47}$, c) $-\dfrac{2}{3}<m<-\dfrac{1}{2}$.♦

2. Функција $y=(k+1)x^2-2(k-1)x+k-5$ за разне вриједности броја k представља разне криве;
a) показати да све те криве пролазе кроз једну исту тачку и одредити координате те тачке;
b) одредити број k тако да крива буде симетрична према оси y;
c) наћи за које виједности броја k обе пресјечне тачке криве са осом x леже десно од исходишта.

Рјешење. **а**) По услову задатка мора за $k_1\neq k_2$ бити
$(k_1+1)x^2-2(k_1-1)x+k_1-5=(k_2+1)x^2-2(k_2-1)x+k_2-5 \iff$
$(k_1-k_2)x^2-2(k_1-k_2)x+k_1-k_2=0 \iff$
$(k_1-k_2)(x-1)^2=0$, одакле због $k_1\neq k_2$ слиједи $x = 1$. Тада је $y = -2$. Дакле, све те криве пролазе тачком $T(1, -2)$.
b) По услову задатка фунција мора бити парна, тј. мора за свако x бити $f(-x) = f(x)$. Отуда $(k+1)x^2+2(k-1)x+k-5=(k+1)x^2-2(k-1)x+k-5$, одакле $4(k-1)x = 0$. Будући да посљедња релација вриједи за свако x то је $k = 1$.
c) По услову задатка је $D \geq 0$, $k + 1 > 0$, $f(0) > 0$, $-\frac{b}{2a} > 0$.
$D = 4(k-1)^2 - 4(k+1)(k-5) = 4(k^2 - 2k + 1 - k^2 - k + 5k + 5) = 4(2k + 6) \geq 0$, тј. $k \geq -3$.
$k + 1 > 0$, тј. $k > -1$. $f(0) = k - 5 > 0$, тј. $k > 5$. $-\frac{b}{2a} > 0$, тј. $\dfrac{2(k-1)}{k+1}>0$, тј. $k > 1$, $k < -1$.
Дакле, $k \geq -3$, $k > -1$, $k > 5$, $k > 1$, што је испуњено за $k > 5$.

Такође имамо $k \geq -3$, $k > -1$, $k > 5$, $k < -1$, што је очигледно немогуће.
Дакле, $k > 5$.♦

3. Доказати да је једначина $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{x-1} = 1$, при чему је $a \neq 0$, $b \neq 0$, еквивалентна са једначином $x^2 - (a^2 + b^2 + 1)x + a^2 = 0$ и да има увијек реална и позитивна рјешења. Написати једначину чија су рјешења реципрочне вриједности последње једначине.

Резултат. $a^2y^2 - (a^2 + b^2 + 1)y + 1 = 0$.♦

4. Корijени квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, чији су коефицијенти a, b, c познати, јесу $x_1 = \cos\alpha$, $x_2 = \cos\beta$. Изразити помоћу a, b, c коефицијенте p и q једначине $y^2 + py + q = 0$ чији су корјени $y_1 = \cos 2\alpha$, $y_2 = \cos 2\beta$.

Резултат. $p = \frac{2a(2c+a) - 2b^2}{a^2}$, $q = \frac{(2c+a)^2 - 2b^2}{a^2}$.♦

5. За израз $\frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$ треба одредити коефицијенте a, b, c, d тако да тај израз за $x = 0$ има вриједност –3, за $x = 1$ и само за ту вриједност нема смисла, и никад нема вриједност 1.

Резултат. $a = c = -2$, $b = -3$, $d = 1$.♦

6. У једначини

$$(a - b - 2)x^2 - 2(a-1)\cdot\sqrt{2}\cdot x + a + b - 2 = 0$$

a и b представљају координате тачке $M(a, b)$ у Декартовом правоуглом координатном систему. Одредити област у којој треба да се налази тачка M, па да за одговарајуће вриједности параметара a и b корјени дате једначине буду: а) реални; б) позитивни.

Резултат.

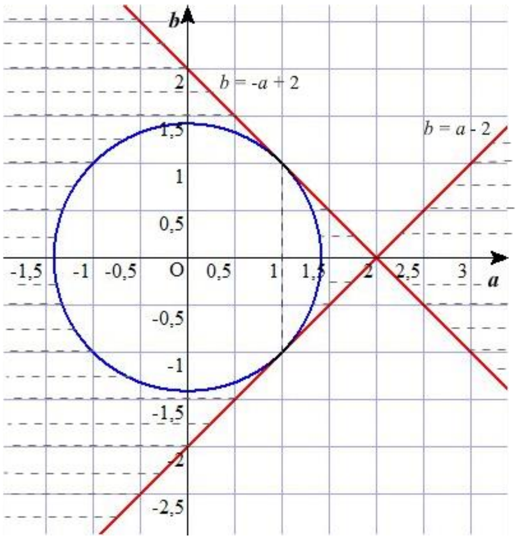
а) За тачке (кружнице)

$$a^2 + b^2 = 2$$

корјени су реални и једнаки, а за тачке (ван тог круга)

$$a^2 + b^2 > 2$$

корјени с реални и различити.



б) За $-\infty < a < -\sqrt{2}$ је:

$$a - 2 < b < -a + 2,$$

за $-\sqrt{2} < a < 1$ је:

$$a - 2 < b < -\sqrt{2 - a^2},\ \sqrt{2 - a^2} < b < -a + 2,$$

за $2 < a < +\infty$ је:

$$2 - a < b < a - 2.$$ ♦

7. У једначини

$$\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t-y} = 1$$

t је непозната, а x и y су промјенљиви реални бројеви (параметри).

а) Показати да ова једначина има два реална различита корјена за све вриједности x и y $(x \neq y)$. Шта ће бити за $x = y$?

б) Ако x и y значе координате тачке M у координатном систему xOy, наћи криву линију по којој треба да се креће M па да корјени t_1 и t_2 дате једначине задовољавају услов

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=1.$$

Рјешење. **а**) Рјешења дате једначине очигледно не могу бити x и y (дијељење нулом). Једначина је еквивалентна са $t^2-(x+y+2)t+xy+x+y=0$. Свако рјешење ове једначине је и рјешење дате, осим $t = x$ и $t = y$. Када би било $t = x$ уврштавањем овдје добијамо $x = y$. Замјеном x са y и обрнуто, једначина се не мјења, што значи ако је $t = y$ опет је $x = y$. То значи да су уз услов $x \neq y$ ова и дата једначина еквивалентне. Дискриминанта ове једначине је $(x-y)^2 + 4$, па та једначина заједно са датом има за све $x \neq y$ два реална и различита рјешења. За $x = y$ дата једначина постаје $\frac{2}{t-x}=1$, одакле је $t = x + 2$. Значи, за $x = y$ дата једначина има само једно рјешење.

б) $\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=1$, $t_1 \neq 0$, $t_2 \neq 0$. Сада је дата релација еквивалентна са $t_1 + t_2 = t_1 \cdot t_2$, тј. $x + y + 2 = xy + x + y$, тј. $xy = 2$, хипербола. Корјени ће бити различити од нуле ако је $xy + x + y \neq 0$, што овдје даје $x + y + 2 = 0$, права. Права не сјече хиперболу. ♦

8. Нека су x_1 и x_2 корјени једначине

$$mx^2+(m-1)(x+1)=0 \quad (m\neq 0).$$

Не рјешавајући ту једначину наћи израз

$$\varphi(x)=x_2^2\cdot\left(\frac{x_1^2}{x_2}-x_2\right)+x_1^2\cdot\left(\frac{x_2^2}{x_1}-x_1\right)$$

као функцију од m. Одредити за које ће вриједности m тај израз бити позитиван, узимајући у обзир да тада x_1 и x_2 морају бити реални.

Резултат. $\varphi=-\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\cdot\frac{3m+1}{m}$, $-\frac{1}{3}<m<0$. ♦

9. Задана је функција $y=\left|x^2-kx+1\right|$.

a) Наћи какве криве линије представља та функција у зависности од вриједности параметра k и доказати, да све, тако добивене, криве линије пролазе истом тачком.
b) Навести оне вриједности параметра k за које задана функција представља параболу и одредити геометријско мјесто тјемена тих парабола.

Резултат. **а**) За $|k| \leq 2$ је $y=\left(x-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{4-k^2}{4}$.

За $|k| > 2$ је $y = x^2 - kx + 1$ за $x < x_1$ и $x > x_2$.

За $x_1 < x < x_2$ је $y = -x^2 + kx - 1$, при чему је $x_{21}=\frac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}$.

Све криве линије пролазе тачком $M(0, 1)$.

б) За $|k| \leq 2$ задана функцијапредставља параболу, а геометријско мјесто тјемена тих парабола је $y = 1 - x^2$ за $-1 \leq x \leq 1$. ♦

10. Ако су оба корјена једначине $x^2 + px + q = 0$ позитивна, доказати да су онда оба корјена једначине $qy^2 + (p - 2mq)y + 1 - mp = 0$ такође позитивна за све $m \geq 0$. Да ли ово тврђење може бити тачно за неке негативне вриједности m ?

Рјешење. Ако су оба корјена прве једначине позитивна онда је $p^2 - 4q \geq 0$, $p < 0$, $q > 0$. Да би корјени друге дате једначине били позитивни потребно је и довољно да

$$(p-2mq)^2 - 4q(1-mp) \geq 0,\ \frac{p-2mq}{q} < 0,\ \frac{1-mp}{q} > 0.$$

Послиједње двије неједнакости су испуњене јер је $p < 0$, $q > 0$ и $m \geq 0$. Прва се своди на

$p^2 - 4mpq + 4m^2q^2 - 4q + 4mpq \geq 0$, тј. $p^2 - 4q + 4m^2q^2 \geq 0$, што је тачно због $p^2 - 4q \geq 0$.

Ако је $m < 0$ онда посљедња од три неједнакости важи за $-m < -\frac{1}{p}$, тј. $m > \frac{1}{p}$, а средња од три неједнакости важи за $p < 2mq$, тј. $m > \frac{p}{2q}$. Ако је $\frac{1}{p} > \frac{p}{2q}$, тј. $2q < p^2$, тј. $|p| < \sqrt{2q}$, тада је $m > \frac{p}{2q}$.

За негативне m оба рјешења друге дате једначине биће позитивна за: $m > \frac{1}{p}$ под условом $|p| > \sqrt{2q}$, и $m > \frac{p}{2q}$ под условом $|p| < \sqrt{2q}$.♦

11. Одредити вриједност реалног параметра a тако да за сваку реалну вриједност параметра b квадратна једначина $(a + 1)x^2 + (2b - 1)x + (a + b^2) = 0$ има реалне корјене.

Резултат. $-1 \leq a \leq -\frac{1}{2}$.♦

12. Дата је једначина $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ чији су коефицијенти реални. Доказати

a) ако дата једначина има чисто имагинарна рјешења (различита од нуле) онда вриједи $ad = bc$ и $ac > 0$;
b) ако вриједи $ad = bc$ и $ac > 0$ онда дата једначина има чисто имагинарна рјешења.

Рјешење. **а**) Нека је mi корјен дате једначине. Тада имамо

$$a(mi)^3 + b(mi)^2 + c(mi) + d = 0 \iff -am^3i - bm^2 + cmi + d = 0 \iff$$
$$(d - bm^2) + (cm - am^3)i = 0 \iff d - bm^2 = 0,\ cm - am^3 = 0.$$

Ако је $m \neq 0$ из друге једнакости слиједи $c - qm^2 = 0$ па је $d = bm^2$, $c = am^2$. Множењем ових једнакости добијамо $adm^2 = bcm^2$ одакле слиједи $ad = bc$. Даље из $c - am^2 = 0$ или $ac - a^2m^2 = 0$ слиједи $ac > 0$.

b) Нека је сада $ad = bc$ и $ac > 0$. Множењем дате једначине са a $(a \neq 0)$ добијамо

$$a^2x^3 + abx^2 + acx + da = 0 \iff ax(ax^2 + c) + abx^2 + ad = 0.$$

Стављајући $ad = bc$ имамо $ax(ax^2 + c) + abx^2 + bc = 0 \iff ax(ax^2 + c) + b(ax^2 + c) = 0 \iff$

$(ax^2 + c)(ax + b) = 0$. Једначина $ax + b = 0$ има реалан корјен. Корјени једначине $ax^2 + c = 0$ су чисто имагинарни јер је $ac > 0$.♦

VII Експоненцијална функција

14. Реалне функције

Функцију облика

$$f(x) = b^x,\ b > 0,\ b \neq 1,$$

називамо **експоненцијална функција**. Позитиван и различит од један, константан реалан број b назива се **база**, а x је изложилац или **експонент** експоненцијалне функције.

При множењу и степеновању реалних позитивних константи (произвољним реалним бројевима x, y) важе нама познате особине, као што су на примјер:

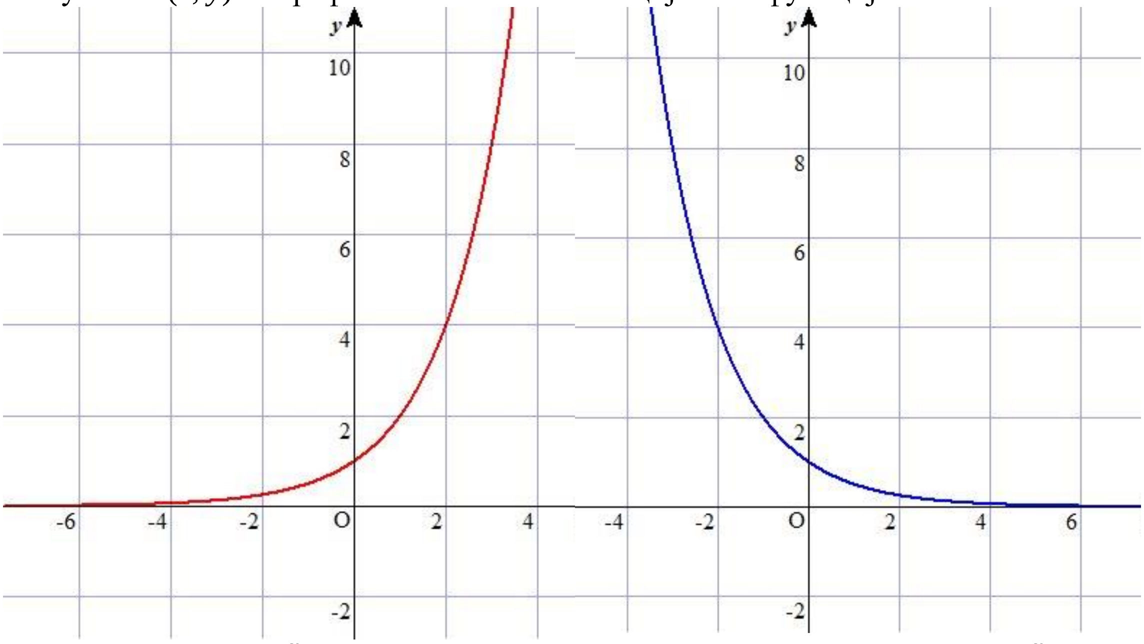
$$b^{x+y} = b^x \cdot b^y,\ b^{xy} = \left(b^x\right)^y,\ b^0 = 1,\ b^{-x} = \frac{1}{b^x}.$$

Степеновањем броја 2 цијелим бројевима добили бисмо:

x	$y = 2^x$
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

x	$y = (0{,}5)^x = 2^{-x}$
0	1
1	0,5
2	0,25
3	0,125
4	0,0625
5	0,03125

То су тачке (x, y) на графовима ових експоненцијалних функција:



Прва функција ($y = 2^x$) је свугдје позитивна и свугдје **растућа**, друга ($y = 2^{-x}$) је такође свугдје позитивна али је свугдје **опадајућа**.

Уопште, експоненцијална функција $f(x) = b^x$, за $b > 1$ је растућа, а за $0 < b < 1$ је опадајућа. То је веома важно узимати у обзир у случају експоненцијалних неједнакости.

На примјер, бројеви 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, ... су све већи, а бројеви $(0{,}5)^0$, $(0{,}5)^1$, $(0{,}5)^2$, $(0{,}5)^3$, ... све мањи (и наравно позитивни). То значи да рјешење неједначине

$$b^x > b^3$$

веома зависи од тога да ли је база b већа или мања од један. Наиме, њена рјешења су

$$\begin{cases} x > 3, \; b > 1, \\ x < 3, \; b < 1. \end{cases}$$

Посебан случај су експоненцијалне функције негативне реалне базе b.

14.1. Експоненцијалне једначине

Једначина облика

$$f_1(x) = f_2(x)$$

у којој се појављује бар једна експоненцијална функција назива се експоненцијална једначина. Овдје ћемо је рјешавати смањивањем броја различитих база, смањивањем броја појављивања база и ако је то могуће, довођењем једначине на облик

$$b^{p(x)} = b^{q(x)}, \; b > 0, \; b \neq 1,$$

а затим рјешавањем еквивалентне једначине $p(x) = q(x)$. Овај коначни прелазак у датим условима је увијек могућ јер је експоненцијална функција бијекција.

Примјер 14.1.1. Рјешити једначину $9^{\frac{2}{x}} = 3^{\frac{x}{2}}$.

Рјешење. Дата једначина је еквивалентна са (имају једнаке скупове рјешења) редом:

$$\left(3^2\right)^{\frac{2}{x}} = 3^{\frac{x}{2}} \;\Leftrightarrow\; 3^{\frac{4}{x}} = 3^{\frac{x}{2}} \;\Leftrightarrow\; \frac{4}{x} = \frac{x}{2} \;\Leftrightarrow\; x^2 = 8 \;\Leftrightarrow\; x = \pm 2\sqrt{2}\,.\blacklozenge$$

Примјер 14.1.2. Рјешити једначину $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

Рјешење. Прво примјетимо да су базе дате једначине реципрочни бројеви, тј.

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)} = \sqrt{2^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4-3} = 1\,.$$

Отуда, смјеном $\sqrt{2-\sqrt{3}} = t$ ова једначина постаје $t^x + \frac{1}{t^x} = 4$, односно

$\left(t^x\right)^2 - 4t^x + 1 = 0$, тј. $t_{12}^x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$.

У случају „минус“ имамо једначину $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = \sqrt{2-\sqrt{3}}$, тј. $x_1 = 1$.

У случају „плус“ имамо $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = \sqrt{2+\sqrt{3}} = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{-1}$, тј. $x_2 = -1$.♦

Примјер 14.1.3. Рјешити једначину $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

Рјешење. Једначина је еквивалентна редом са $2^{2x} - 3^x \cdot 3^{-\frac{1}{2}} = 3^x \cdot 3^{\frac{1}{2}} - 2^{2x} \cdot 2^{-1} \;\Leftrightarrow$

$$2^{2x} + 2^{2x} \cdot 2^{-1} = 3^x \cdot 3^{\frac{1}{2}} + 3^x \cdot 3^{-\frac{1}{2}} \;\Leftrightarrow\; 2^{2x} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3^x \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \;\Leftrightarrow$$

$$2^{2x} \cdot \frac{3}{2} = 3^x \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{2^{2x}}{3^x} = \frac{8}{3\sqrt{3}} \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{2^2}{3}\right)^x = \frac{2^3}{\sqrt{3^3}} \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3}{2}\,.\blacklozenge$$

Задаци 14.1.4.

1. Рјешити[12] експоненцијалну једначину:

а) $19^{\frac{5}{x-3}} = \sqrt[x-6]{19^2}$;

б) $\sqrt{2^{x+1}} = \sqrt[7]{0{,}5^{1-4x}}$

в) $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{3x}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{9}$;

г) $a^{1-x} \cdot \sqrt[3]{a^{x+1}} \cdot \sqrt[5]{a^{1-3x}} = 1$.

2. Рјешити[13] експоненцијалну једначину:

а) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$;

б) $4^x = 2^{\frac{x+1}{x}}$;

в) $2 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$;

г) $4^{x-2} - 17 \cdot 2^{x-4} + 1 = 0$.

3. Рјешити једначину:

а) $4^x + 3^{x-1} = 3^{x+1} - 2^{2x-1}$;

б) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$;

в) $7 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^{x+1} = 3^{x+2} - 2^{x+3}$;

г) $15 \cdot 5^x + 7^{x+1} + 9 \cdot 5^{x+2} = 7^{x+3}$;

д) $2^{3x^2-12x} + 8^{x^2-4x+1} = 3^{2x^2-8x+2}$;

ђ) $4^x - 13 \cdot 6^{x-1} + 9^x = 0$.

4. Рјешити једначину:

а) $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x = 8$;

б) $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x = 14$;

5. Рјешити једначину:

а) $\left(\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}\right)^{x-4} + \left(\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\right)^{x-4} = 2x$

;

б) $4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x$.

6. Рјешити једначину:

а) $32^{\frac{x+5}{x-7}} = \frac{1}{4} \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$;

б) $2^{\sin 2x - \cos x} = 4^{1-2\sin^2\frac{x}{2}}$;

7. Рјешити једначине:

а) $\left|3^{x+2} - 1\right| = 3^{x+2} - 1$;

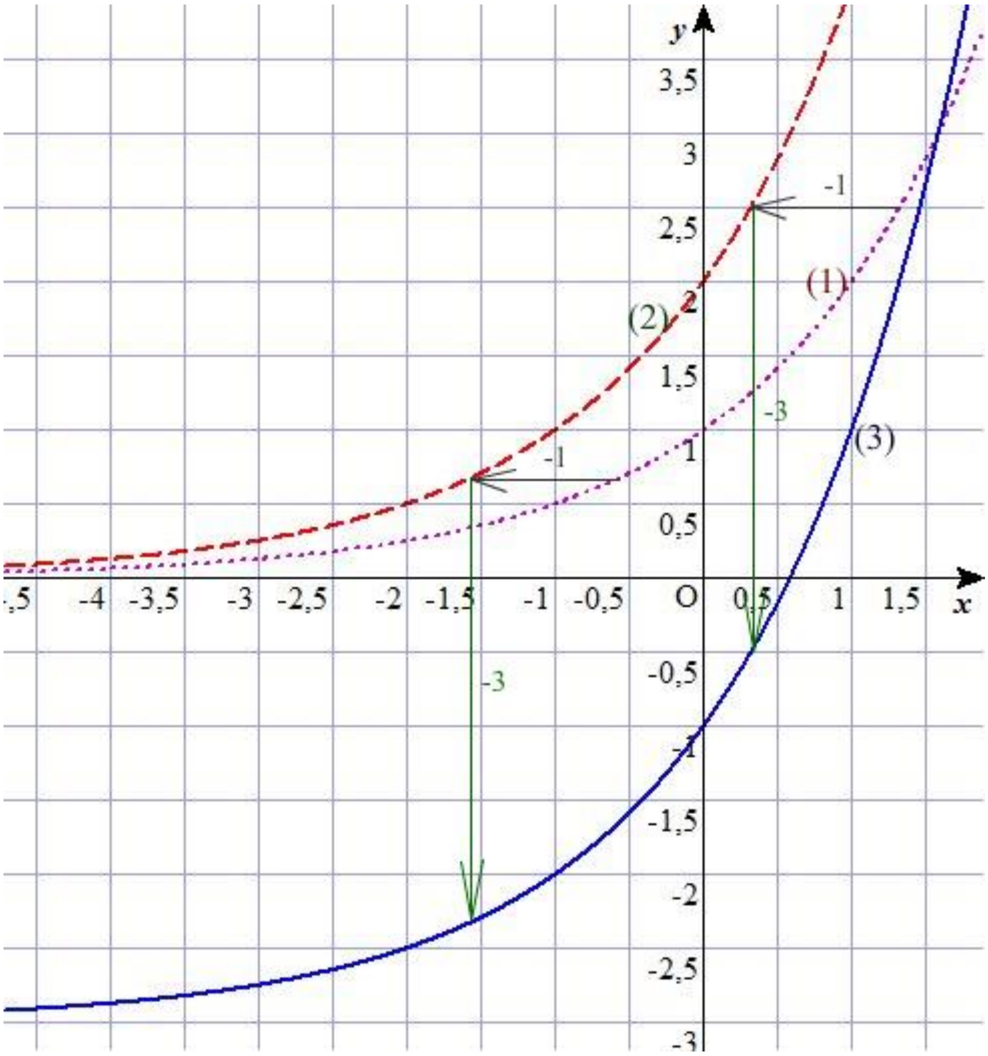
б) $2^{|x+2|} - \left|2^{x+1} - 1\right| = 2^{x+1} + 1$.

14.2. Експоненцијалне функције

На слиједећој слици, полазећи од графа експоненцијалне функције $y_1 = 2^x$, транслацијом у лијево за 1 добијамо граф функције $y_2 = 2^{x+1}$, а затим транслацијом доле за 3 добијамо граф функције $y_3 = 2^{x+1} - 3$.

Домен функције y_3 је скуп реалнигх бројева, кодомен скуп (-3, +∞), функција има једну (хоризонталну асимптоту) y = -3, и нулу (y_3 = 0) за $2^{x+1} = 3$, односно $x \approx 0{,}58$.

[12] Н, Стојановић, Збирка задатака, Друштво математичара Републике Српске, Приједор, 1994.
[13] Задаци са пријемних испита из математике на ЕТФ БЛ



Задаци 14.2.1.

Наћи домен, кодоме, асимптоте, нуле, и нацртати граф функција 1, 2 и 3.

1. а) $f(x) = 2^{-x+1} + 1$; **б)** $f(x) = 3^{x-1} - 2$.

2. а) $f(x) = \begin{cases} 0{,}5^x - 1, & x \ge 0 \\ -2^x + 1, & x < 0; \end{cases}$; **б)** $f(x) = \begin{cases} 3^{x+2} - 1, & x \ge 0 \\ 2^{3-x} + 1, & x < 0. \end{cases}$.

3. а) $y = 2^{|x+2|} - 1$; б) $y = 0{,}5^{|x-2|} + 1$.

4. За дате тачке *A* и *B* наћи граф функције $y = a \cdot 2^{kx}$ ($a, k \in \mathbf{R}$):

а) *A*(-1, 12), *B*(0, 3); **б)** *A*(-1, -12), *B*(0, -3).

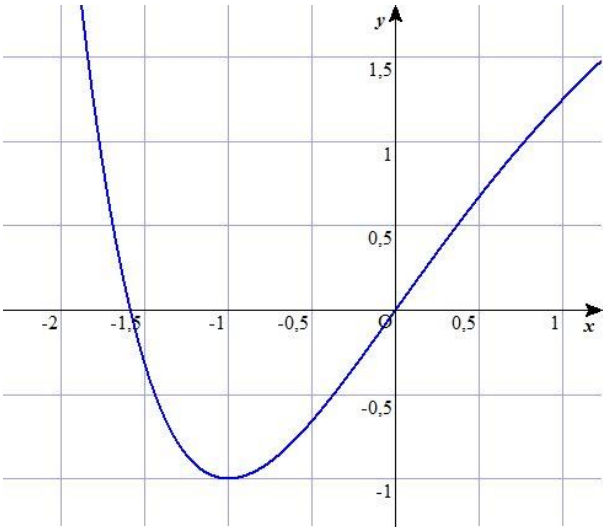
14.3. Неједначине

Експоненцијалне неједначине рјешавамо водећи нарочито рачуна да је експоненцијална функција базе мање од један (и веће од нуле) опадајућа, а иначе је растућа, а затим користећи и особине других познатих функција.

Примјер 14.3.1. Наћи знак функције $y(x) = 0{,}5^{2x} - 4 \cdot 0{,}5^x + 3$.

Рјешење. Функција $y(x) = 0{,}5^{2x} - 4 \cdot 0{,}5^x + 3$ је негативна када је

$0{,}5^{2x} - 4 \cdot 0{,}5^x + 3 < 0$,



односно када је негативна парабола $f(t) = t^2 - 4t + 3$, гдје је $t = 0{,}5^x$. Као што знамо, поменута парабола је негативна за $t \in (1, 3)$, односно $1 < t < 3$.
Враћањем смјене, због $1 < 0{,}5^x < 3$ рјешавамо двије неједначине $1 < 0{,}5^x$ и $0{,}5^x < 3$, тј. $0{,}5^0 < 0.5^x$ и приближно $0{,}5^x < 0{,}5^{-1{,}58}$.
Отуда слиједи редом $0 > x$ и $x > -1{,}58$, тј. $-1{,}58 < x < 0$. Изван тог интервала, за $x \notin [-1{,}58; 0]$ дата функција је позитивна, као што се види на њеном графу лијево.♦

Задаци 14.3.2. Рјешити неједначине.

1. а) $2^{x+2} > \left(\dfrac{1}{4}\right)^{1/x}$; **б)** $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{\frac{x^2-2x}{x^2}} < 1$; **в)** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{|x+2|}{1-|x|}} \ge 9$.

2. а) $0{,}1^x \le 0{,}1^{4x^2-2x-3}$; **б)** $25^{x-3} - 625^{1-2x} < 0$; **в)** $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x \ge 4$.

3. а) $2^{4x+2}\cdot 4^{-x^2} - 3\cdot 2^{2+2x-x^2} + 8 \le 0$; **б)** $9^{2x+2}\cdot 3^{x^2-1} - 10\cdot 3^{\frac{1}{2}x^2+1}\cdot 9^x + 3 \le 0$.

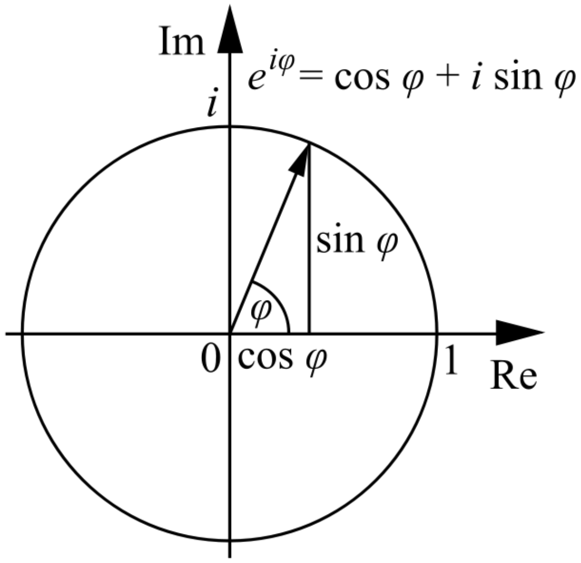
4. а) $\left|2^{x+1} - 1\right| > 2^{x+1}$; **б)** $|x|^{x^2-x} - 2 < 1$; **в)** $|x+1|^{x^2-\frac{5x}{2}+\frac{3}{2}} < 1$.

15. Комплексне функције

Разматрајући особине комплексне равни и примјер 9.2.1. видјели смо да је

$$z = x + iy = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi),$$

гдје је $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$, односно да су реални и имагинарни дијелови комплескног броја z једнаки $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$. Наставак тог разматрања нас води до познате Ојлерове формуле (*Leonhard Euler*, 1707 – 1783), коју је претходно објавио Котез



(*Cotes*, 1714):

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $e \approx 2{,}71828$.

У математици веома важна константа *e* се назива и Ојлеров број, Неперов број, природна база, или база природног логаритма.

За различите аргументе (углове) φ, комплексни број $\zeta = e^{i\varphi}$ се креће по јединичној кружници са центром у исходишту координатне равни, као на слици лијево. Посебно је

$$e^{i\pi} = -1.$$

Дакле, за комплексне бројеве ($z = x + iy = re^{i\varphi}$) важе једнакости

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},\ z^n = r^n e^{in\varphi},\ \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi}{n}},$$

при чему су $r \ge 0$ и φ реални бројеви, а угао је у радијанима. Први број (r) је модул, а други (угао φ) је аргумент комплексног броја (z).

Помоћу Ојлерове формуле можемо дефинисати и експоненцијалне функције за негативне базе. Прије свега, примјетимо да је

$$(-1)^x = \left(e^{i\pi}\right)^x = e^{i\pi x},$$

а затим имамо општи резултат

$$b^x = \begin{cases} |b|^x, & x \ge 0, \\ |b|^x e^{i\pi x}, & x < 0. \end{cases}$$

Задаци 15.0.1. 1. Наћи Re(z) и Im(z) комплексног броја $z = e^{i\theta}$ ако је аргумент: **а**) $\theta = \frac{\pi}{6}$; **б**) $\theta = \frac{\pi}{4}$; **в**) $\theta = \frac{\pi}{3}$; **г**) $\theta = \frac{\pi}{2}$; **д**) $\theta = 2\pi$.

2. Адиционим формулама доказати: **а**) $e^{i\theta_1 + i\theta_2} = e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2}$; **б**) $e^{i\theta_1 - i\theta_2} = e^{i\theta_1} : e^{i\theta_2}$.

VIII Логаритам

16. Логаритамска функција

Експоненцијална функција базе b и експонента (изложиоца) $x \in \mathbf{R}$:

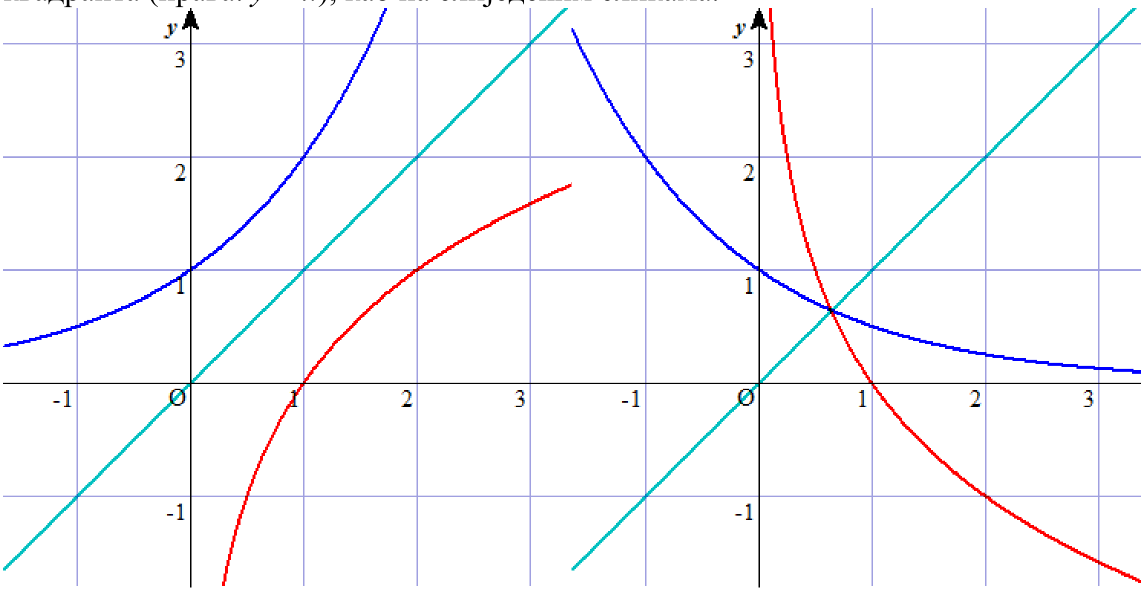
$$f(x) = b^x \ (b > 0, b \neq 1)$$

је бијекција. То значи да она има инверзну функцију:

$$f^{-1}(x) = \log_b x \ (b > 0, b \neq 1, x > 0),$$

а ову зовемо **логаритам**. Доњи индекс b називамо **база** логаритма а аргумент x називамо **нумерус** логаритма.

Графови инверзних функција су симетрични у односу на симетралу I и III квадранта (права: $y = x$), као на слиједећим сликама.



На слици лијево су (растуће) инверзне функције $y_1 = 2^x$ и $y_1^{-1} = \log_2 x$, на слици десно су (опадајуће) инверзне функције $y_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y_2^{-1} = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Логаритам су независно открили шкотски математичар Џон Непер (*John Napier of Merchiston* , 1550 – 1617) и шведски математичар Бурги (*Jost Bürgi*, 1552 – 1632). Неперови логаритми су објављени 1614, а Бургијеви 1620. године. У то вријеме, када наравно, није било калкулатора, оба ова математичара су имали за циљ да поједноставе математичка израчунавања, али је Неперов приступ био је алгебарски, Бургијев геометријски. Везу између логаритама и експонецијалних функција први су препознали Џон Валис 1685. и Јохан Бернули 1694. године.

16.1. Особине логаритама

Дефинишемо ли логаритамску функцију једноставно као инверзну функцију експоненцијалној дате базе ($b > 0, \neq 1$), тада је

Став 16.1.1. $y = b^x \ \Leftrightarrow \ x = \log_b y$.

Отуда слиједи да је **домен** логаритамске функције једнак кодомену експоненцијалне и обратно, тј. база $b \in (0, +\infty)\backslash\{1\}$, нумерус $y > 0$.

Из исте дефиниције логаритамске функције, због $f(f^{-1}(x)) = x$ и $f^{-1}(f(x)) = x$, имамо

Став 16.1.2. За сваку дозвољену базу и нумерус ($b > 0, \neq 1, x > 0$) је

$$b^{\log_b x} = x \text{ и } \log_b b^x = x.$$

Зато што су ове обе функције, експоненцијална и логаритамска бијекције, тј.:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

слиједи слиједећи низ еквивалентних израза:

$$x_1x_2 = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow$$
$$b^{\log_b x_1x_2} = b^{\log_b x_1} \cdot b^{\log_b x_2} \Leftrightarrow$$
$$b^{\log_b x_1x_2} = b^{\log_b x_1 + \log_b x_2} \Leftrightarrow$$
$$\log_b(x_1x_2) = \log_b x_1 + \log_b x_2.$$

Став 16.1.3. Логаритам производа, ако постоји, једнак је збиру логарита исте базе.

И за дијељење добијамо слично.

Став 16.1.4. Логаритам количника, ако постоји, једнак је разлици логаритама исте базе, тј.

$$\log_b \frac{x_1}{x_2} = \log_b x_1 - \log_b x_2.$$

У оба претходна става једнакост важи увијек ако су сабирци дефинисани, ради чега мора бити $b > 0$, $b \neq 1$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. Ако правило за множење поновимо неколико пута долазимо до слиједећег става, али само за неке цијеле бројеве α.

Став 16.1.5. $\log_b x^\alpha = \alpha \cdot \log_b x$, за свако $\alpha \in \mathbf{R}$ (подразумјева се: $b > 0, \neq 1, x > 0$).

Доказ. Нека је $\log_b x^\alpha = y$. Тада је (став 16.1.1.) $x^\alpha = b^y \Leftrightarrow x = b^{\frac{y}{\alpha}}$ па опет због истог става $\log_b x = \frac{y}{\alpha}$, тј. $y = \alpha \cdot \log_b x$. На основу полазне и завршне једнакости слиједи тражена једнакост.♦

Слиједећих пар релација помажу код промјене базе логаритама.

Став 16.1.6. $\log_{b^\alpha} x^\alpha = \log_b x$, за свако $\alpha \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$.

Доказ. Нека је $\log_{b^\alpha} x^\alpha = y$. Тада је $x^\alpha = (b^\alpha)^y \Leftrightarrow x^\alpha = (b^y)^\alpha \Leftrightarrow x = b^y \Leftrightarrow \log_b x = y$. Из прве и посљедње јднакости слиједи тражени став.♦

Став 16.1.7. $\log_b x = \frac{1}{\log_x b}$, за свако $b, x > 0, \neq 1$.

Доказ. Дата једнакост је еквивалентна са $(\log_b x)\cdot(\log_x b) = 1 \Leftrightarrow$ (став 5.) $\log_x b^{\log_b x} = 1 \Leftrightarrow$ (став 2.) $\log_x x = 1$, што је тачно за свако x које може бити база логаритма. Према томе, тачна је и дата једнакост.♦

Став 16.1.8. $\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$, за свако $c > 0, \neq 1$.

Доказ. Дата једнакост еквивалентна је са $(\log_b x)\cdot(\log_c b) = \log_c x \Leftrightarrow$ $\log_c b^{\log_b x} = \log_c x \Leftrightarrow \log_c x = \log_c x$, што је тачно за сваку дозвољену базу c. Према томе, тачна је и дата једнакост.♦

Имамо само два случаја када се база логаритма подразумјева и не мора писати, а то су базе 10 и ирационални број $e \approx 2{,}72$:

$$\log x \equiv \log_{10} x \quad \text{и} \quad \ln x \equiv \log_e x.$$

Први се зову **декадни** логаритми, зато што су прве детаљне логаритамске таблице рађене у бази 10, а други су **природни** логаритми (лат. *log naturalis*), јер је ирационални број *e*, који се зове основа природних логаритама, један од најважнијих бројева у математици.

Задаци 16.1.9. Без употребе калкулатора, или таблица израчунати слиједеће вриједности.

1. а) $\log_2 \frac{1}{512}$; **б**) $\log_3 \frac{1}{243}$; **в**) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{16}{81}$; **г**) $\log_{0,2} 625$.

2. а) $3^{\log_3 27}$; **б**) $2^{\log_2 1024}$; **в**) $\log_{0,3} 0{,}3^{15}$; **г**) $\log_{\frac{1}{5}} 0.2^{19}$.

3. Трансформисати дате изразе у збир логаритама.

а) $\log\left(\frac{12x^2\sqrt{5}}{7y^3\left(\sqrt[3]{11}\right)}\right)$; **б**) $\log_4\sqrt{\frac{6a^3}{7b^5c^{\frac{2}{3}}}}$; **в**) $\ln\sqrt{\frac{35e^2}{6a^3b^{-\frac{1}{2}}}}$; **г**) $\ln\left(\frac{15xe^3}{8y^4\left(\sqrt[4]{7}\right)}\right)$.

4. Изразити:

а) $\log_3 210$ помоћу $\log 3$ и $\log 7$;

б) $\log_{25} 12$ помоћу $\log_5 3$ и $\log_5 4$;

в) $\log_7 50$ помоћу $\log_{14} 2$ и $\log_{14} 5$;

г) $\log_5 6$ помоћу $\log 2$ и $\log 3$;

д) $\log_{30} 8$ помоћу $\log_{30} 3$ и $\log_{30} 5$.

5. Изразити:

а) $\log_3 6$ помоћу $\log_6 2$;

б) $\log_{36} 9$ помоћу $\log_{36} 8$;

в) $\log_6 16$ помоћу $\log_{12} 27$;

г) $\log_{12} 64$ помоћу $\log_{12} 3$;

д) $\log_{49} 28$ помоћу $\log_7 2$.

6. Ако је $\log_m x = a$, $\log_n x = b$ и $\log_{mnp} x = c$, израчунати $\log_p x$.

7. Ако је $\log_5 2 = p$ и $\log_5 3 = q$, израчунати $\log_{30} 60$.

8. Ако је $\log_7 2 = p$, $\log_2 10 = q$, израчунати $\log_4 11{,}2$.

9. Ако је $\log_3 5 = m$, $\log_5 10 = n$, израчунати $\log_{25} 112{,}5$.

10. Ако је $\log 20 = b$, колики су $\log 2$ и $\log 5$?

16.2. Логаритамске једначине

Једначине које садрже логаритамске изразе, или је познавање таквих потребно током рјешавања, називају се логаритамске једначине. Генерално, рјешавамо их своћењем на једноаставније једначине са мање логаритама и мање база, а водећи рачуна о домену (база позитивна и различита од један, а нумерус позитиван). Затим их преводимо у експоненцијалну једначину.

Примјер 16.2.1. Наћи сва рјешења једачине $\log_2 x = 5$.

Рјешење: Узимајући у обзир домен $x > 0$, и према дефиницији логаритма (став 16.1.1.) дата једначина је еквивалентна са $x = 2^5$, тј. рјешење је $x = 32$.♦

Примјер 16.2.2. Наћи рјешења једначине $\log_3(x-1)+\log_3(x-2)=1$.

Рјешење: Оба нумеруса морају бити позитивна, па је домен $x > 2$. Једначина је еквивалентна редом са $\log_3(x-1)(x-2)=1 \iff (x-1)(x-2)=3^1 \iff x^2-3x-1$ $= 0 \iff x_{12}=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$. У оквиру домена, једино рјешење је $x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\approx 3{,}30$.♦

Примјер 16.2.3. Рјешити једначину $\log_8 x+\log_4 x+\log_2 x=11$.

Рјешење: Дата једначина је еквивалентна са $\log_2\sqrt[3]{x}+\log_2\sqrt{x}+\log_2 x=11 \iff$ $\log_2(\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{x}\cdot x)=11 \iff \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{x}\cdot x=2^{11} \iff x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1}=2^{11} \iff x^{\frac{11}{6}}=2^{11} \iff x^{\frac{1}{6}}=2$ $\iff x=2^6 \iff x=64$.♦

Понекад је потребно логаритмовати једначину ради њеног рјешавања. Зато што је логаритамска функција бијекција важи: $x_1 = x_2 \iff \log x_1=\log x_2$.

Примјер 16.2.4. Рјешити једначину $x^{1+\log x}=10x$.

Рјешење: дата једначина $\iff \log x^{1+\log x}=\log(10x) \iff$ $(1+\log x)\cdot\log x=\log 10+\log x \iff \log^2 x=1 \iff \log x=\pm 1 \iff x=10^{\pm 1}$, тј. $x_1 =$ 10, $x_2 = 0{,}1$.♦

Задаци 16.2.5.

1. Одредити (приближну, или тачну) вриједност непознате x ако је:

а) $10^x=5$; **б**) $7\cdot e^{2x}=9$;

в) $2^{3x-1}=3^{2x+1}$; **г**) $\log_4(3x+1)=2$.

[0,69897; 0,12566; -15,21237; 5]

2. Рјешити једначине:

а) $\log_4 x+\log_8 x=5$; **б**) $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=\dfrac{11}{12}$;

в) $4\log_2 x+2\log_x 2=9$; **г**) $\log_x 9+3\log_9 x=4$;

д) $\log_x 2\cdot\log_{\frac{x}{16}} 2=\log_{\frac{x}{64}} 2$; **ђ**) $\log_x 3\cdot\log_{\frac{x}{3}} 3+\log_{\frac{x}{81}} 3=0$.

3. Доказати идентитет $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$, па на основу тога рјешити једначине:

а) $3x^{\log_2 3}+3^{1+\log_2 x}=2$; **б**) $10\cdot 5^{\log_3 x-1}+x^{\log_3 5}=15$.

Рјешити једначине:

4. $\log_5\log_4\log_3\log_2 x=0$.

5. $\log_2 x\cdot\log_4 x\cdot\log_8 x\cdot\log_{16} x=\dfrac{2}{3}$.

6. $\log x+\log x^2+\log x^3+...+\log x^{50}=1275$.

7. $3^{2(x+\log_3 2)}-2=3^{\log_3 2+x}$.

8. $x^{\log_5 x-3}=5^{3(\log_5 x-1)}$.

9. $x+\log(6-2^x)=x\log 5+\log 8$.

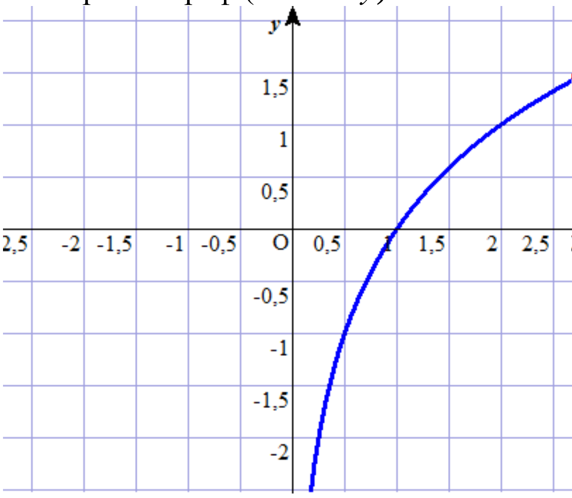
10. Број становника на свијету се повећава приближно годишње за 1,3%. На почетку 2000. године на планети је било мало више од 6 милијарди људи. Након колико година би се истим растом популација удвостручила?

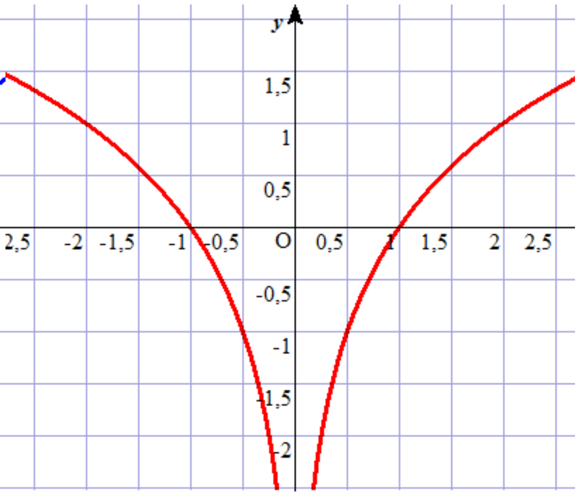
11. Неких 1000 КМ (новчаних јединица) је стављено на депозит у банку са 12% камате годишње, комфорном методом (*compounded*). **а**) Колико ће бити на рачуну након 10 година? **б**) Након колико времена ће на рачуну бити 2000 КМ ?

[3105,85; 5 г. и 10 мјесеци]

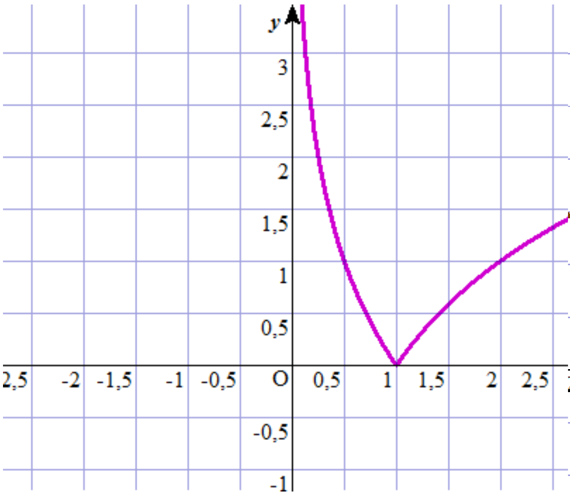
16.3. Граф

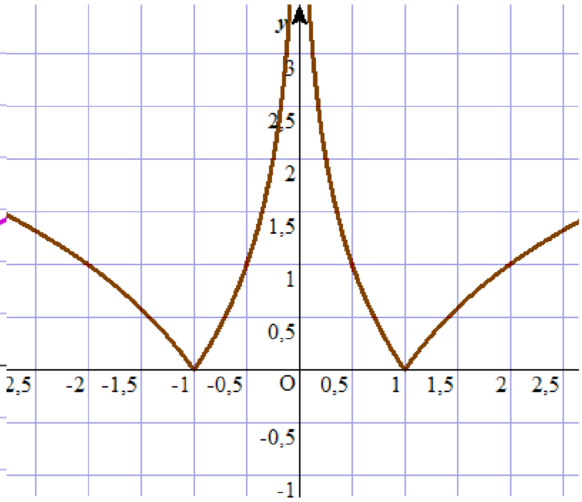
Графове који воде до транслација дуж оса, или осно симетричне графове око симетрале I и III квадранта смо већ објашњавали. Сада обратимо пажњу и на графичке послиједице апсолутних вриједности функције и њеног аргумента. На сликама доле лијево и десно имамо графове функција $y_1 = \log_2 x$ и $y_2 = \log_2 |x|$. Друга има проширен домен на све реалне бројеве осим нуле и симетричан граф (око осе *y*).





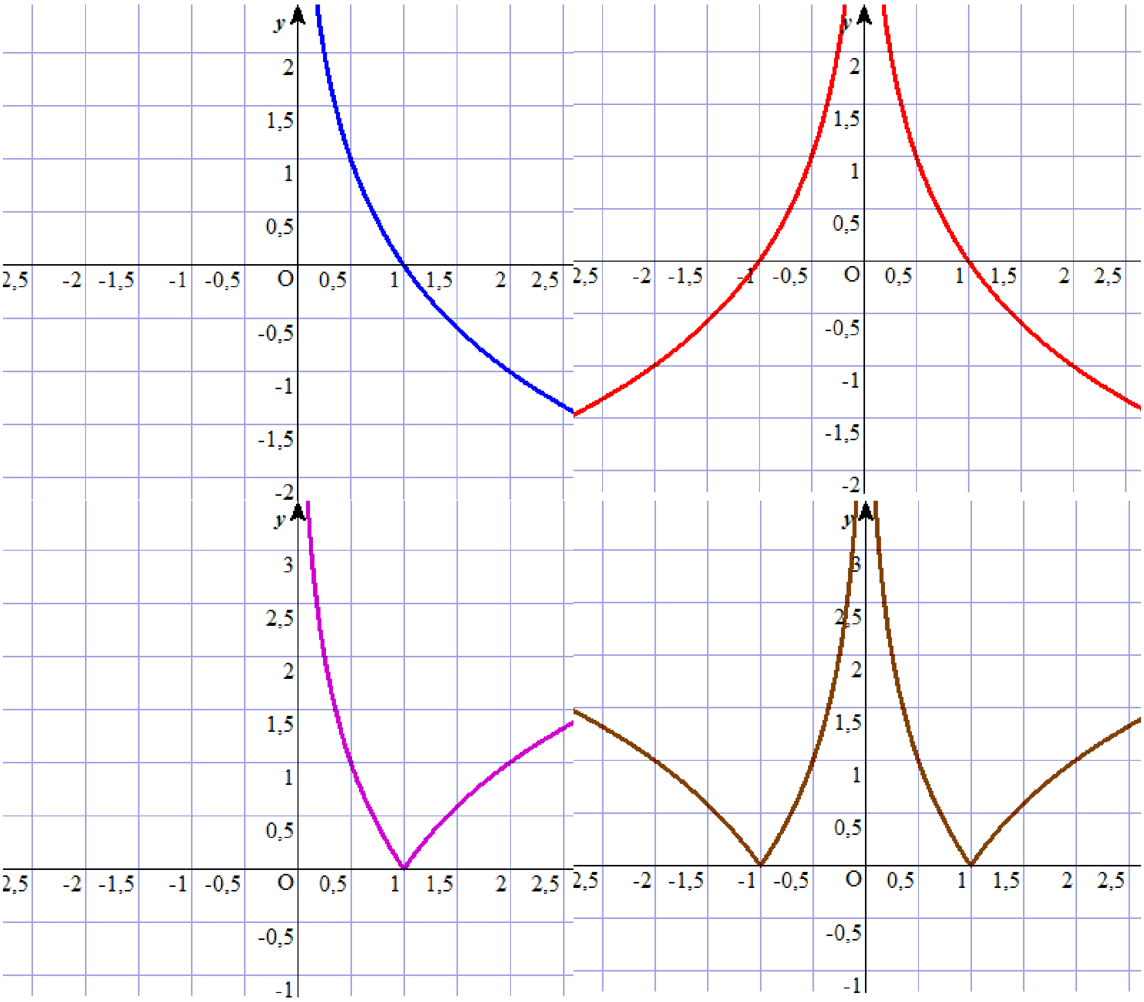
На слиједећим сликама су графови функција $y_3 = |\log_2 x|$ и $y_4 = |\log_2 |x||$.





Примјер 16.3.1. Проучавајући графове претходно датих функција, скицирати графове аналогних функција логаритама базе 0,5: $y_1 = \log_{0,5} x$, $y_2 = \log_{0,5} |x|$, $y_3 = |\log_{0,5} x|$ и $y_4 = |\log_{0,5} |x||$.

Резултат: Иако се полази од различитих функција, након узимања апсолутних вриједности се долази до истих графова, треће и четврте функције.



Задаци 16.3.2. Скицирати графике функција:

1. а) $y = 2^{\log_2 x}$; **б)** $y = \log_2 2^x$.

2. а) $y = \log(x-1)+2$; **б)** $y = \log_{0,1}(x+1)-1$.

3. а) $y = |\log_3(x-1)|$; **б)** $y = |\log_{0,5}(x+1)|$.

4. а) $y = |\log_{0,5}(x^2-1)|$; **б)** $y = |\log(x^2-x)|$.

5. а) $y = \log_3|x+1|-2$; **б)** $y = \log_{\frac{1}{3}}|x-2|+1$.

6. а) $y = \log x + |\log x|$; **б)** $y = \log\log|x|$.

16.4. Неједначине

Логаритамска функција

$$f(x) = \log_b x,$$

гдје је $b > 0$, $b \neq 1$ и $x > 0$, је растућа када је $b > 1$, а опадајућа за $0 < b < 1$. Према томе је

$$\log_2 5 > \log_2 4, \text{ али је } \log_{0,5} 5 < \log_{0,5} 4.$$

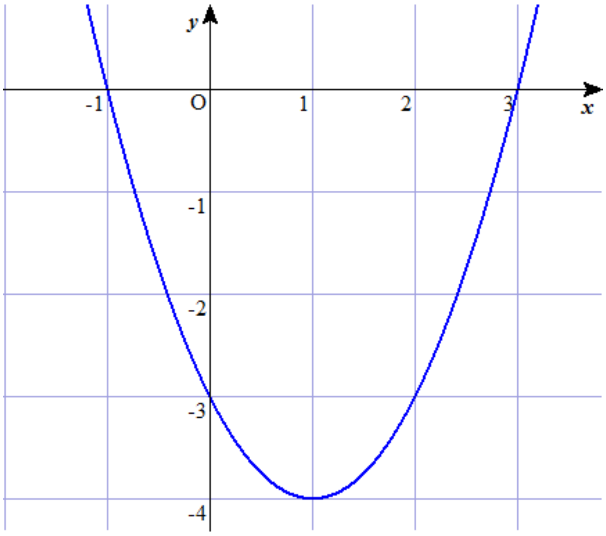
Примјер 16.4.1. Рјешити неједначину $\log\frac{2x-1}{2x+1}\ge 0$.

Рјешење: Из услова домена имамо $\frac{2x-1}{2x+1}>0$, а затим $\log\frac{2x-1}{2x+1}\ge\log 1$, тј. $\frac{2x-1}{2x+1}>1$ јер је логаритам декадни, базе веће од једнан. Ако је тачна друга тачна је и прва неједначина, док обратно није. Према томе, довољно је наћи сва рјешења друге неједначнине. Даље је

$$\frac{2x-1}{2x+1}-1>0 \iff \frac{2x-1-(2x+1)}{2x+1}>0 \iff \frac{-2}{2x+1}>0 \iff$$

$$2x+1<0 \iff x<-\frac{1}{2},\ \text{тј. } x\in(-\infty,-\tfrac{1}{2}).♦$$

Примјер 16.4.2. Рјешити неједначину $\log_{2x+3}x^2<1$.



Рјешење: На основу домена имамо неједначине 2x + 3 > 0, 2x + 3 ≠ 1, x^2 > 0, дакле $x>-\frac{3}{2}$, $x\ne-1$, $x\ne 0$. Затим имамо и неједначине које слиједе из $\log_{2x+3}x^2<\log_{2x+3}(2x+3)$, односно: $x^2<2x+3$, ако је база 2x + 3 > 1; те $x^2>2x+3$, ако је 2x + 3 < 1. Другим рјечима:

$x^2-2x-3<0$ и x > -1; те

$x^2-2x-3>0$ и x < -1.

Граф параболе $y=x^2-2x-3$ сјече апсцису у тачкама -1 и 3, а гране јој иду горе, као на слици лијево.

Према томе рјешења дате неједначине су реални бројеви

$x\in\left(-\frac{3}{2},-1\right)\cup(-1,0)\cup(0,3)$.♦

Задаци 16.4.3. Рјешити неједначине:

1. а) $\log(x+3)-\log(x+2)>1$; **б)** $\ln(2x-1)-\ln(2x+1)<0$.

2. а) $\log_{0,5}(x^2-3x+3)<0$; **б)** $\log_2(x^2-5x+7)<0$.

3. а) $\log_3(x+1)\ge\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$; **б)** $\log_{0,2}(x-2)\le\log_5(x-3)$.

4. а) $\log_x(3x-1)\le 0$; **б)** $\log_x(3x+1)\ge 0$.

5. а) $\log_x(5x+3)\le 2$; **б)** $\log_x(5x-1)\ge 2$.

6. а) $\log_{(2x-1)}x^2\le 2$; **б)** $\log_{(3x+1)}x^2\ge 2$.

7. а) $\log_2\frac{|x^2-2x|+4}{|x+2|+x^2}>0$; **б)** $\log_3\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}<0$.

8. а) $0{,}7^{\log_{0,5}\log_3\frac{3x+2}{x^2+5}}<1$; **б)** $\log_3\log_5\dfrac{2x+1}{x-1}>\log_{\frac{1}{3}}\log_{\frac{1}{5}}\dfrac{x-1}{2x+1}$.

17. Разни задаци

17.1. Системи једначина са логаритмима

Рјешити системе једначина

1. а) $\log x+\log y=2 \wedge x-y=20$; **б)** $\log x+\log y=\log 2 \wedge x^2+y^2=5$;

в) $\log x+\log y=3 \wedge 2\log x-2\log y=-1$; **г)** $\log_x(y-18)=2 \wedge \log_y(x+3)=\dfrac{1}{2}$.

2. а) $3x=5\log y+4 \wedge x+\log y=4$; **б)** $2x-y=6 \wedge \log x=1-\dfrac{1}{2}\log y$.

[(3,10); (5, 4)]

3. $\log_4 x-\log_2 y=0 \wedge x^2-5y^2+4=0$.

[(1, 1), (4, 2)]

4. $xy=a^2 \wedge \log^2 x+\log^2 y=2{,}5\log^2(a^2)$.

5. $\dfrac{1}{m}\log_a x+\dfrac{1}{n}\log_a y=0 \wedge \dfrac{1}{n}\log_a x+\dfrac{1}{m}\log_a y=1$ ($a>0$, $a\neq 1$, $m\neq 0$, $n\neq 0$).

6. $\log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2 \wedge \log_9 x+\log_3 y+\log_9 z=2 \wedge \log_{16} x+\log_{16} y+\log_4 z=2$.

17.2. Задаци са пријемних испита

На пријемним испитима за факултет задатке треба рјешавати комплетно. Да би било јасније шта то значи, овдје су дата нека комплетна рјешење.

1. Рјешити[14] једначину $4^{\sqrt{x-2}}+16=10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}$.

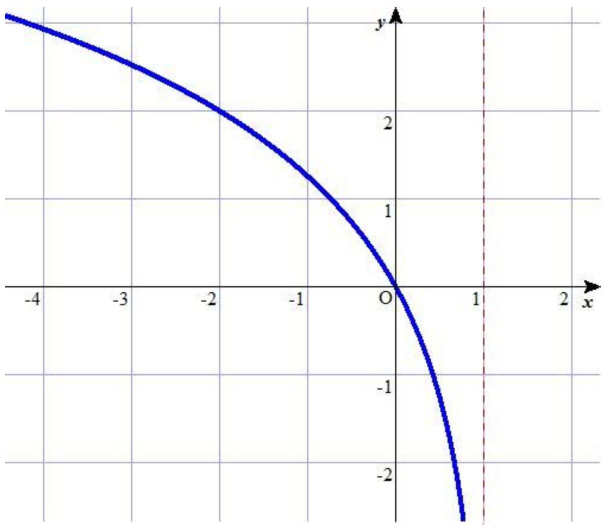
Рјешење: Поткорјена величина квадратног корјена не може бити негативна, тј. $x-2\geq 0$. Домен је D = [2, +∞). Дата једначина је еквивалентна са $\left(2^{\sqrt{x-2}}\right)^2+16=10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}$. Уводимо смјену $2^{\sqrt{x-2}}=t$, $t>0$, и добијамо низ еквивалентних једначина $t^2+16=10t \Leftrightarrow t^2-10t+16=0 \Leftrightarrow$ $t_{12}=\dfrac{10\pm\sqrt{100-64}}{2} \Leftrightarrow t=8 \vee t=2 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x-2}}=8 \vee 2^{\sqrt{x-2}}=2 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x-2}}=2^3 \vee 2^{\sqrt{x-2}}=2^1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}=3 \vee \sqrt{x-2}=1 \Leftrightarrow x-2=9 \vee x-2=1 \Leftrightarrow x=11 \vee x=3$. Рјешења су $x\in\{11, 3\}\subset D$.♦

2. Нацртати график функције f из **R** у **R** која је дефинисана са $f(x)=2\cdot\log_2(1-x)$.

Рјешење: Домен: $1-x>0$, тј. $D_f=(-\infty, 1)$. Кодомен (ранг) $R_f=(-\infty, +\infty)$. Вертикална

[14] ЕТФ БЛ 30.06.1982. задаци 2. и 3.

асимптота (на граници домена) је: $x = 1$.



Нула функције, $f(x) = 0 \Leftrightarrow$ $\log_3(1-x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Знак функције, $f(x) > 0 \Leftrightarrow$ $\log_3(1-x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 1 \Leftrightarrow x < 0$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow$ $\log_3(1-x) < 0 \Leftrightarrow 0 < 1 - x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Ток функције, $(\forall x_1, x_2 \in D_f)(x_1 > x_2) \Rightarrow (1 - x_1 < 1 - x_2) \Rightarrow$ $\log_3(1-x_1) < \log_3(1-x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Функција је стално опадајућа.

3. Рјешити[15] једначину $\dfrac{\log\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{\log\left(\sqrt[3]{x-40}\right)} = 3$.

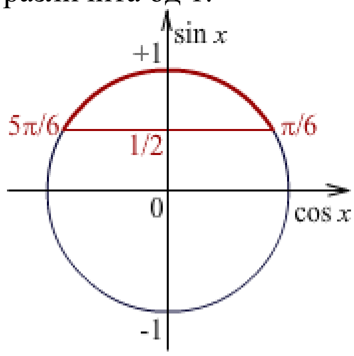
Рјешење. Домен:
Именилац $\neq 0$, нумерус и нумерус позитивни, база другог корјена ненегативна, тј. $\log\left(\sqrt[3]{x-40}\right) \neq 0 \wedge 1+\sqrt{x+1} > 0 \wedge \sqrt[3]{x-40} > 0 \wedge x+1 \geq 0$. Отуда је $3\sqrt{x-40} \neq 1 \wedge \sqrt{x+1} > -1 \wedge x-40 > 0 \wedge x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq 40 \wedge x \neq 41$. Дакле, домен

$$D: x \in (40,41) \bigcup (41,+\infty).$$

Дата једначина је еквивалентна са $\log\left(1+\sqrt{x+1}\right) = 3 \cdot \log\left(\sqrt[3]{x-40}\right) \Leftrightarrow$
$\log\left(1+\sqrt{x+1}\right) = \log\left(\sqrt[3]{x-40}\right)^3 \Leftrightarrow 1+\sqrt{x+1} = x-40 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x-41 \Leftrightarrow$
$x+1 = (x-41)^2 \wedge x \geq 41 \Leftrightarrow x^2 - 83x + 1680 = 0 \wedge x \geq 41 \Leftrightarrow x = 48 \in D$.♦

4. Одредити домен функције $x \to f(x) = \log(2\sin x - 1)$.

Рјешење. Нумерус и база логаритма морају бити позитивни, а база још и различита од 1.



Овдје је критичан само услов за нумерус:
$2\sin x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2\sin x > 1 \Leftrightarrow \sin x > \dfrac{1}{2}$. Рјешење ове тригонометријске једначине је:
$x \in \bigcup_{k\in Z}\left(\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)$, тј.

$$D = \bigcup_{k\in Z}\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right),\ k \in Z.♦$$

5. Рјешити експоненцијалну једначину:

1) $2 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$;

[15] ЕТФ БЛ 30.08.1982. задатак 3. и 4.

2) $4^{x-2}-17\cdot 2^{x-4}+1=0$;

3) $32^{\frac{x+5}{x-7}}=\frac{1}{4}\cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$;

4) $4^{x}+3^{x-1}=3^{x+1}-2^{2x-1}$;

5) $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$;

6) $7\cdot 2^{x}-2\cdot 3^{x+1}=3^{x+2}-2^{x+3}$;

7) $11\cdot 5^{x}+7^{x+1}+9\cdot 5^{x+2}=7^{x+3}$.

6. Рјешити логаритамску једанчину:

1) $\log_{16}x+\log_{4}x+\log_{2}x=7$;

2) $\log_{x}\sqrt{5}+\log_{x}\left(\sqrt{5}\right)^{3}-2{,}25=\left(\log_{x}\sqrt{5}\right)^{2}$.

7. Рјешити неједначину:

1) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x}\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}<\frac{\log 4}{\log 8}$;

2) $\log^{2}x-\frac{8}{\log^{2}x}<2$;

3) $\log^{2}x<10+\log x^{3}$;

4) $\log\left(5^{x}+x-20\right)>x-x\log 2$;

5) $3^{x+1}+3^{2-x}<28$;

6) $9^{x}-9^{1-x}>8$;

7) $3^{x+\frac{1}{2}}+3^{x-\frac{1}{2}}>4^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$;

8) $\sqrt{13^{x}-5}+\sqrt{13^{x}+5}\leq\sqrt{2\left(13^{x}+12\right)}$;

9) $\sqrt{15^{x}+9}+\sqrt{15^{x}-9}\leq\sqrt{2\left(15^{x}+12\right)}$.

8. Одредити домен функције: $f(x)=\left(1-\log_{x}3\right)^{\frac{1}{2}}$.

9. Нека је $x\to f(x)=\sin x$ и $x\to g(x)=3^{x}$. Израчунати
$(g\circ f)\left(\frac{\pi}{6}\right)-3(f\circ g)\left(\log_{3}\frac{\pi}{6}\right)$ и $f\left(\frac{\pi}{6}\right)-3g(-1)$. Који је од тих бројева већи?

10. Одредити све релане бројеве *a* тако да домен функције
$x\to f(x)=\sqrt{\log_{a}\left(x^{2}+a-2\right)}$ буде цијели скуп **R**.

11. Рјешити систем једначина: $4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}=32\ \wedge\ \log_{3}(x-y)=1-\log_{3}(x+y)$.

Рјешење. Услови дефинисаности: $x\neq 0\ \wedge\ y\neq 0$. Дати систем је еквивалентан са
$2^{2\cdot\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)}=2^{x}\ \wedge\ \log_{3}(x-y)(x+y)=1\ \Leftrightarrow\ 2\cdot\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=5\ \wedge\ x^{2}-y^{2}=3\ \Leftrightarrow$ смјена
$\frac{x}{y}=t$ у прву једначину $\Leftrightarrow\ 2t+\frac{2}{t}=5\ \Leftrightarrow\ 2t^{2}-5t+2=0\ \Leftrightarrow\ t_{12}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}$

$\Leftrightarrow\ t = 2 \vee t = \frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ \frac{x}{y} = 2 \vee \frac{x}{y} = \frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ x = 2y \vee y = 2x$. Из друге једначине слиједи $(y = \pm 1 \wedge x = \pm 2) \vee (x = \pm i \wedge y = \pm 2i)$. Дакле, рјешења су $(x, y) \in \{(2, 1), (-2, -1), (i, 2i), (-i, -2i)\}$.♦

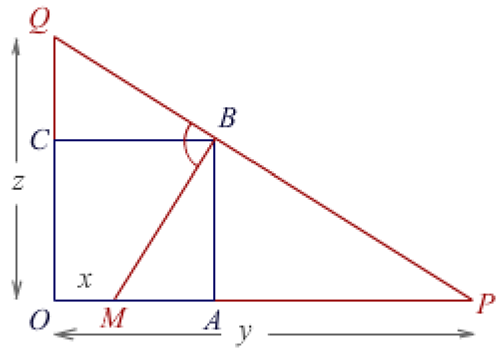
17.3. Задаци са такмичења

Овдје су неки од задатака са републичких такмичења средњошколаца у БиХ из периода 1959 – 1974, који су били у вези са експоненцијалним функцијама или логаритмима. Тадашњи и садашњи средњошколски програми из математике нису идентични, али су веома слични.
Ни у ком случају не читајте одмах рјешења задатака, чак и онда када се чини да немате никакве идеје нити за почетак рјешавања. Тек послије више упорних настојања да се задатак ријеши може се погледати понуђено рјешење, али ни тада не цијели ток већ само почетак. Наведена рјешења служе да би их ученик на крају могао упоредити са својима.
Прво републичко такмичење из математике за ученике средњих школа у Босни и Херцеговини одржано је само за четврте разреде у прољеће 1959. године. Већ наредне, 1960. Године у такмичења је укључен и трећи разред, други од десетог такмичења 1968, а први од дванаестог, 1970. године.

1. Дат је квадрат $OABC$ стране једнаке 1 и на страни OA произвољна тачка M. Права нормална на дуж MB у тачки B сјече продужење стране OA у тачки P, а продужење стране OC у тачки Q. Нека је OM једнако x, OP једнако y, OQ једнако z. Изразити y и z као функције од x и доказати да за те функције постоји однос

$$\log(y+z) = \log y + \log z\,.$$

Рјешење. $CB \perp AB \wedge QB \perp MB \Rightarrow \angle CBQ = \angle ABM$. Како су троуглови AMB и BCQ
правоугли то су они сада подударни, па је $CQ \cong AM$, тј. $CQ = 1 - x$. Дакле, $z = 2 - x$. Из сличности троуглова POQ и PAB слиједи $z : y = 1 : (y-1)$, тј. $z(y-1) = y$ и $y = \frac{z}{z-1} = \frac{2-x}{1-x}$. Даље је $\log(y+z) =$ $\log\left(\frac{2-x}{1-x} + 2 - x\right)$ $=$ $\log\frac{(2-x)^2}{1-x}$ $=$ $2\log(2-x) - \log(1-x)$ $=$ $\log(2-x) + \log(2-x) - \log(1-x)$ $=$



$= \log(2-x) + \log\frac{2-x}{1-x}$ $=$ $\log z + \log y$, тј. $\log(y+z) = \log y + \log z$.♦

2. За које вриједности угла α и за које вриједности промјенљиве x је

$$\log_2 x + \log_x 2 - 2\cdot\sin\alpha \le 0\,?$$

Рјешење. Дефиниционо подручје је $0 < x \neq 1$. Смјена $y = \log_2 x$ даје

$$\frac{y^2 - 2\sin\alpha\cdot y + 1}{y} \le 0\,. \quad (*)$$

Дискриминанта горњег квадратног тринома $f(y) = y^2 - 2\sin\alpha\cdot y + 1$ је $D = \sin^2\alpha - 1$.

Ако је $\sin^2\alpha - 1 \le 0$, што је тачно за свако α, онда је $(\forall y)\ f(y) \ge 0$. Да би вриједила неједнакост (*) мора бити $y < 0$, тј. $\log_2 x < 0$, што је испуњено када $0 < x < 1$. Осим тога, (*) вриједи и када је $f(y) = 0$, $y > 0$, тј. када је $D = 0$, односно $\sin\alpha = \pm 1$ за $y = \pm 1$. Овдје је $y = 1$ за $\sin\alpha = 1$, тј. $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Према томе, (*) вриједи и за поменуто α, тј. за $y = 1$, што значи $\log_2 x = 1$, односно $x = 2$.

Будући да $\sin^2\alpha - 1 > 0$ није ни за какво α, то су са претходним исцрпљени сви случајеви.

Дакле, рјешења су: α произвољно, $0 < x < 1$; $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, $x = 2$.♦

3. Наћи[16] највећу вриједност функције

a) $y(x) = \log_2^4 x + 12 \cdot \log_2^2 x \cdot \log_2 \frac{8}{x}$, ако је $1 < x < 64$;

b) $y(x) = \log_2^2 x \left(\log_2^2 x + 3\log_2 \frac{8}{x^2} \right)$, ако је $1 < x < 8$.

Рјешење. a) За $x = 8$ функција има највећу вриједност 81. b) Дата функција се може писати у облику $y = [\log_2 x(\log_2 x - 3)]^2$. Она ће имати највећу вриједност када израз у загради буде имао највећу апсолутну вриједност. У датом интервалу $1 < x < 8$, тј. $0 < \log_2 x < 3$, видимо да највећу апсолутну вриједност израз усредњој загради има када је $\log_2 x = \frac{3}{2}$, тј. $x = 2\sqrt{2}$. Тада је $y = \frac{81}{16}$, што је тражена највећа вриједност функције.♦

4. Ако је $a^2 + b^2 = c^2$, доказати да је

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2 \cdot \log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a .$$

Упутство. Израз $a^2 + b^2 = c^2$ написати $a^2 = (c-b)(c+b)$ и логаритмовати га по бази 2.♦

5. За које вриједности α и $x > 0$ важи релација:

$$\log_2 x + \log_x 2 + 2\cos\alpha \le 0 .$$

Рјешење. Домен, $0 < x \ne 1$.

За x > 1 је $\log_2 x > 0$, а збир позитивног броја $\log_2 x$ његове реципрочне вриједности има најмању вриједност 2, па пошто је $2|\cos\alpha| \le 2$, дата релација може важити само за $\log_2 x + \log_x 2 = 2$, тј. $x = 2$ и $\alpha = (2k + 1)\pi$, за свако $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

За $0 < x < 1$ је $\log_2 x < 0$, а збир негативног броја и његове реципрочне вриједности има највећу вриједност – 2, па због $2|\cos\alpha| \le 2$ релација важи за свако α.

Дакле: $\alpha = (2k + 1)\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $x = 2$; произвољно α, $0 < x < 1$.

Напомена. Задатак се може рјешити и слично као задатак 2.♦

6. Доказати

[16] Два пута дат сличан задатак, из1965. и 1970.

$$\log_b x = \frac{1}{2}(\log_a x + \log_c x) \;\Rightarrow\; \log_b \sqrt{ac} = \log_b a \cdot \log_b c\,,$$

при чему су a, b, c, x позитивни и различити од 1.

Рјешење. Под датим условима, сви изрази су дефинисани. Из дате претпоставке импликације слиједи $\log_b x = \frac{1}{2}\left(\frac{\log_b x}{\log_b a} + \frac{\log_b x}{\log_b c}\right)$. За $x = b \neq 1$, биће

$1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log_b a} + \frac{1}{lig_b c}\right)$, тј. $2\log_b a \cdot \log_b c = \log_b c + \log_b a \;\Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}\log_b ac = \log_b a \cdot \log_b c \;\Leftrightarrow\; \log_b \sqrt{ac} = \log_b a \cdot \log_b c$.♦

7. Када је $a > 1$ или $0 < a < 1$, за које вриједности $x > 1$ је позитиван израз

$$x^{2 - lig_a^2 x - \log_a x^2} - \frac{1}{x}\ ?$$

Рјешење. У датим условима, дати израз је дефинисан. Пишемо га $x^{2-\log_a^2 x - \log_a x^2} > x^{-1}$. Због $x > 1$ та неједначина је еквивалентна са $2 - \log_a^2 x - \log_a x^2 > -1 \;\Leftrightarrow\; \log_a^2 x + 2\log_a x - 3 < 0$ одакле слиједи $-3 < \log_a x < 1$. Даље имамо два случаја:

i. $a > 1$, $a^{-3} < x < a$. Али $a > 1 \Rightarrow a^{-3} < 1$ и $x > 1$ дају $1 < x < a$.

ii. $0 < a < 1$, $a < x < a^{-3}$. Али $0 < a < 1 \Rightarrow 0 < a^{+3} < 1$, $a^{-3} > 1$ и $x > 1$ дају $1 < x < a^{-3}$.

Дакле, за $a > 1$ је $1 < x < a$, а за $0 < a < 1$ је $1 < x < a^{-3}$.♦

8. Доказати неједнакост

$$\frac{\log_b a^2}{a+b} + \frac{\log_c b^2}{b+c} + \frac{\log_a c^2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}\,,$$

при чему је $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$ (или $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, $0 < c < 1$).

Рјешење. Примјењујући познату неједнакост између аритметичке и геометријске средине (нпр. Математика I, став 17.2.7.) , пошто је $\log_b a > 0$, $\log_c b > 0$, $\log_a c > 0$ лијева страна дате неједнакости је

$$\frac{2\log_b a}{a+b} + \frac{2\log_c b}{b+c} + \frac{2\log_a c}{c+a} \geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{8\cdot\log_b a\cdot\log_c b\cdot\log_a c}{(a+b)(b+c)(c+a)}} = \frac{6}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq$$

$$\frac{3\cdot 6}{(a+b)+(b+c)+(c+a)} = \frac{9}{a+b+c}\,.♦$$

9. Рјешити једначину

$$2^{|x+2|} - |\,2^{x+1} - 1| = 1 + 2^{x+1}\,.$$

Резултат: $x = -3$ и свако $x \geq -1$.♦