

ТРИГОНОМЕТРИЈА

равна, сферна и хиперболна

Растко Вуковић, проф.
Гимназија Бања Лука

РАСТКО ВУКОВИЋ:
ТРИГОНОМЕТРИЈА - РАВНА, СФЕРНА И ХИПЕРБОЛНА
© Архимед Бања Лука, 2016.

Предговор

Ови текстови су директно преузети из једне моје скрипте завршене маја 2015. године а писане за интерну употребу и израчунавања у теорији релативности. Ти су резултати сада усмеравани и допуњавани тако да буду ближи ученицима средњих школа, јер тригонометрија пре свега у својој основи спада у елементарну математику. Зато што је она важна грана геометрије, део је веома старе и визулене области, затим зато што је скоро свугде присутна у математици и многим њеним применама али и зато што је учимо у средњим школама, верујем да она опстаје у сваком новом ширењу егзактних знања. Та елементарност и ширина су водилца овог приказа тригонометрије.

Са друге стране, желио сам да стару и добро проучену тригонометрију изложим не само свеобухватно, већ и на начин који није просто понављање клишеа многобројних уџбеника. У састав текста је минимално тога преузимано директно из наставних програма за средње школе, а мало је тога и са редовних студија. Посебним квалитетом ове књиге сматрам што је она допуна ове теме на нашем, српском језику. Ако сте познаваоц сличних области математике, верујем, препознаваћете их овде али, надам се, на другачији и занимљив начин.

Циљ ове књиге мање је да она буде уџбеник ученику колико да буде помоћни приручник наставнику, али и то мање него да она буде моја лична свеска остављена на интернету за лакше ми налажење појмова које тако лако заборављам.

Растко Вуковић, фебруар 2016.

ТРИГОНОМЕТРИЈА

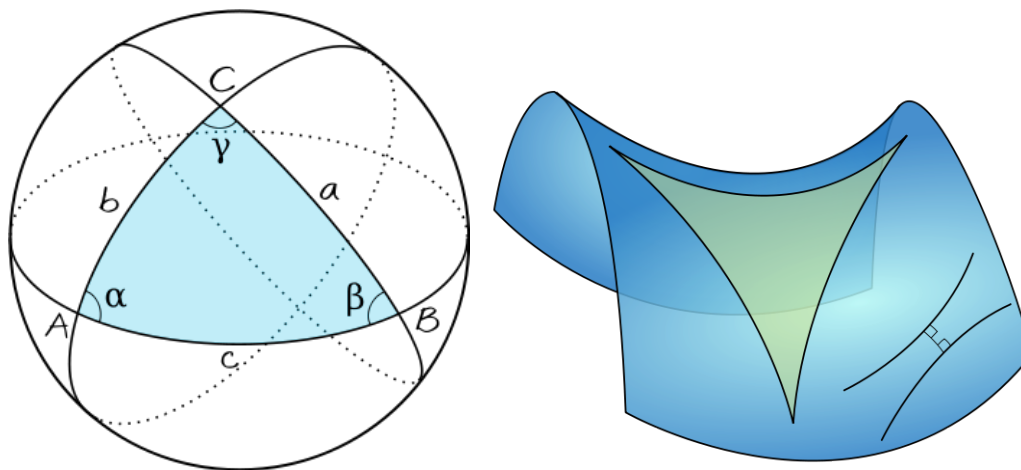
Sadržaj

1 Равна тригонометрија	11
1.1 Талесова теорема	11
1.2 Слични троуглови	13
1.3 Правоугли троугао	19
1.4 Правилни многоугао	24
1.5 Тригонометријска кружница	29
1.6 Решавање троугла	34
1.7 Тангенсна и котангенсна теорема	39
1.7.1 Основни идентитети	41
1.8 Адicione формуле	43
1.9 Идентитети	50
1.10 Опште неједнакости	58
1.10.1 Конвексне функције	58
1.10.2 Јенсенова неједнакост	59
1.10.3 Основне средине	60
1.10.4 Неједнакост усклађивања	63
1.10.5 Коши-Шварцова неједнакост	64
1.10.6 Холдерова неједнакост	66
1.10.7 Неједнакост Минковског	68
1.10.8 Кардинални синус	69
1.11 Посебне неједнакости	72
1.11.1 Тетиве елипсе	73
1.11.2 Аристархова неједнакост	77
1.11.3 Јорданова неједнакост	78
2 Сферна тригонометрија	81
2.0.1 Основне теореме	82
2.1 Географске координате	85
2.2 Површина троугла	89
2.3 Вежбања и задаци	91
3 Хиперболна тригонометрија	131
3.1 Аналитичке дефиниције	132
3.2 Простор-време	137
3.2.1 Вежбе	141
Bibliografija	145

Увод

Историја сматра да су почеци проучавања троуглова били негде у другом миленијуму пре нове ере, у вавилонској и египатској математици¹. Систематско проучавање тригонометријских функција започето је у Античкој Грчкој и Индији, што је затим настављено исламском па западном математиком. Почетак развоја модерне тригонометрије био је у 17. веку у периоду европског просветљења. Израз „тригонометрија“ настао је из грчког језика, спојем речи „троугао“ и „мерење“, али би јој данас више одговарао спој речи геометрија и алгебра.

Три су основне геометрије у математици, хронолошки према открићу: равна, сферна и хиперболна. Према истраживачима, прву називамо Еуклидском² (око 300. п.н.е.), другу понекад Гаусовом³ или Римановом⁴, а трећу углавном геометријом Лобачевског⁵. Друга и трећа су унутрашње геометрије сфере и седласте површи, на слици 1. То су криве површи чије праве сматрамо линијама дуж најкраћих растојања између датих тачака.



Slika 1: Троуглови сферне и хиперболне геометрије

Ретко се зна да је прву књигу о сферама написао старогрчки астроном и математичар Теодозије⁶ из Битиније (око 160 - 100. п.н.е.) објаснивши геометрију сфера и да би по њему могли називати сферну геометрију. Такође, да су хиперболне тригонометријске функције развијане за потребе геометрије Лобачевског.

Геометријско истраживање Лобачевског је показало да све разлике у ове три геометрије чини само тзв. Еуклидов *пети постулат*. Две праве су *паралелне* ако леже у истој равни и немају заједничких тачака. Сама ова дефиниција паралелности важи у све три геометрије, али поменути постулат у равној геометији гласи: „За дату тачку ван дате праве постоји једна и само једна права паралелна датој правој“. У сферној и хиперболној геометрији имамо одговарајуће исказе: „Нема паралелних правах“ и „Кроз дату тачку пролазе бар две праве паралелне са датом“. Све остале аксиоме су

¹Ахмесов, или Бремнер-Рајндов папирус.

²Euclid: <http://en.wikipedia.org/wiki/Euclid>

³Carl Friedrich Gauss (1777-1855), немачки математичар.

⁴Bernhard Riemann (1826-1866), немачки математичар.

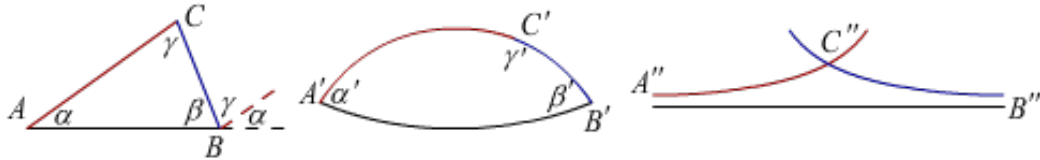
⁵Nikolai Lobachevsky (1792-1856), руски математичар.

⁶Theodosius: http://en.wikipedia.org/wiki/Theodosius_of_Bithynia

ТРИГОНОМЕТРИЈА

тим трима геометријама једнаке. Геометрија која садржи све остале аксиоме, осим петог постулата, назива се *апсолутна геометрија*.

Приметимо да су праве линије сфере највеће кружнице сфере. Оне формирају троугао ABC на слици 1 лево чији збир унутрашњих углова зависи од величине троугла али је увек већи од испруженог угла ($\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$). Такође је променљив и збир унутрашњих углова троугла на седластој површи, а на истој слици десно се види да је он мањи од испруженог угла. У равној геометрији узимамо да је збир углова произвољног троугла увек једнак испруженом.



Slika 2: Равни, сферни и хиперболни троугао.

На слици 2 лево је троугао ABC равне геометрије са унутрашњим угловима α , β и γ . У тој геометрији су углови са паралелним крацима једнаки, па је њихов збир испружени угао (у темену B) који означавамо 180° . Двоугао у средњој од тих слика је заправо троугао $A'B'C'$ сферне геометрије, чији је угао $\angle C' = \gamma'$ испружен, а остала два угла нису нуле ($\angle A' = \alpha'$ и $\angle B' = \beta'$), па је збир сва три угла већи од испруженог. Унутрашњи угао $\angle C''$ троугла $A''B''C''$ је мањи од испруженог, а остала два ($\angle A''$ и $\angle B''$) су нуле, па је збир сва три мањи од испруженог. Збир унутрашњих углова Еуклидовог троугла увек је 180° , сферног и хиперболног је променљив, код сферног је увек већи од 180° , код хиперболног мањи.

Кроз дату тачку C'' ван дате праве $A''B''$ у хиперболној геометрији увек је могуће повући две паралеле $C''A''$ и $C''B''$ (в. слику 2), у сферној није могуће повући нити једну, а у равној геометрији је могуће повући тачно једну. Подсећам, две праве су паралелне ако се поклапају или леже у истој равни а немају заједничких тачака. Мало мање очигледна последица овога је да је однос обима и пречника круга у равној геометрији тачно једнак константи π , да је тај однос у сферној геометрији мањи, а у хиперболној већи. Такође, једино у равној геометрији важи Питагорина теорема (за све правоугле троуглове).

Лобачевски је ове варијације аксиоме паралелности са последицама нарочито истражио у својој геометрији. Он је радио „чисто геометријски” и нашао примере дефинисања своје геометрије унутар Еуклидове⁷ и обратно, примере дефинисања Еуклидове геометрије у његовој, чиме је доказао да су те две логички равноправне. Хиперболна геометрија је непротивречна ако и само ако је таква равна. Исто важи и за сферну геометрију у односу на равну, због чега су све три једнако тачне.

Под класичним третирањем геометрије подразумевају се методе доказивања из Еуклидових Елемената⁸ са геометријским конструкцијама само са шестаром и лењиром без ознака. Такву геометрију називамо и синтетичком, аксиоматском, или *чистом геометријом*. Према Клајну⁹, синтетичка геометрија проучава фигуре онакве какве су, без употребе формула.

⁷ рецимо тетиве дате кружнице из равне можемо прогласити правима хиперболне

⁸Elements: <http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf>

⁹Felix Klein: http://en.wikipedia.org/wiki/Felix_Klein

У последњих неколико векова су се у математици појавили другачији приступи истим геометријским фигурама. Најпознатија међу њима је *аналитичка геометрија*, називана и координатна, па и Декартова геометрија. Она проучава геометријске фигуре употребом координатног система и алгебре. Појавила се и Гаусова, *диференцијална геометрија* кривих и површи у 3-дим простору, изложена на савремен начин у књизи [3]. Њена грана је Риманова апсолутна геометрија, која ради са Римановом метриком и одговарајућим глатким многострукостима попут линија, или површи. Ова последња геометрија заједно са тензорским рачуном, била је математичка основа Ајнштајнове опште теорије релативности.

Ајнштајн је претпоставио да материја закривљује простор, те да ту закривљеност доживљавамо као гравитациону силу. Колико год нам је та његова претпоставка изгледала недорађена од саме почетне идеје па до данас, утолико више су нас изненађивале експерименталне потврде њених последица. У књизи Природа времена¹⁰ показано је да Ајнштајнова очекивања иако су се показала тачним у многим мерењима, нису остала сасвим доследна. Природа није вођена жељеним високим степеном детерминизма, нити су јој четири димензије простор-времена довољне. То су данас већ шире познате примедбе на Ајнштајнов концепт физичког универзума, али следећа из те књиге није. Путања слободног пада у гравитационом пољу и уопште инерцијално кретање тела, заправо је путања константне (максималне) ентропије, а то је такође и путања максималне вероватноће релативно у односу на дато тело.

Ово откриће затим има последицу да се принцип најмањег дејства у физици може превести у принцип штедне информације, односно да је Лагранжова функција (разлика кинетичке и потенцијалне енергије тела) поопштена информација. О тој поопштеној информацији прво сам писао у књизи Информација перцепције¹¹, дефинишући је као слободу $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$, односно као количину могућности коју нам дају чула и перцепције уопште. Та се слобода састоји из вектора интелигенције \mathbf{i} и хијерархије \mathbf{h} , првог способности јединке да користи дате могућности, а другог способности средине да јој те могућности ускрати.

Испоставља се да је слобода ℓ утолико већа што су компоненте вектора \mathbf{i} и \mathbf{h} боље уређене, када већим компонентама првог вектора одговарају веће компоненте другог, те да Шенонова информација (збир производа вероватноћа дате расподеле са њиховим логаритмима) у својим ограничењима има оптималну вредност. Такође, да адаптацијом јединке на одговарајућа ограничења расте слобода јединке у условима њеног окружења. Последице су, рецимо, спонтано јачање правних система у демократијама, или повећање сложености организама еволуцијом. Тежећи константној слободи $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$, која се адаптацијом (спонтано) повећава, јединка са датим \mathbf{i} , својим способностима кориштења слобода, тежи повећању ограничења \mathbf{h} која би јој могла наметнути средина. Међутим, након нових ограничења долази до нових адаптација и до нових потреба за даљњим ограничењима.

Без обзира што су поменуте формуле нове, непроверене и неприхваћене у науци, оне указују на нове геометрије, којима се у овој књизи ипак нећемо бавити. Приметимо само да праве линије можемо схватати и као путање највеће вероватноће у сложеним случајним системима који су „хронолошки“ поредани. Нарочито зато што такве имају упориште у реалности у којој се тригонометрија увек изнова фантастично и логично упетља, ова разматрања добијају нову стару тежину.

¹⁰В. [14], стр. 59. и даље

¹¹В. [13]

ТРИГОНОМЕТРИЈА

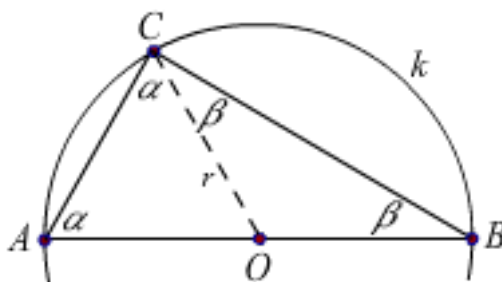
Glava 1

Равна тригонометрија

Под равном тригонометријом подразумеваћемо оно што се из тригонометрије учи у средњим школама, укључујући и неке њене непосредне примене са којима се упознајемо на факултетима. Те додатке чине пре свега лимеси, изводи и редови у вези са тригонометријским функцијама.

1.1 Талесова теорема

Талес из Милета (око 624-547. г. п.н.е.) био је активан као филозоф, математичар и државник, а убраја се и у једног од Седам мудраца. У свом филозофском учењу он је покушао да разноврсност појава сведе на једну једину праматерију - воду. У математици је познат по *Талесовој теорем*. Није сигурно да ли је своја сазнања изнео у неком спису јер ниједан такав није сачуван. Најпознатији ученик му је био филозоф Анаксимандар из Милета.



Slika 1.1: Периферни угао над пречником је прав.

Под Талесовом теоремом се данас подразумевају различита геометријска тврђења, али најчешће она о углу под којим се са кружнице види њена тетива. Кружница $k(O, r)$ је геометријско место тачака у равни једнако удаљених од фиксне тачке O за удаљеност r , као на слици 1.1. Фиксну тачку O називамо *центром* а константну удаљеност r називамо *полупречником* (половином пречника) кружнице. Тачке A, B и C припадају кружници k , што пишемо $A, B, C \in k$. На слици су тачке A, O и B колинеарне (леже на истој правој) а O је између A и B , што пишемо $A - O - B$. Дуж AB је пречник који се из тачке C види под углом $\angle C = \angle ACB = \angle A + \angle B = \alpha + \beta$. Наиме, из дефиниције кружнице следи да су троуглови AOC и COB једнакокраки, а такви на основицама,

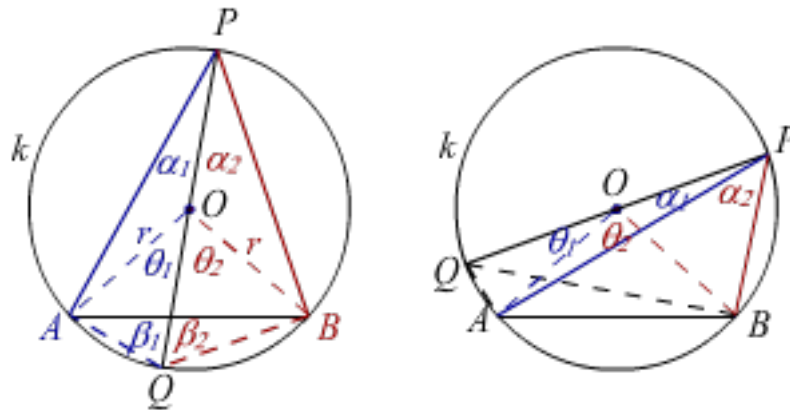
ТРИГОНОМЕТРИЈА

AC и CB , имају једнаке углове (редом α и β). Како је збир углова у троуглу испружен угао, то је угао у темену C једнак половини испруженог, тј. прав.

Погледајмо још један доказ да је периферни угао над пречником прав. На истој слици 1.1 направимо рефлексију троугла ABC преко пречника AB . Тачка C пада у тачку $D \in k$ при чему је $AC \parallel BD$, па је четвороугао $ADBC$ паралелограм. Како су обе линије AB и CD пречници кружнице k и према томе једнаке дужине, то је тај паралелограм правоугаоник. Сви углови правоугаоника су прави.

Помоћу Талесове теореме, на пример, конструишемо тангенту на дату кружницу $k(O, r)$ тако што конструишемо другу кружницу $k'(O', r')$ која садржи центар прве и кроз пресечну тачку две кружнице $A \in k \cap k'$ повучемо праву ка тачки $B \in k'$ таквој да је $O - O' - B$. Права AB је тангента на k .

Овде подразумевамо да је кружница линија а да је круг њена унутрашњост укључујући и кружницу, периферију. Знамо да је тетива дуж која спаја две тачке на периферији, а да је периферни угао онај под којим се види тетива са периферије. Централни угао тетиве је угао под којим се дата тетива види из центра круга. На поменутој слици имамо централне углове $\angle BOC = 2\alpha$ и $\angle COB = 2\beta$ над тетивама које се виде са периферије под угловима редом β и α . Приметимо да су централни углови двоструко већи од одговарајућих периферних. То су посебни случајеви опште Талесове теореме о угловима круга.



Slika 1.2: Централни угао је двоструко већи од периферног.

На слици 1.2 лево, централни угао θ двоструко је већи од периферног α

$$\theta = \angle AOB = \theta_1 + \theta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2\angle APB = 2\alpha, \quad (1.1)$$

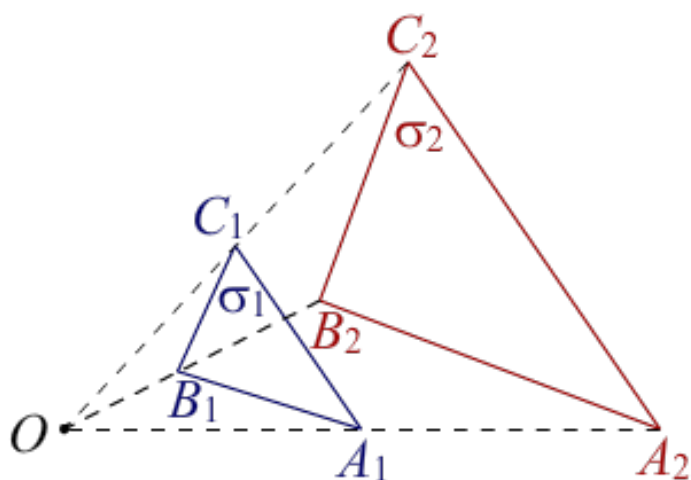
јер је $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OP} = \overline{OQ} = r$, где је r полупречник круга, а углови на основици једнакокраких троуглова су једнаки. Углови са различитих страна тетиве AB су комплементни, $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = 90^\circ$, па су (збирни) периферни углови са различитих страна тетиве суплементни, $\alpha + \beta = 180^\circ$. Како је централни угао над датом тетивом непроменљив мењањем положаја тачке на периферији добијамо увек исти периферни угао.

На истој слици десно, одузимањем налазимо аналогно (1.1) и долазимо до истог закључка. Централни угао је двоструко већи од периферног над истом тетивом. Другим речима, сви периферни углови датог круга над датом тетивом међусобно су једнаки. То је општа Талесова теорема о угловима круга.

1.2 Слични троуглови

Теорема о сличним троугловима се понекад такође приписује Талесу. Прво ћемо је описати а затим и доказивати. Она са претходном, на слици 1.1, због чињенице да тачка C обилазећи кружницу k гради све могуће правоугле троуглове до сличности са њима, представља основу данашње тригонометрије.

Попут претходне, Талесова теорема о сличности важи само у Еуклидској геометрији. На слици 1.3 су два слична троугла $\Delta A_1B_1C_1 \in \sigma_1$ и $\Delta A_2B_2C_2 \in \sigma_2$ у две паралелне равни $\sigma_1 \parallel \sigma_2$. Када су одговарајуће стране таквих троуглова паралелне, тј. ако је $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $B_1C_1 \parallel B_2C_2$ и $C_1A_1 \parallel C_2A_2$, тада су односи дужина одговарајућих страница константни (за $X, Y \in \{A, B, C\}$ је $\overline{X_1Y_1} : \overline{X_2Y_2} = \kappa = \text{const.}$), али и обрнуто, ако су односи одговарајућих страница константни онда су оне паралелне. Кажемо и да је први троугао пресликан у други *хомотетијом*. На слици 1.3 то је хомотетија са коефицијентом $\kappa = 2$.



Slika 1.3: Слични троуглови

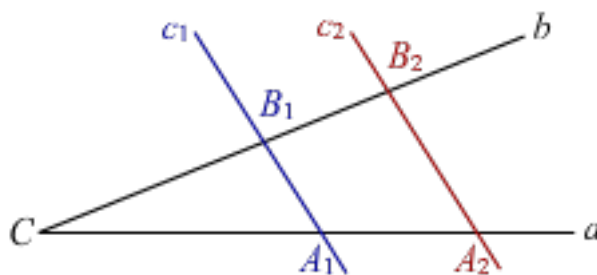
Хомотетија пресликава троугао у њему сличан троугао при чему оригинал и копија имају једнаке одговарајуће углове и пропорционалне одговарајуће странице. Датом углу одговара њему насупрмна страница. На слици 1.3 имамо, на пример, $\angle A_2B_2C_2 = \angle A_1B_1C_1 = \beta$, или $\overline{A_2C_2} = \kappa \cdot \overline{A_1C_1}$, или $\overline{OA_2} = \kappa \cdot \overline{OA_1}$. Из паралелности равнина $\sigma_1 \parallel \sigma_2$, следи паралелност одговарајућих страница троуглова, рецимо $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

Пример хомотетије је пројектовање слике са филма на филмско платно. Такође, то је хватање слике пропуштене кроз објектив на застор фото апарата.

Троуглови не морају бити у различитим равнинама да бисмо имали хомотетију и сличност. Ако се две равни на датој слици поклапају, $\sigma_1 = \sigma_2$, опет ћемо имати хомотетију само ако је $\overline{OX_2} : \overline{OX_1} = \kappa$ за сваку тачку $X \in \{A, B, C\}$. Тада ће и одговарајуће странице ових троуглова бити у истом односу и биће паралелне, а одговарајући углови троуглова биће једнаки. Важи и обрнуто, у следећем смислу.

На слици 1.4 праве a и b секу се у тачки C , а обе су пресечене правима c_1 и c_2 тако да је $c_i \cap a = A_i$ и $c_i \cap b = B_i$ за оба индекса $i = 1, 2$. Талесова теорема о сличности каже, ако су пресечне праве паралелне, $c_1 \parallel c_2$, тада су одговарајући углови троуглова A_1B_1C и A_2B_2C једнаки и обрнуто, ако су ти углови једнаки онда су пресечне праве паралелне. Тада кажемо да су ови троуглови A_iB_iC слични.

ТРИГОНОМЕТРИЈА



Slika 1.4: Слични троуглови.

Аналогна је ситуација са троугловима ΔOA_1B_1 и ΔOA_2B_2 са претходне слике, независно од тога да ли је $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Када су одговарајући углови два дата троугла једнаки онда су им одговарајуће странице паралелне ($A_1B_1 \parallel A_2B_2$). Важи и обрнуто, ако су троугловима одговарајуће странице паралелне онда су им одговарајући углови једнаки. Тада кажемо да су дата троуглови слични и пишемо

$$A_1B_1 \parallel A_2B_2 \iff \Delta OA_1B_1 \sim \Delta OA_2B_2. \quad (1.2)$$

То је Талесова теорема о сличности. Овакви ставови се доказују у уџбеницима средњошколске математике на различите начине. Када су ти докази „чисто геометријски“ тада се наглашава сагласност теорема са аксиомама, али и комплетност аксиоматике те њена сагласност са „очигледним“.

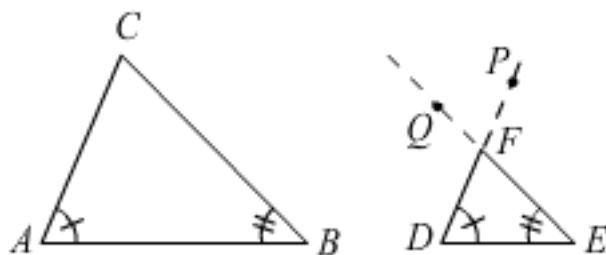
Погледајмо прво основна места „чисто геометријских“ доказа особина сличности, а затим и неке изведбе. Пре тога приметимо да два троугла сматрамо сличним чим имају једнаке одговарајуће углове. То је правило УУУ, једно од три која се уче већ у основној школи. Поред поменутог имамо правило ССС (два су троугла слична када имају пропорционалне одговарајуће стране) и правило СУС (два су троугла слична ако имају пар страница у истој пропорцији унутар којих је једнак угао).

За прво од поменутих правила важи, ако два троугла имају два једнака угла, онда им је једнак и трећи, јер је збир три угла троугла константан (180°). Према томе, два троугла су слична када имају два једнака угла. Овај закључак се примењује у следећем примеру - на конструкцију троугла сличног датом. Сматра се да су нам (из основне школе) познате основне геометријске конструкције, или бар само две од њих: пренос дужи и пренос угла.

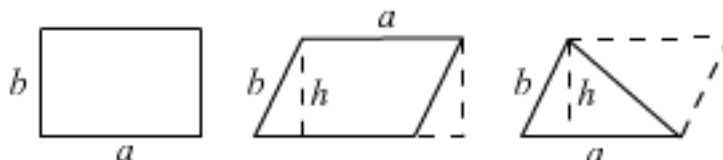
Пример 1.2.1. *Дати су троугао ABC и дуж DE . Конструисати њему сличан троугао DEF .*

Решење. На слици 1.5 виде се дата троугао ABC и дуж DE . Дата дуж лежи на правој која раздваја дату раван на две полуравни. Изаберимо једну од тих полуравни. У њој конструишимо углове $\angle EDP = \angle BAC$ и $\angle DEQ = \angle ABC$. Пресек правих DP и EQ је тачка $F = DP \cap EQ$. Троугао DEF је сличан датом. \square

Слични троуглови имају не само једнаке одговарајуће углове већ и пропорционалне одговарајуће странице. Еуклид је овај други део доказивао у својој 6. књизи Елемената, разматрајући површине. Он је то урадио полазећи од својих постулата и првих последица, а ми ћемо овде његов рад резимирати позивајући се на очигледно.



Slika 1.5: Konstrukcija trougla slicnog datom.



Slika 1.6: Povrsina pravougaonika, paralelograma i trougla.

На слици 1.6 лево видимо правоугаоник површине $\Pi_1 = ab$, у средини паралелограм површине $\Pi_2 = ah$ који се своди на правоугаоник исецањем и премештањем троугла¹, десно је троугао $\Pi_3 = \frac{1}{2}ah$ који је половина правоугаоника. Површина троугла је половина производа основице и висине на ту основицу троугла.

Замислимо (нацртајте) сада троуглове ABC и ADC , такве да је тачка D на страници BC . Како они имају исту висину h из темена A на основице $a' = \overline{DC}$ и $a = \overline{BC}$, добијамо:

$$\Pi(ABD) : \Pi(ABC) = \frac{1}{2}a'h : \frac{1}{2}ah = a' : a = \overline{BD} : \overline{BC}. \quad (1.3)$$

Ово ћемо употребити за доказ сличности $\Delta A_1B_1C \sim \Delta A_2B_2C$ на слици 1.4, када је $c_1 \parallel c_2$. Пре тога погледајмо теорему о бочном пресеку, за коју ћемо користити Пашову аксиому „ако права улази у троугао она мора и изаћи из троугла“, која је у тачном изразу мало опширнија².

Теорема 1.2.2 (Теорема раздвајања). *Нека је дат троугао A_1B_1C са основицом A_1B_1 на правој c_1 . Нека је права c_2 паралелна са c_1 и нека она сече страницу A_1C у унутрашњој тачки A_2 , као на слици 1.7. Тада c_2 такође пресеца B_1C у унутрашњој тачки B_2 и важи пропорција $\overline{A_1C} : \overline{A_2C} = \overline{B_1C} : \overline{B_2C}$.*

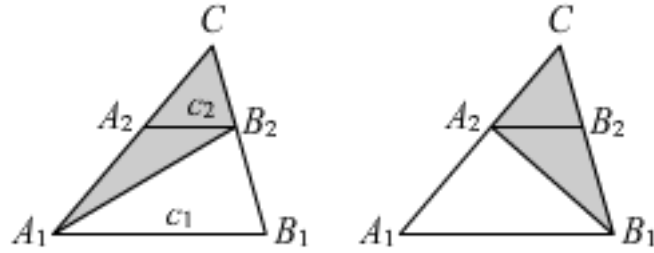
Доказ. Зато што је c_2 паралелна са c_1 она не садржи A_1 ни B_1 , а зато што пресеца A_1C изнутра она не садржи нити C . Према Пашовој аксиоми, права c_2 пресеца и страницу B_1C у некој тачки B_2 која је из истих претходних разлога унутрашња. Посматрајмо дуж A_1B_2 и троугао A_1B_2C 1.7 лево, затом троугао A_2B_1C на тој слици десно.

Из (1.2) следи пропорција $\Pi(A_2B_2C) : \Pi(A_1B_2C) = \overline{A_2C} : \overline{A_1C}$, а аналогно добијамо и пропорцију $\Pi(A_2B_2C) : \Pi(A_2B_1C) = \overline{B_2C} : \overline{B_1C}$. Међутим, троуглови $A_1B_2A_2$ и $B_1B_2A_2$ имају заједничку основицу A_2B_2 и исту висину, па имају једнаке површине. Отуда $\Pi(A_1B_2C) = \Pi(A_2B_1C)$, па је $\overline{A_2C} : \overline{A_1C} = \overline{B_2C} : \overline{B_1C}$. То је оно што је и требало доказати. \square

¹Једнакост површина исеченог (лево) и додатог (десно) троугла доказује се ставовима подударности.

²Pasch's axiom: https://en.wikipedia.org/wiki/Pasch%27s_axiom

ТРИГОНОМЕТРИЈА



Slika 1.7: Теорема о бочном пресеку.

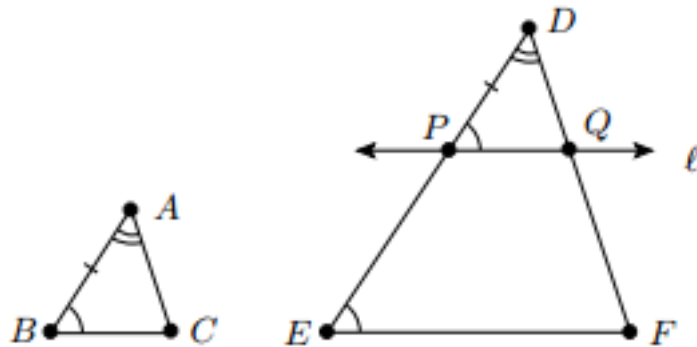
Тако долазимо до главне теореме о сличности троуглова, уз слику 1.8. У доказу ћемо користити познате ставове подударности троуглова³.

Теорема 1.2.3 (Основна теорема). *Ако је $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, тада је:*

$$\overline{AB} : \overline{DE} = \overline{AC} : \overline{DF} = \overline{BC} : \overline{EF}.$$

Доказ. Нека је $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Када би било $\overline{AB} = \overline{DE}$, тада би важила подударност $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, па је теорема тачна јер су све одговарајуће дужине једнаке. Затим претпоставимо $\overline{AB} \neq \overline{DE}$. Једна од ових страница је већа, рецимо $\overline{DE} > \overline{AB}$. Доказаћемо прву од тражених једнакости, а доказ осталих је исти.

Бирајмо тачку P у унутрашњости DE тако да $\overline{DP} = \overline{AB}$. Нека је ℓ права кроз P паралелна EF . Из претходне теореме следи да ℓ пресеца DF у унутрашњој тачки Q , при чему је $\overline{DP} : \overline{DE} = \overline{DQ} : \overline{DF}$. Сада је угао $\angle DPQ$ једнак углу $\angle E$ који је по претпоставци једнак $\angle B$. Из претпоставке такође следи $\angle D = \angle A$. Због $\overline{DP} = \overline{AB}$ имамо подударност $\triangle DPQ \cong \triangle ABC$. Сменом $\overline{DP} = \overline{AB}$ и $\overline{DQ} = \overline{AC}$ у последњу пропорцију, добијамо прву једнакост тражене пропорције. \square



Slika 1.8: Теорема о сличности троуглова.

То је једна од најважнијих теорема Еуклидове геометрије, која ће се наћи на разне начине доказана у скоро свакој опширнијој књизи геометрије. Неке њене непосредне последице су видљиве у следећим примерима.

Пример 1.2.4. *Ако је $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, тада постоји позитиван број r такав да је $\overline{AB} = r \cdot \overline{DE}$, $\overline{AC} = r \cdot \overline{DF}$ и $\overline{BC} = r \cdot \overline{EF}$.*

³Congruence: [https://en.wikipedia.org/wiki/Congruence_\(geometry\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Congruence_(geometry))

Упутство. Дефинишите $r = \overline{AB} : \overline{DF}$, па употребите претходну теорему. \square

Следећи примери су став СУС (страница-угао-страница) сличности троуглова, затим ССС.

Пример 1.2.5 (СУС). Ако су $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$ такви троуглови да важи $\angle A = \angle D$ и $\overline{AB} : \overline{DE} = \overline{AC} : \overline{DF}$, тада $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Упутство. Ако је $\overline{AB} < \overline{DE}$, бирамо тачку $P \in DE$ тако да $\overline{DP} = \overline{AB}$ и праву ℓ кроз P паралелну са EF . Следи да ℓ просеца унутрашњост DE у тачки Q , а помоћу теореме раздвајања, показује се да $\triangle ABC \cong \triangle DPQ$. \square

Пример 1.2.6 (ССС). Ако су $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$ такви троуглови да важи $\overline{AB} : \overline{DE} = \overline{AC} : \overline{DF} = \overline{BC} : \overline{EF}$, тада $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Упутство. Радите слично претходном. \square

Основна и остале теореме о сличности дају крила алгебри и векторима. На пример вектор \mathbf{r} множен бројем λ постаје λ пута увећан тако што је свака од његових компоненти λ пута увећана. Рецимо у Декартовом правоуглом систему координата $Oxyz$ јединични вектори координатних оса су *ортови* \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} па је вектор положаја $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Множењем бројем $\lambda \in \mathbb{R}$ тај вектор постаје $\lambda\mathbf{r} = (\lambda x)\mathbf{i} + (\lambda y)\mathbf{j} + (\lambda z)\mathbf{k}$ због чега можемо писати скраћено $\mathbf{r} = (x, y, z)$ односно $\lambda\mathbf{r} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

Други пример. Линеарна пресликавања функцијом \mathcal{L} , посебно линеарност (а то су хомогеност и адитивност) вектора, само су облици теореме о сличности. Подсећам, ако су v_1 и v_2 произвољни елементи векторског простора V над телом скалара Φ , тада је \mathcal{L} линеарни оператор из V у неки векторски простор (обично такође V) када је

$$\mathcal{L}(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1\mathcal{L}v_1 + c_2\mathcal{L}v_2, \quad (1.4)$$

за произвољне скаларе $c_1, c_2 \in \Phi$. Када је V простор орјентисаних дужи, а тело скалара је скуп реалних бројева, тј. $\Phi = \mathbb{R}$, ова пресликавања су хомотетије.

Пример 1.2.7. Показати на слици 1.4 да за векторе орјентисане дужи важи Талесова теорема о сличности.

Решење. Дефинишемо векторе $\vec{v}_a = \overrightarrow{CA_1}$, $\vec{v}_b = \overrightarrow{CB_1}$, $\vec{u}_a = \overrightarrow{CA_2}$ и $\vec{u}_b = \overrightarrow{CA_2}$. Тада је $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{v}_b - \vec{v}_a = \vec{c}_1$ и $\overrightarrow{A_2B_2} = \vec{u}_b - \vec{u}_a = \vec{c}_2$.

Ако је $\vec{c}_1 \parallel \vec{c}_2$, тада је $\vec{c}_2 = k\vec{c}_1$ за неко $k \in \mathbb{R}$, затим:

$$\vec{u}_b - \vec{u}_a = k(\vec{v}_b - \vec{v}_a), \quad (1.5a)$$

$$\vec{u}_b - k\vec{v}_b = \vec{u}_a - k\vec{v}_a, \quad (1.5b)$$

што је могуће само када су на обе стране једнакости нуле, када су правци a и b различити. Отуда $\vec{u}_b = k\vec{v}_b$ и $\vec{u}_a = k\vec{v}_a$, па имамо хомотетију.

Обрнуто, ако имамо хомотетију $\vec{u}_b = k\vec{v}_b$ и $\vec{u}_a = k\vec{v}_a$, из ње следи (1.5b) па (1.5a), а отуда $\vec{c}_1 \parallel \vec{c}_2$. \square

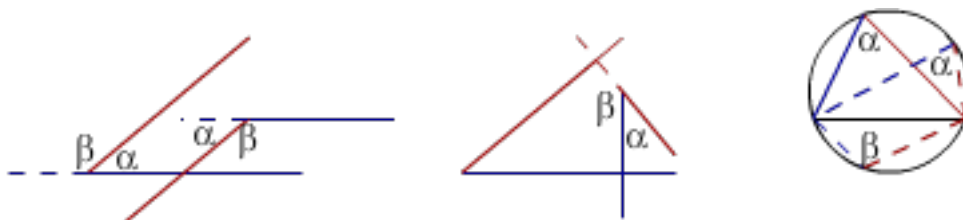
Једноставно речено, ако су пресечне праве (c_1 и c_2) паралелне онда су странице троуглова (A_1B_1C и A_2B_2C) пропорционалне и обрнуто, ако су странице троуглова пропорционалне онда су пресечне праве паралелне. Томе можемо додати:

- i. углови са паралелним крацима су једнаки или су суплементни;

ТРИГОНОМЕТРИЈА

- ii. углови са окомитим крацима су једнаки или су суплементни;
- iii. периферни углови над истом тетивом су једнаки или су суплементни.

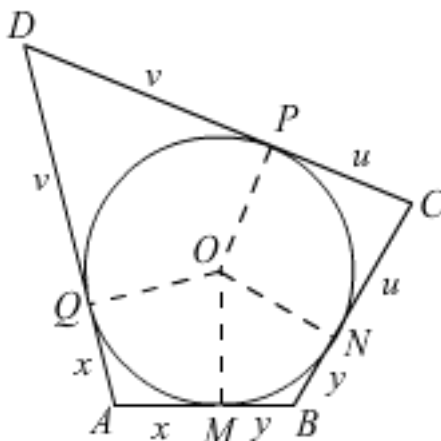
То су теореме о једнаким и суплементним угловима, представљене сликом 1.9. Иначе, углови су суплементни ако им је збир испружен угао.



Slika 1.9: Паралелни, окомити и периферни углови.

Ове теореме се у геометрији често користе. Рецимо, из треће (iii) непосредно следи позната особина *тетивних четвороуглова* (чије су стране тетиве круга), да су им наспрамни углови суплементни. Како збир сва четири угла четвороугла износи два пуна угла, то можемо рећи, четвороугао је тетиван ако и само ако су му зборови наспрамних углова једнаки.

Дуално тетивном имамо *тангентни четвороугао* (чије су стране тангенте круга), онај у који је могуће уписати круг. На слици 1.10 се види због чега су код тангентног четвороугла зборови наспрамних страница једнаки.



Slika 1.10: Тангентни четвороугао $ABCD$.

Из тачке A су на уписану кружницу повучене тангенте чији су одсечци до додира са кружницом једнаки x . Из тачке B тангентни одсечци су y , из тачке C и D редом u и v . Странице тангентног четвороугла $ABCD$ су $\overline{AB} = x + y$, $\overline{BC} = y + z$, $\overline{CD} = y + v$ и $\overline{DA} = v + x$, па је

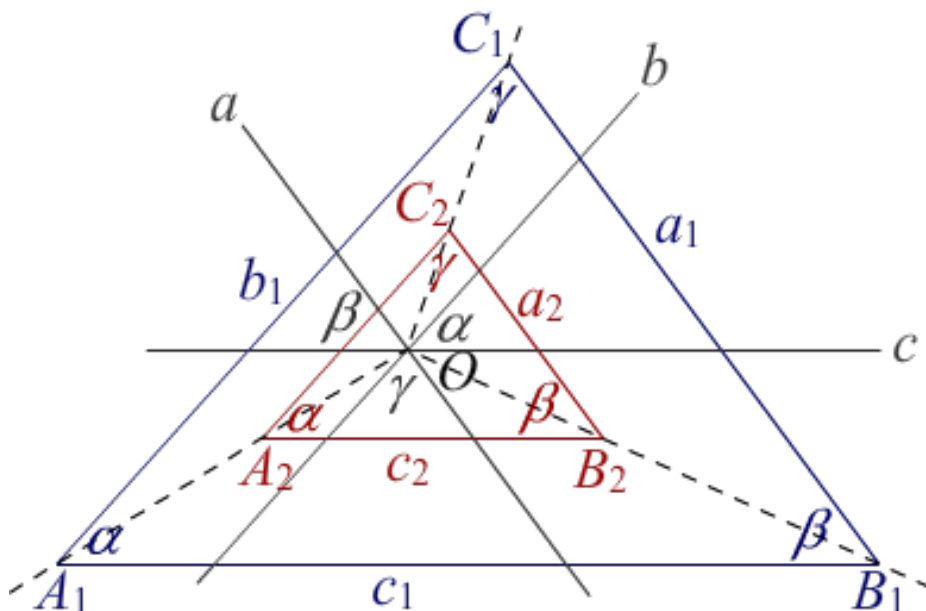
$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DA}. \quad (1.6)$$

Дакле, зборови наспрамних страница тангентног четвороугла су једнаки.

У наставку покушајмо видети зашто је збир унутрашњих углова еуклидског троугла испружен угао, на начин којим ћемо лакше разумети и зашто у не-еуклидској геометрији не важи Талесова теорема о сличности.

1.3 Правоугли троугао

Хомотетију из тачке O , као на слици 1.11, применимо на бесконачан низ сличних троуглова $\Delta A_1 B_1 C_1 \sim \Delta A_2 B_2 C_2 \sim \dots \Delta A_n B_n C_n \sim \dots$, где индекс $n \in \mathbb{N}$ пролази скупом природних бројева, а троуглови које означава имају све краће и краће странице до нуле. Сваки од тих троуглова има исте унутрашње углове α , β и γ , са крацима стално паралелним правама a , b и c које пролазе исходиштем O .



Slika 1.11: Доказ да је $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Углови са паралелним крацима су једнаки (или су суплементни), па је такав и угао $\angle bOa = \gamma$. На истој слици видимо испружен угао $\angle cOc$, односно:

$$180^\circ = \angle cOb + \angle bOa + \angle aOc = \alpha + \gamma + \beta.$$

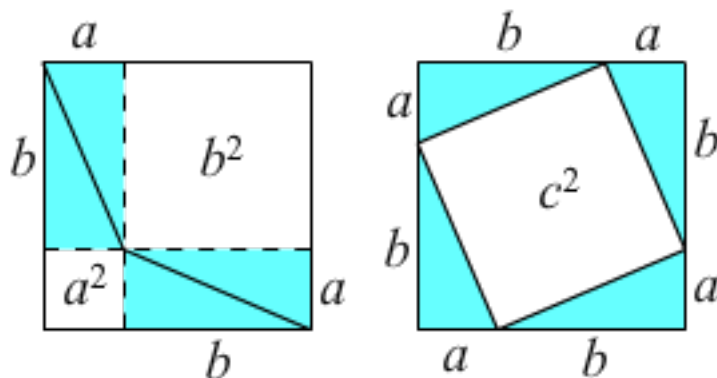
Низ је генерисан произвољним троуглом, па је збир унутрашњих углова сваког троугла 180° . Са друге стране, како збир углова троугла у не-еуклидским геометријама није 180° , то онда ни хомотетија није могућа!

Теорема о сличности даје следећу важну особину правоуглим троугловима: у еуклидском простору су сви правоугли троуглови слични, ако имају по један оштар угао једнак. То значи да су све три странице и сва три угла правоуглог троугла одређена са једним његовим оштрим углом, рецимо α наспрам катете a , и једном његовом страницом, рецимо хипотенузом c тј. страницом наспрам правог угла.

Нека је дат произвољан правоугли троугао, са катетама a , b и хипотенузом c . На слици 1.12, видимо доказ Питагорине теореме помоћу површина. Четири сенчена и подударна правоугла троугла су са слике лево премештена на позиције десно. Несенчене унутрашњости квадрата са страницама $a + b$ имају једнаке површине на обе слике, одакле једнакост:

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{1.7}$$

То је Питагорина теорема.



Slika 1.12: Доказ Питагорине теореме.

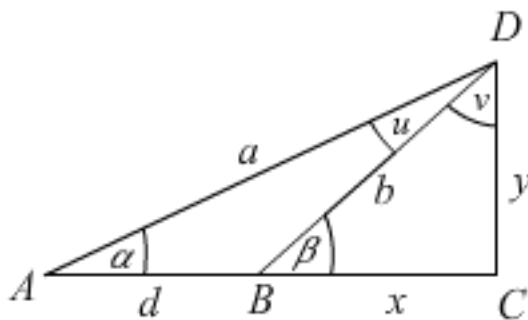
Два правоугла троугла са истим оштрим углом α имаће пропорционалне одговарајуће странице, односно имаће исте количнике:

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha, \quad \frac{b}{c} = \cos \alpha, \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (1.8)$$

Ови количници се називају *синус*, *косинус* и *тангенс* угла алфа. На правоуглом троуглу $B CD$ на слици 1.13 налазимо:

$$\sin \beta = \cos v = \frac{y}{b}, \quad \cos \beta = \sin v = \frac{b}{x}, \quad \operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} v = \frac{y}{x}, \quad (1.9)$$

што значи да преласком на комплементне углове $\beta + v = 90^\circ$ синус прелази у косинус, косинус у синус и тангенс у *котангенс*. Такође, тада котангенс прелази у тангенс. Тангенс је количник наспрамне и налегле катете датог угла, котангенс је реципрочно, количник налегле и наспрамне катете.



Slika 1.13: Правоугли троуглови.

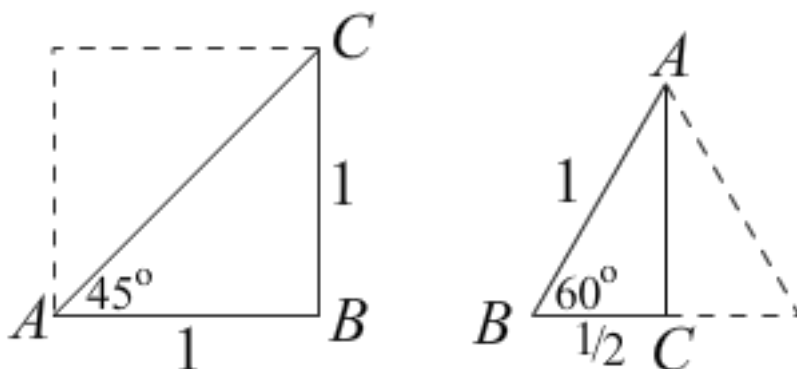
Слику 1.13 можемо протумачити и овако. На једној обали реке се налази дрво CD висине y које се са друге обале реке из две тачке A и B удаљене d види под угловима редом $\alpha = \angle CAD$ и $\beta = \angle CBD$. Ширина реке је $x = \overline{BC}$.

Пример 1.3.1. Наћи ширину реке x и висину дрвета y на слици 1.13, ако су углови елевације $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 45^\circ$, а удаљеност $d = 10$ метара.

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Решење. Са слике читамо $d + x = y \operatorname{ctg} \alpha$ и $x = y \operatorname{ctg} \beta$. То је линеарни систем једначина из којег лако налазимо $x = \frac{d}{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1} = 13,66$ и $y = \frac{d}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta} = 13,66$. Дакле, висина дрвета једнака је ширини реке а то је 13,66 метара. \square

Правоугли троугао са једним оштрим углом 45° мора имати и други оштар угао 45° , јер су та два комплементна. То је половина квадрата као на слици 1.14 лево. На тој слици десно је једнакостраничан троугао подељен висином у два правоугла троугла са комплементним оштрим угловима 30° и 60° .

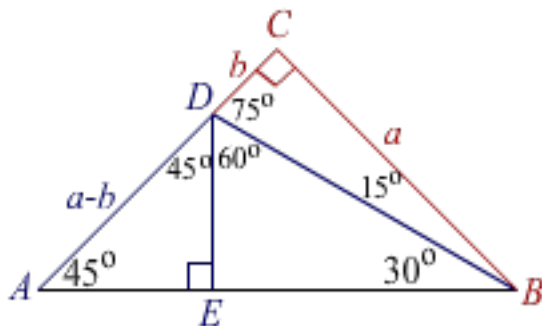


Slika 1.14: Квадрат и једнакостраничан троугао.

Задатак 1.3.2. Користећи слике 1.14, доказати да је:

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ &= \frac{1}{2}, & \cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2}, & \operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{3}, & \operatorname{ctg} 30^\circ &= \sqrt{3}, \\ \sin 45^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{2}, & \cos 45^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{2}, & \operatorname{tg} 45^\circ &= 1, & \operatorname{ctg} 45^\circ &= 1, \\ \sin 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2}, & \cos 60^\circ &= \frac{1}{2}, & \operatorname{tg} 60^\circ &= \sqrt{3}, & \operatorname{ctg} 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Углове 30° , 45° и 60° називамо *основним угловима*. Тригонометријске вредности функција основних углова су још увек довољно zgodни бројеви па их често користимо (у примерима попут 1.3.1) уместо приближних ирационалних бројева које иначе добијамо тригонометријским функцијама.



Slika 1.15: Правоугли троуглови.

На слици 1.15 дат је једнакокраки правоугли троугао ABC са правим углом у темену C и катетама дужина $a = \overline{AC} = \overline{BC}$. Хипотенуза тог троугла је дужине $c = \overline{AB} = a\sqrt{2}$.

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Тачка $D \in AC$ је крај дужи BD која са хипотенузом чини угао $\angle DBA = 30^\circ$. Из темена D троугла ABD повучена је висина DE на страну AB .

Правоугли троугао BCD у темену B има оштар угао 15° где је $\cos 15^\circ = a : \overline{BD}$. Међутим $\overline{DE} = \overline{BD} \cdot \sin 30^\circ$, $\overline{EB} = \overline{BD} \cdot \cos 30^\circ$ и $\overline{DE} + \overline{EB} = c$, па је:

$$\begin{aligned} \overline{BD} \cdot \sin 30^\circ + \overline{BD} \cdot \cos 30^\circ &= c, \\ \overline{BD} &= \frac{c}{\sin 30^\circ + \cos 30^\circ} = \frac{2a\sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}}, \end{aligned}$$

отуда:

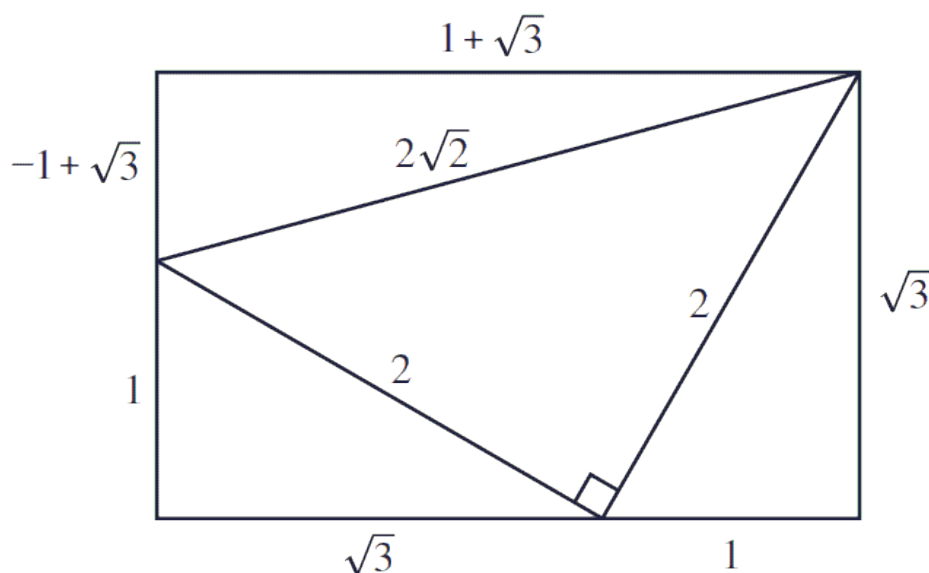
$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \quad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \quad \operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}. \quad (1.10)$$

Поред примера 1.3.2, кориштени су и основни тригонометријски идентитети:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad (1.11)$$

који важе за сваки угао α , што се лако проверава из (1.8).

Задатак 1.3.3. Користећи слику 1.16 доказати (1.10).



Slika 1.16: Угао 15° .

Пример 1.3.4. У јединични квадрат $ABCD$ уписан је једнакокраки троугао CDE . Показати да је $\angle GBE = 15^\circ$ и проверити формуле (1.10).

Решење. Једнакокраки троугао ADE са крацима $\overline{AD} = \overline{DE} = 1$ има углове $\angle ADE = 30^\circ$ и $\angle EAD = \angle DEA = 75^\circ$, па је угао $\angle GAE = 15^\circ$. Означимо са $EF \perp CD$ и $EG \perp AB$ висине троуглова CDE и ABE . Тада је:

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg} \angle GAE = \frac{\overline{EG}}{\overline{AG}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Затим налазимо остале (1.10). □

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Када познајемо вредност тангенса (произвољног) угла α , остале тригонометријске функције су:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad \sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}^{-1} \alpha, \quad (1.12)$$

што је лако проверити помоћу (1.11).

Пример 1.3.5. Ако је $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 2$, показати да је $\alpha = 45^\circ$.

Решење. Из датог услова добијамо $\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \operatorname{tg} \alpha + 1 = 0$ а отуда $(\operatorname{tg} \alpha - 1)^2 = 0$ и $\operatorname{tg} \alpha = 1$. \square

Пример 1.3.6. Ако је $2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha = 3$, показати да је $\operatorname{tg} \alpha = 0$ или је $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$.

Решење. Из датог услова добијамо $\sin \alpha = \frac{3}{2}(1 - \cos \alpha)$, па $\sin^2 \alpha = \frac{9}{4}(1 - 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha)$. Додавањем квадрата косинуса:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= \frac{9}{4}(1 - 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha) + \cos^2 \alpha, \\ 1 &= \frac{9}{4}(1 - 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha) + \frac{4}{4} \cos^2 \alpha, \\ 13 \cos^2 \alpha - 18 \cos \alpha + 5 &= 0, \\ \cos \alpha &= \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 13 \cdot 5}}{2 \cdot 13} = \frac{18 \pm 8}{26} = \begin{cases} 1 \\ \frac{5}{13} \end{cases} \end{aligned}$$

Први случај $\cos \alpha = 1$ може бити само када правоугли троугао исчезава, када $\alpha \rightarrow 0$, а тада $\operatorname{tg} \alpha \rightarrow 0$. Друго решење одговара правоуглом троуглу са катетама налеглој 5 и наспрмној 12 (угла α), са хипотенузом 13, па је тангенс угла $12/5$. \square

Пример 1.3.7. Ако су a, b и c позитивни бројеви и за угао $0 < \alpha < 180^\circ$ важи једнакост $b^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, доказати да тада важе неједнакости $|b - c| < a < b + c$.

Решење. Из датог услова $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ и $|\cos \alpha| < 1$ имамо импликације:

$$\begin{cases} \cos \alpha < 1 & \Rightarrow |b - c| < a, \\ -1 < \cos \alpha & \Rightarrow b + c > a, \end{cases}$$

а отуда дате неједнакости. \square

Пример 1.3.8. Показати да је за сваки оштар угао:

$$\sin \alpha + \cos \alpha > 1, \quad |\sin \alpha - \cos \alpha| < 1.$$

Решење. Следи из $|\sin \alpha + \cos \alpha| = \sqrt{(\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2} = \sqrt{1 \pm 2 \sin \alpha \cos \alpha}$. \square

Пример 1.3.9. Израчунати

$$\begin{aligned} x &= \cos^2 18^\circ + \cos^2 36^\circ + \cos^2 54^\circ + \cos^2 72^\circ, \\ y &= \sin^2 15^\circ + \sin^2 30^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 75^\circ. \end{aligned}$$

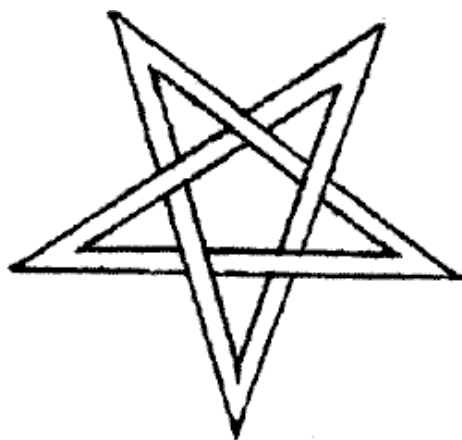
Решење. За комплементне углове, $\alpha + \beta = 90^\circ$, је $\cos \alpha = \sin \beta$. Отуда:

$$\begin{aligned} x &= \cos^2 18^\circ + \cos^2 36^\circ + \sin^2 36^\circ + \sin^2 18^\circ = 2, \\ y &= \sin^2 15^\circ + \sin^2 30^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 75^\circ = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}, \end{aligned}$$

јер је збир квадрата косинуса и синуса истог угла један, а $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. \square

1.4 Правилни многоугао

Правилни многоугао (полигон) је затворена изломљена линија у равни са ивицама једнаке дужине које заклапају једнаке углове. Правилан тространи многоугао је једнакостранични троугао, четворострани је квадрат, али није ромб (нема једнаке углове). Пентаграм на слици 1.17 је неконвексан (звездаст) правилан 5-угао, за разлику од пентагона на следећој слици који је конвексан (испупчен).

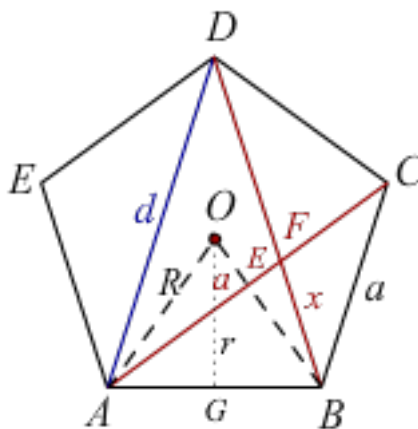


Slika 1.17: Пентаграм.

На слици 1.18 је правилни петоугао, пентагон $ABCDE$ са центром O . Све његове странице су дужине $a = \overline{BC}$, а све његове дијагонале дужине $d = \overline{AD}$. Дијагонале AC и BD се секу у тачки F . Угао $\angle AOB = 72^\circ$ (петина 360°), затим $\angle ADB = 36^\circ$, $\angle BAO = 52^\circ$, $\angle BAE = 108^\circ$.

Из троугла AFD , израчунавамо $\angle AFD = 108^\circ$, унутрашњи угао пентагона.

Приметимо да су насрамни углови четвороугла $AFDE$ једнаки, а једнаке су му и парови суседних страница у теменима E и F . Према томе, тај четвороугао је ромб са страницама a . Са друге стране, четвороугао $ABCD$ је тетиван (описан кружницом), па је то једнакокраки траpez дуже и краће основице редом d и a . Одсечци дијагонала су $\overline{AF} = a$ и $\overline{FB} = x$, а и ову другу дужину можемо изразити помоћу странице a .



Slika 1.18: Пентагон.

Из сличних троуглова $\triangle ADF \sim \triangle BCF$ налазимо $x : a = a : d$ и због $a + x = d$ добијамо $x^2 + ax - a^2 = 0$. Позитивно решење ове квадратне једначине, $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$, има геометријски смисао. Дијагонала је $d = a + \phi$, па можемо писати:

$$\begin{cases} x = \phi a, & \phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618 \\ d = \Phi a, & \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618. \end{cases} \quad (1.13)$$

Бројеви ϕ и Φ се називају *златни бројеви*. Они су узајамно реципрочни, $\phi\Phi = 1$, а називе су добили по златном пресеку у којем се појављују.

Златни пресек је подела дужи (рецимо MN) на два дела (MP и PN), ако се већи део ($x = \overline{MP}$) према мањем ($y = \overline{PN}$) односи као цела дуж $a = \overline{MN}$ према већем делу. То дефинише пропорцију $a : x = x : y$ и услов $x + y = a$ из којих следи квадратна једначина $x^2 + ax - a^2 = 0$, дакле иста једначина из које смо добили (1.13).

Вратимо се слици 1.18 пентагона. Са $R = \overline{OA}$ је означена дужина полупречника описане кружнице а са $r = \overline{OG}$ краћи полупречник уписане. Тачка $G \in AB$ је подножје висине троугла ABO из темена O . Тачка $E = OB \cap AC$ је пресек дуге полупречника OB и дијагонале AC и она дели тај полупречник на одсечке, рецимо дужина $R_B = \overline{EB}$ и $R_O = \overline{OE}$. Приметимо да имамо пар подударних $\triangle OEA \cong \triangle OEC$ и пар сличних $\triangle ABE \sim \triangle BGO$ троуглова.

Из поменутих сличних, а затим из правоуглих троуглова AEB и AEO налазимо:

$$a : R_B = R : \frac{a}{2}, \quad a^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + R_B^2, \quad R^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + R_O^2.$$

Из друге једначине, прве па треће налазимо:

$$R_B = \frac{a}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad R = \frac{a}{10}\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}, \quad R_O = \frac{a}{20}\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}. \quad (1.14)$$

Из правоуглог троугла AGO имамо полупречник уписане кружнице r а затим и разлику полупречника $s = R - r$ која се назива *sagitta* (лат. лук, стрела):

$$r = \frac{a}{10}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}, \quad s = \frac{a}{10}\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}. \quad (1.15)$$

Разлика полупречника s представља најдаљу удаљеност лука \widehat{AOB} описане кружнице од тетиве AB .

Са овим подацима можемо изразити (помоћу тзв. квадратура) тригонометријске вредности углова који су целобројни умношци 18° . На пример:

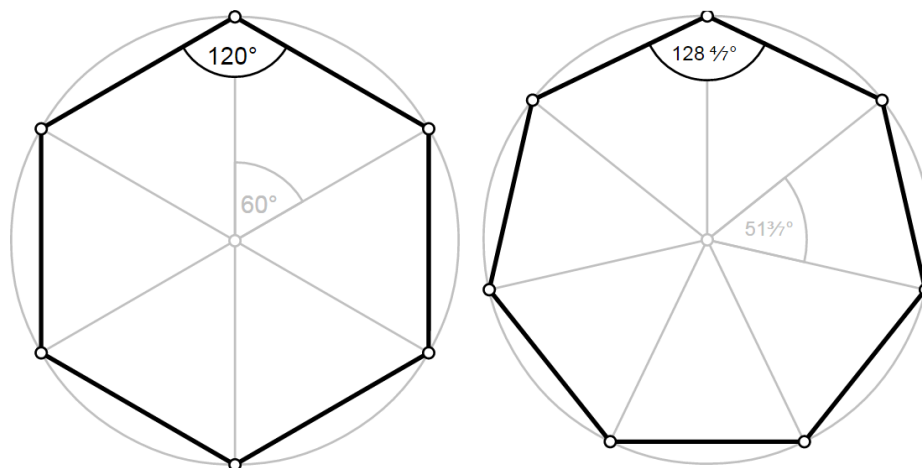
$$\begin{aligned} \sin 18^\circ &= \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1), & \cos 18^\circ &= \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, & \operatorname{tg} 18^\circ &= \frac{1}{5}\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}, \\ \sin 36^\circ &= \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, & \cos 36^\circ &= \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1), & \operatorname{tg} 36^\circ &= \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}, \\ \sin 54^\circ &= \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1), & \cos 54^\circ &= \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, & \operatorname{tg} 54^\circ &= \frac{1}{5}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}, \\ \sin 72^\circ &= \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, & \cos 72^\circ &= \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1), & \operatorname{tg} 72^\circ &= \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Са слике 1.18 за први ред налазимо угао $\angle EAO = 18^\circ$ па из правоуглог троугла EAO следи $\sin 18^\circ = \frac{R_O}{R}$ а затим израчунавамо $\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ}$ и $\operatorname{tg} 18^\circ = \frac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ}$. За други ред приметимо да је $\angle GAO = 36^\circ$ и да је троугао GAO правоугли. Трећи ред добијамо директно из другог, јер су углови $36^\circ + 54^\circ = 90^\circ$ комплементни, а тада синус једног прелази у косинус другог и обрнуто. Угао 72° је комплементан са 18° . Котангенс и тангенс истог угла су реципрочни, а комплементних углова - једнаки.

На слици 1.19 лево је правилан шестоугао, тзв. *хексагон*. Из центра се свака од шест једнаких страница види под углом $360^\circ : 6 = 60^\circ$. Због једнаких удаљености до темена и зато што су ти одсечци једнакокраки троуглови унутрашњост шестоугла се састоји од шест једнакостраничних троуглова. Најједноставније тригонометријске функције које се том поделом могу добити већ смо израчунавали у примеру 1.3.2.

Нека је O центар кружнице око датог хексагона. Почев од доњег темена у позитивном смеру, обрнуто смеру казаљке на сату, означимо темена хексагона A_i са индексима

ТРИГОНОМЕТРИЈА



Slika 1.19: Правилан шестоугао и седмоугао.

редом $i = 1, \dots, 6$. Свака од страница је исте дужине $a = \overline{A_1A_2}$. Спојимо A_1 са тачком B која је на средини дужи A_2A_3 . Троугао A_1BO је правоугли, са оштрим углом $\phi_2 = \angle BA_1O$ чији су тригонометријске функције:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \phi_2 = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA_1}} = \frac{\sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos \phi_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi_2}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}, \\ \sin \phi_2 = \operatorname{tg} \phi_2 \cos \phi_2 = \frac{\sqrt{21}}{7}. \end{cases} \quad (1.17)$$

То су „згодне“ функције „незгодног“ угла, приближно $\phi_2 = 40^\circ 53' 36''$. Слично налазимо, тангенс угла $\operatorname{tg} \phi_3 = \operatorname{tg} \angle CA_1O = \frac{\sqrt{3}}{14}$ и приближно $\phi_3 = 7^\circ 3' 10''$ где је тачка C средина странице A_3A_4 . Наиме, ако је тачка $C \in A_1A_4$ подножје нормале BC на пречник A_1A_4 , онда је CA_4 половина половине странице $a = \overline{OA_4}$ а BC је половина висине (једнакостраничног) троугла OA_3A_4 . Зато је:

$$\operatorname{tg} \phi_3 = \frac{\overline{BC}}{\overline{CA_1}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{7}{8}a} = \frac{\sqrt{3}}{14}, \quad (1.18)$$

а то је наведени резултат. Наравно, могуће су још горе ситуације, са рационалним тригонометријским функцијама и ирационалним углом, као код *египатског троугла* са страницама 3, 4 и 5 и са тангенсом оштрог угла $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{4}$.

Пример 1.4.1. Показати да су за $n = 3, 4, 5, \dots$ редом:

$$(n-2)180^\circ, \quad 360^\circ, \quad \frac{n}{4}a^2 \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n},$$

збир унутрашњих и вањски углова, и површина правилног n -то угла странице a .

Решење. У сваки правилан n -то угао $A_1A_2 \dots A_n$ се може уписати и око њега се може описати кружница са заједничким центром O и полупречницима $r < R$. Исечени троуглови попут OA_1A_2 су једнакокраки са оштрим углом $\theta = \frac{360^\circ}{n}$ наспрам основице

ТРИГОНОМЕТРИЈА

a. Збир углова на основици исеченог троугла је $\alpha = 180^\circ - \theta$, а то је унутрашњи угао правилног n -то угла. Збир свих унутрашњих углова је

$$n\alpha = n\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right) = n180^\circ - 2 \cdot 180^\circ = (n-2)180^\circ.$$

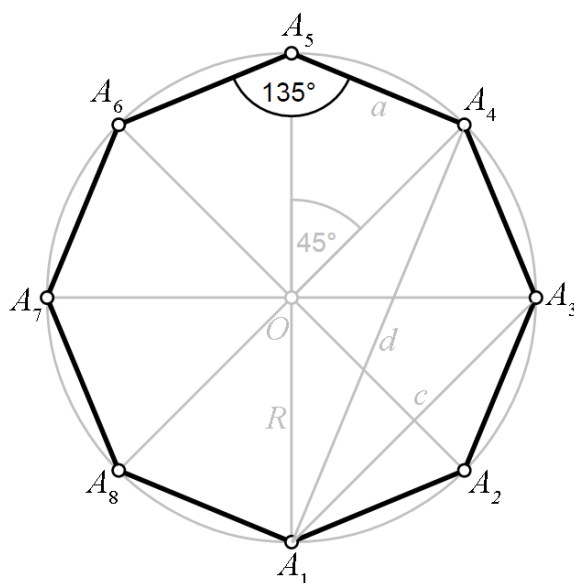
Вањски угао је $180^\circ - \alpha = \theta$, па је збир свих вањских углова 360° . Површина исеченог троугла је $\Pi(OA_1A_2) = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{4}a^2 \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$, па је и укупна површина тачна. \square

На слици 1.19 десно је правилан седмоугао, тзв. *хептагон*. Он је античким геометријама остао загонетан због тешкоћа око цртања. Данас знамо да је *геометријска конструкција* (кориштењем само шестара и лењира без поделе) хептагона немогућа, али је могућа *невзис конструкција*⁴, која овде није тема.

Централни угао под којим се види страница је $\theta = \frac{360^\circ}{7} = 51^\circ 25' 43''$. Унутрашњи и спољашњи угао су редом $180^\circ - \theta$ и θ , дакле такође су „незгодни“, због чега је ова врста многоуглова незанимљива бар што се тиче елементарне математике. Ипак, да не бисмо тек тако пропуштали теме у овако опширној књизи поменимо једну реткост. Означимо са A_i ($i = 1, \dots, 7$) редом темена хептагона на датој слици. Тада је

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_1A_7} = \overline{A_1A_4}, \quad (1.19)$$

где је B тачка пресека дужи A_1A_3 и A_2A_4 .

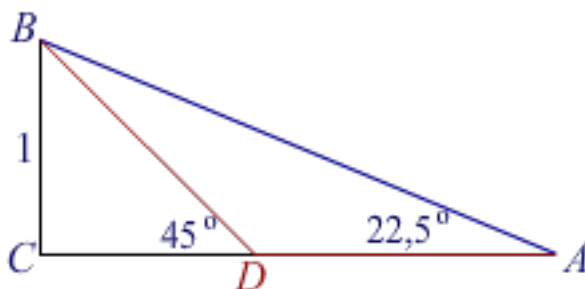


Slika 1.20: Правилан осмоугао.

На слици 1.20 је правилан осмоугао, *октагон* $A_1A_2 \dots A_8$ са центром O описане кружнице полупречника R . Приказане су три дијагонале, велика која пролази центром $\overline{A_1A_5} = 2R$, средња $\overline{A_1A_4} = d$ и мала $\overline{A_1A_3} = c$. Означена страница октагона је $a = \overline{A_1A_2}$. Из центра O та се страница, тетива види под углом 45° (осмина пуног угла) а са осталих темена (A_1) страница се види под углом $22,5^\circ$ (периферни угао је половина централног над истом тетивом). Периферни угао над пречником $\angle A_5A_4A_1 = 90^\circ$.

⁴Neusis construction: https://en.wikipedia.org/wiki/Neusis_construction

Пример 1.4.2. Дати је правоугли троугао ABC са правим углом $\angle C = 90^\circ$ и катетом $\overline{BC} = 1$. Тачка $D \in AC$ дели другу катету на одсечке $\overline{CD} = \overline{BC}$ и $\overline{AD} = \overline{BD}$. Показати да је $\overline{AC} = \sqrt{2}$ и $\overline{AB} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$.



Slika 1.21: Угао $22,5^\circ$.

Решење. Дати троугао је на слици 1.21. Лако налазимо $\overline{BD} = \overline{AC} = \sqrt{2}$, затим:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = 1 + (1 + \sqrt{2})^2 = 4 + 2\sqrt{2},$$

а отуда $\overline{AB} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$. □

Овај резултат помаже да нађемо дијагонала на слици 1.20 правилног осмоугла. Из наведеног примера имамо $\overline{BC} : \overline{AB} = \sin 22,5^\circ$ и даље:

$$\sin 22,5^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}, \quad \cos 22,5^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad \operatorname{tg} 22,5^\circ = \sqrt{2} - 1. \quad (1.20)$$

Према томе, на слици осмоугла израчунавамо дијагонала:

$$2R = a\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}, \quad d = a(1 + \sqrt{2}), \quad c = a\sqrt{2 + \sqrt{2}}. \quad (1.21)$$

Средња дијагонала се са страницом налази у односу $d : a = (1 + \sqrt{2}) : 1$ који се назива *сребрени пресек*. Када се најчешћем формату папира код нас (A4) на краћу страницу дода квадрат добија се правоугаоник са страницама у сребреном пресеку.

Пример 1.4.3. Показати да су тачне једнакости:

$$1 + \sqrt{2} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}, \quad \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

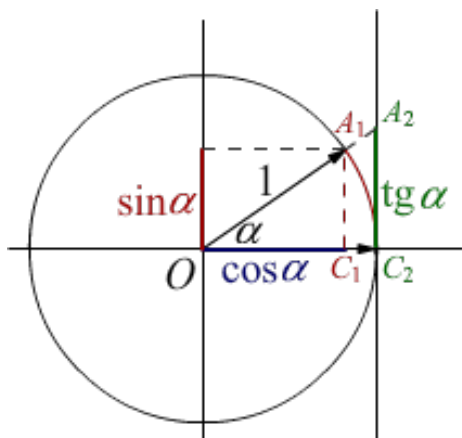
Решење. То су сребрени и златни пресек изражени помоћу бесконачних, тзв. *верижних* разломака. Означимо први од тих разломака са x , други са y . Тада имамо:

$$\begin{aligned} x &= 2 + \frac{1}{x}, & y &= 1 + \frac{1}{y}, \\ x^2 - 2x - 1 &= 0, & y^2 - y - 1 &= 0, \\ x_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2}, & y_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2}, \\ x &= 1 + \sqrt{2}, & y &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \end{aligned}$$

што је и требало показати. □

1.5 Тригонометријска кружница

Основна *тригонометријска кружница* је јединичног полупречника са центром у исходишту O координатног система, као на слици 1.22. На њој ћемо додефинисати тригонометријске функције углова који нису оштри а који нам могу затребати код решавања тупоуглих троуглова и даље. Орјентисани угао дефинисан је правцем апсцисе и вектора чији почетак је O а врх на кружници. Пројекција тог (радијус) вектора на апсцису је косинус угла, пројекција на ординату је синус угла.

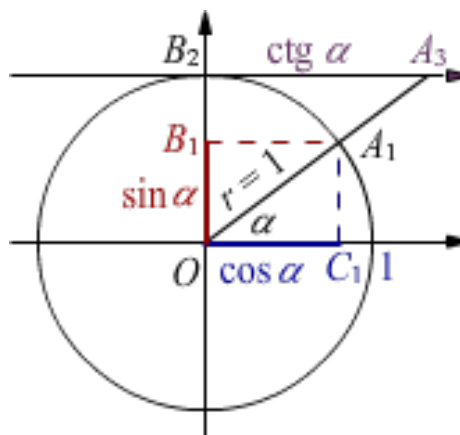


Slika 1.22: Тригонометријска кружница.

$$\overline{C_1A_1} = \sin \alpha, \quad \overline{OC_1} = \cos \alpha \quad \text{и} \quad \overline{C_2A_2} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Друга тангента постављена на исту кружницу, окомита на ординату у тачки 1, дефинише котангенсну осу, сл. 1.23. Вредности те осе су пројекције вредности са апсцисе. Претходној слици је додато $A_1B_1 \perp OB_2$ са тачком B_1 која припада ординати OB_2 , $\overline{OB_2} = 1$. Продужетак радијуса OA_1 сече котангенсну осу у тачки A_3 . Из сличности правоуглих троуглова $\triangle OA_1B_1 \sim \triangle OA_3B_2$ добијамо $\overline{B_2A_3} = \operatorname{ctg} \alpha$.

Ове дефиниције се одржавају и када угао $\alpha = \angle C_1OA_1$ није оштар. Углови првог квадранта су оштри, $\alpha \in (0, 90^\circ)$, другог квадранта су тупи, $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$. Настављајући са растом (у позитивном смеру) добијамо углове трећег ($180^\circ, 270^\circ$) и четвртог квадранта ($270^\circ, 360^\circ$). Могуће је неограничено повећање угла α у позитивном смеру, при чему се тригонометријске вредности функција периодично понављају, испочетка са сваким следећим пуним кругом (360°).

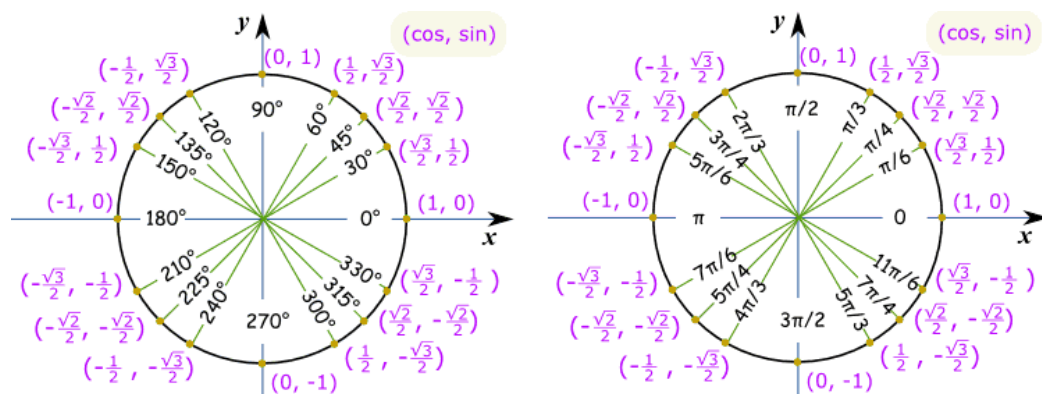


Slika 1.23: Котангенсна оса.

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Једнако има смисла и неограничено кретање угла у негативном смеру, у смеру казаљке на сату. Када пројекције (продужци) вектора угла падају на позитивне бројеве оса (синусне, косинусне, тангенсне и котангенсне) одговарајуће функције су позитивне вредности, иначе су негативне.

Радијан је дужина лука тригонометријске кружнице који се види под датим углом: $360^\circ = 2\pi$, $180^\circ = \pi$, $90^\circ = \pi/2$, $60^\circ = \pi/3$, $45^\circ = \pi/4$, $30^\circ = \pi/6$, $0^\circ = 0$. Као и угао у степенима, угао у радијанима може бити позитиван или негативан. Радијан је подразумевана мера за угао.



Slika 1.24: Тригонометријске кружнице у степенима и радијанима.

На слици 1.24 лево и десно видимо тригонометријску кружницу⁵ у степенима и радијанима. Први крак угла је одређен позитивним смером апсцисе, а друг крак радијус вектором чији почетак је изходште координатног система а врх је тачка на кружници. На слици су тачке дате уобичајено, са две координате, апсцисом (косинус угла) и ординатом (синус).

Задатак 1.5.1. На тригонометријској кружници показати да је косинусна функција парна, а да су синусна, тангенсна и котангенсна функција непарне, да је:

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x, \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x,$$

за сваки угао x .

Задатак 1.5.2. На тригонометријској кружници показати да је:

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(\pi - x) = -\operatorname{ctg} x,$$

за сваки угао x .

Пример 1.5.3. Израчунати вредности тригонометријских функција угла $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

Решење. Дати угао у радијанима износи $\alpha = \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 150^\circ$ у степенима. Свођењем на први квадрант (претходни задатак) добијамо:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin(\pi - \alpha) = \sin \frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \\ \cos \alpha &= -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

□

⁵Unit circle: <https://www.mathsisfun.com/geometry/unit-circle.html>

Пример 1.5.4. Проверити да ли је

$$A = \frac{\sin \frac{9\pi}{4} + \operatorname{tg}(-\frac{2\pi}{3})}{\cos \frac{7\pi}{4} - \operatorname{ctg}(-\frac{4\pi}{3})} = 2\sqrt{6} - 3,$$

свођењем углова на први квадрант па израчунавањем.

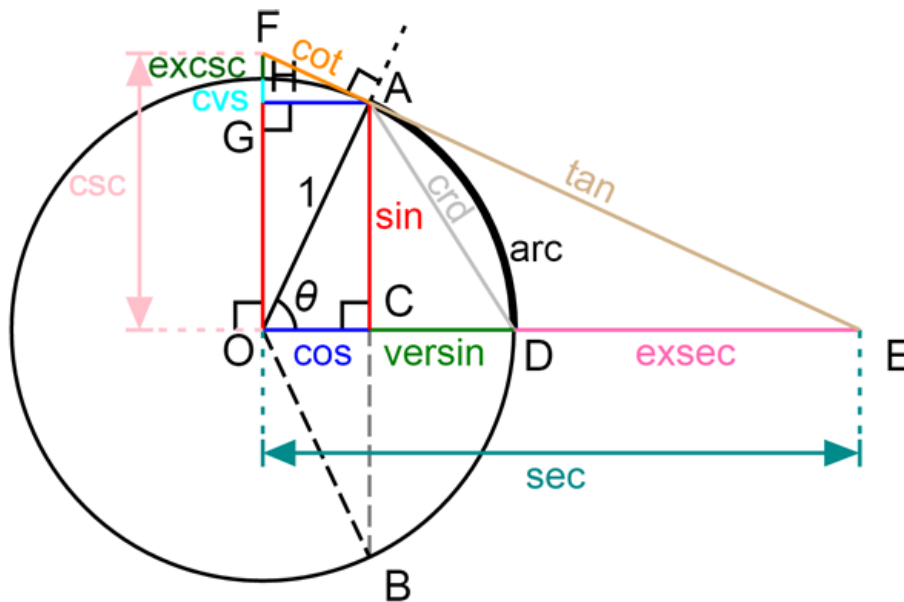
Решење. Имамо редом:

$$\sin \frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg}(-\frac{2\pi}{3}) = \sqrt{3}, \quad \cos \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{ctg}(-\frac{4\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

па је:

$$A = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2\sqrt{6} - 3 \approx 1,90$$

што значи да је дати резултат тачан. □



Slika 1.25: Тригонометријске функције.

Другу врсту кружнице са истим тригонометријским функцијама, овде угла угла θ , видимо на слици 1.25. Те функције и још неке⁶ писане су англосаксонски:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}. \quad (1.22)$$

То су редом тангенс, котангенс, секанс и косеканс. Препуштам читаоцу да ове формуле докаже. Поред поменутих, на слици су кориштене и ознаке:

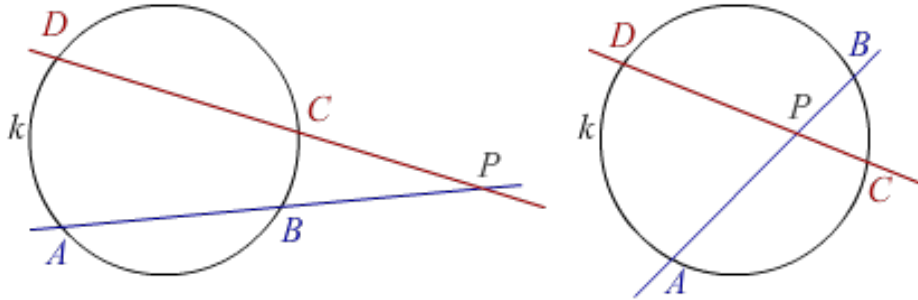
$$\begin{aligned} \operatorname{versin} \theta &= 1 - \cos \theta, & \operatorname{exsec} \theta &= \sec \theta - 1, & \operatorname{excsc} \theta &= \csc \theta - 1, \\ \operatorname{cvcs} \theta &= 1 - \sin \theta, & \operatorname{crd} \theta &= 2 \sin \frac{\theta}{2}, & \operatorname{arc} \theta &= \theta, \end{aligned} \quad (1.23)$$

⁶List of trigonometric identities, Wikipedia.

ТРИГОНОМЕТРИЈА

старе ознаке из навигације које се данас ретко употребљавају. Последња функција „аркус“ даје дужину лука који се види под датим углом и она је једнака датом углу, када је угао исказан у радијанима.

Потенција тачке P у односу на кружницу k је још једно занимљиво место где се преплићу троуглови и кружнице. У дискусији можемо посматрати две ситуације, када је дата тачка изван и када је унутар датог круга, као на слици 1.26. У оба случаја имамо две праве које се секу у тачки $P \in AB \cap CD$, при чему је $A, B, C, D \in k$.



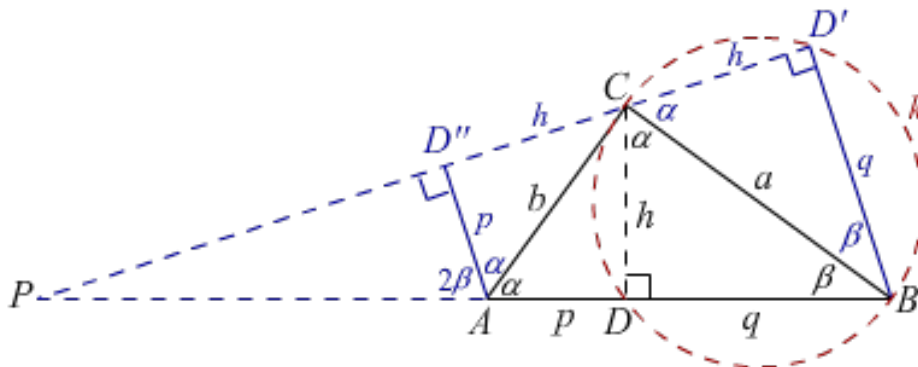
Slika 1.26: Потенција тачке P у односу на кружницу k .

На слици 1.26 лево, четвороугао са теменима $ABCD$ је конвексан (испупчен) и тетиван, па су његови углови из A и D над тетивом BC једнаки. Отуда слични троуглови $\triangle PCA \sim \triangle PBD$, јер им је поред реченог и угао у теменима P једнак. Њихове стране су пропорционалне $\overline{PA} : \overline{PD} = \overline{PC} : \overline{PB}$ и важи једнакост

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}. \quad (1.24)$$

Исту једнакост добијамо и са слике 1.26 десно, јер је такође $\triangle PCA \sim \triangle PBD$. Та једнакост се назива потенција тачке P у односу на кружницу k .

На слици 1.27 је дат правоугли троугао ABC са оштрим угловима $\alpha = \angle BAC$ и $\beta = \angle ABC$, катетама $a = \overline{BC}$ и $b = \overline{AC}$, затим и висином $h = \overline{CD}$ која на хипотенузи прави одсечке $p = \overline{AD}$ и $q = \overline{DB}$.



Slika 1.27: Правоугли троугао и потенција тачке.

Подударни су троуглови $\triangle BCD \cong \triangle BCD'$ који се рефлектују један у други преко BC , а подударни су и $\triangle ADC \cong \triangle AD''C$ који се рефлектују преко AC . Оштри углови датог троугла су комплементни, $\alpha + \beta = 90^\circ$, па су њихови двоструки углови у теменима C суплементни. Тачке $D'CC''$ су колинеарне.

Означимо са $P = AB \cap D'D''$. Када је $\frac{\pi}{4} < \alpha < \pi$, тада је тачка P лево од датог троугла ($\angle APC = 2\alpha - 90^\circ$), као на слици 1.27. Када је $\alpha = \frac{\pi}{4}$ тачка P је у бесконачности (праве AB и $D'D''$ су паралелне), а када је $\alpha > \frac{\pi}{4}$ тачка P је десно.

Видимо да су тачке $BDCD'$ темена тетивног четвороугла, јер су у пару наспрамних тачака D и D' два права угла (збирови наспрамних углова тетивног четвороугла су једнаки, а укупни збир сва четири је 2π). То значи да постоји кружница $k \ni A, B, C, D$ и да (у случају $\frac{\pi}{4} < \alpha < \pi$) имамо потенцију тачке P у односу на кружницу k као на датој слици. Уочимо и два правоугла троугла $\triangle PCD$ и $\triangle PBD'$ па:

$$\overline{PD} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD'}, \quad \overline{PC}^2 = \overline{PD}^2 + \overline{CD}^2, \quad \overline{PB}^2 = \overline{PD'}^2 + \overline{BD'}^2. \quad (1.25)$$

Стаavimo $x = \overline{PD}$ и $y = \overline{PC}$ да добијемо:

$$\begin{aligned} x(x+q) &= y(y+h), & y^2 &= x^2 + h^2, & (x+q)^2 &= (y+h)^2 + q^2, \\ qx - hy &= h^2, & y^2 &= x^2 + h^2, \\ \left(\frac{qx - h^2}{h}\right)^2 &= x^2 + h^2, \\ x \left[\left(\frac{q^2}{h^2} - 1\right)x - 2q \right] &= 0. \end{aligned}$$

Прво решење ове једначине $x = 0$ је случај $P \in k$, а тада нема троугла ABC . Само друго решење је геометријски реално:

$$x = \frac{2gh}{q^2 - h^2} \cdot h, \quad y = \frac{q^2 + h^2}{q^2 - h^2} \cdot h, \quad (1.26)$$

када је (према слици) тачка P лево од троугла ($q > h$).

Пример 1.5.5. Користећи слику 1.27 показати да је:

$$\sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta, \quad \cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta, \quad \operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}.$$

То су познати⁷ изрази тригонометријских функција двоструког угла.

Решење. Из правоуглог троугла $\triangle PCD$ са оштрим углом $\angle PCD = 2\beta$ следи:

$$\begin{aligned} \sin 2\beta &= \frac{\overline{PD}}{\overline{PC}}, & \cos 2\beta &= \frac{\overline{CD}}{\overline{PC}}, & \operatorname{tg} 2\beta &= \frac{\overline{PD}}{\overline{CD}}, \\ \sin 2\beta &= \frac{x}{y}, & \cos 2\beta &= \frac{h}{y}, & \operatorname{tg} 2\beta &= \frac{x}{h}, \\ \sin 2\beta &= \frac{2gh}{q^2 + h^2}, & \cos 2\beta &= \frac{q^2 - h^2}{q^2 + h^2}, & \operatorname{tg} 2\beta &= \frac{2gh}{q^2 - h^2}, \end{aligned}$$

где је кориштено и (1.26). Међутим, на датом правоуглом троуглу имамо $q = h \operatorname{ctg} \beta$, а са тиме затим лако налазимо тражене формуле. \square

⁷Начин извођења је непознат.

1.6 Решавање троугла

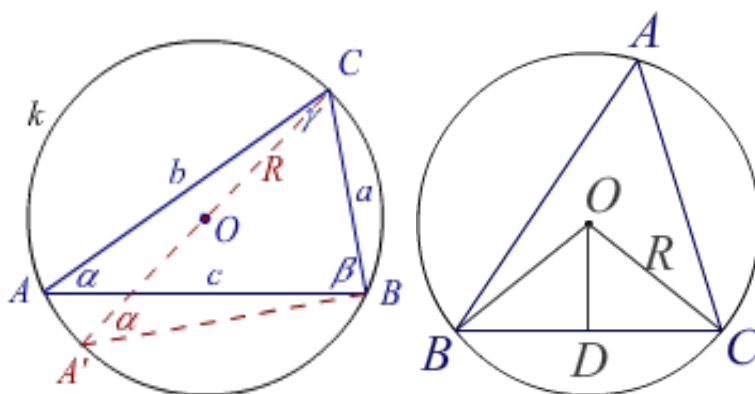
Решавање троугла је налажење углова и страница троугла. У ширем смислу то је налажење још неких података троугла, попут површине, значајних тачака троугла, уписане и описане кружнице. За ту врсту задатака ће нам требати још неколико важних алатки међу којима су пре свега синусна и косинусна теорема.

Теорема 1.6.1 (Синусна). *Нека су a, b, c странице троугла наспрамне угловима α, β, γ редом. Тада је:*

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

где је R полупречник описане кружнице датог троугла.

Доказ. На слици 1.28 лево је троугао ABC са страницама $a = BC$, $b = CA$ и $c = AB$, са унутрашњим угловима $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ и $\angle C = \gamma$. Троугао је уписан у кружницу k са центром O и полупречником R . Када се теме A измести у тачку $A' \in k$ такву да је $A' - O - C$ периферни угао (α) над тетивом BC остаће непромењен, али је троугао $A'BC$ правоугли. Зато је $a = 2R \sin \alpha$. Аналогно, измештањем тачке B , па тачке C , добијамо редом $b = 2R \sin \beta$ па $c = 2R \sin \gamma$, а отуда синусна теорема. \square



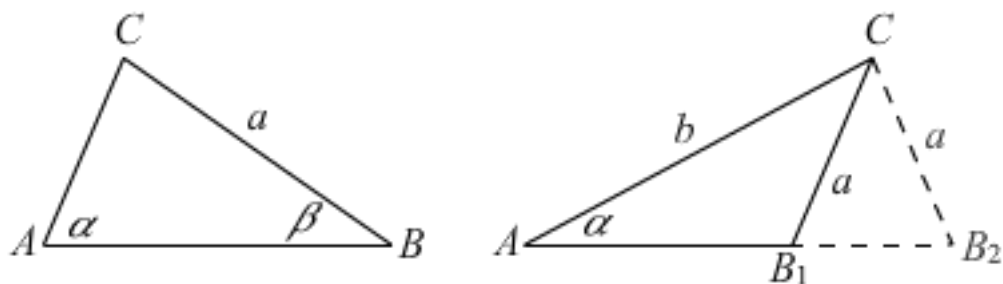
Slika 1.28: Синусна теорема, два доказа.

Пример 1.6.2. *Користећи слику 1.28 десно, доказати синусну теорему.*

Доказ. На слици 1.28 десно видимо троугао ABC уписан у кружницу са центром у тачки O и полупречником R . Из O је спуштена нормала на страницу $\overline{BC} = a$ у тачку D . Из правоуглог троугла $\triangle BOD$ налазимо $\sin \angle BOD = a/2R$. Када је угао у датом темену туп, $\angle A = \alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$, тада је O изван троугла ABC , па је слика другачија али је резултат исти. У оба случаја добијамо $a/\sin \alpha = 2R$. Понављајући ове кораке за темена B и C , добијамо и остатак теореме. \square

Синусна теорема је корисна за решавање троугла када су дате страница и два угла троугла (СУУ), или две странице и угао наспрам једне од њих (ССУ). У овом другом случају, да бисмо имали јединствено решење, дати угао је наспрам дуже стране. Први и други случај су на слици 1.29 лево и десно.

Пример 1.6.3. *Решити троугао када је дато $a = 9$ ст, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$.*



Slika 1.29: Троуглови ССУ и СУУ.

Решење. Из синусне теореме следи:

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{9}{2 \sin 60^\circ} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} \approx 5,20 \text{ cm},$$

$$b = 2R \sin \beta = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{6} \approx 7,35 \text{ cm},$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 75^\circ, \quad \sin 75^\circ = \cos 15^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}),$$

$$c = 2R \sin \gamma = \frac{3}{2}(3\sqrt{2} + \sqrt{6}) \approx 10,04 \text{ cm}.$$

Користили смо и резултате задатака 1.3.2 и 1.3.3. □

Пример 1.6.4. Решити троугао када је дато $a = 10$, $b = 10\sqrt{2}$, $\alpha = 30^\circ$.

Решење. Из синусне теореме налазимо:

$$2R = \frac{a}{\sin 30^\circ} = 20, \quad \sin \beta = \frac{b}{2R} = \frac{10\sqrt{2}}{20} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

а то значи да имамо два угла (в. слику 1.29 десно) $\beta_1 = 135^\circ$ и $\beta_2 = 45^\circ$. Имамо два одговарајућа угла $\gamma_k = 180^\circ - \alpha - \beta_k$ за $k = 1, 2$ и две одговарајуће треће странице $c_k = 2R \sin \gamma_k$:

$$\begin{aligned} \gamma_1 = 15^\circ, \quad c_1 &= 20 \sin 15^\circ = 5(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \approx 5,18 \\ \gamma_2 = 105^\circ, \quad c_2 &= 20 \sin 105^\circ = 20 \cos 15^\circ = 5(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \approx 19,32 \end{aligned}$$

где је кориштено (1.10). □

Теорема 1.6.5 (Косинусна). Дат је троугао са страницама a, b, c и угловима наспрам тих страница α, β, γ редом. Тада важе једнакости:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma, \end{cases}$$

Доказ. На слици 1.30 је дати троугао ABC , лево са оштрим унутрашњим углом α у темену A , десно са оштрим вањским углом у истом темену A . Лево је $x = b \cos \alpha$ и

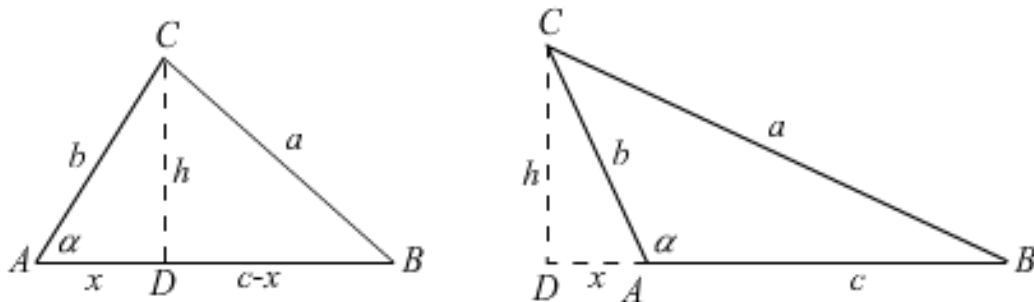
ТРИГОНОМЕТРИЈА

$h^2 = a^2 - (c - x)^2$, десно је $x = -b \cos \alpha$ и $h^2 = a^2 - (c + x)^2$. У оба случаја је $h^2 = b^2 - x^2$. Отуда, за леву слику $h^2 = a^2 - (c - x)^2 = b^2 - x^2$, затим:

$$a^2 = b^2 - x^2 + (c - x)^2,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx,$$

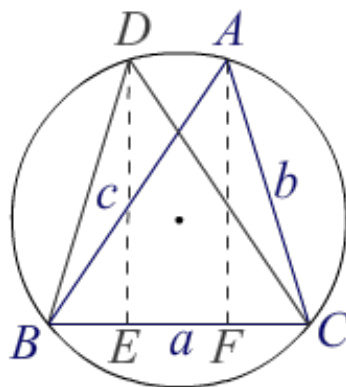
па сменом $x = b \cos \alpha$ добијамо прву једнакост теореме. Исту једнакост добијамо и у десном случају. Симетрично, важе и остале две једнакости. \square



Slika 1.30: Косинусна теорема.

Разуме се да постоје и другачији докази. Рецимо, помоћу *Птоломејеве теореме*: „Ако је четвороугао уписан у кружницу, онда је производ његових дијагонала једнак збиру производа парова његових супротних страница“, коју за сада подразумевамо.

Пример 1.6.6. Доказати косинусну теорему (1.15) помоћу слике 1.31 и *Птоломејеве теореме*.



Slika 1.31: Косинусна из Птоломејеве теореме.

Доказ. На слици 1.31 видимо дати троугао ABC уписан у кружницу са центром у тачки O . У истој кружници је уписан троугао BCD подударан са датим тако да је $AC = BD$ и $AB = CD$. Из темена D и A спуштене су висине на страницу BC , у тачке E и F редом. Отуда $\overline{BE} = \overline{CF} = b \cos \gamma$, затим

$$\overline{DA} = \overline{EF} = \overline{BC} - 2 \cdot \overline{CF} = a - 2b \cos \gamma.$$

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Применом Птоломејеве теореме, $\overline{AC} \cdot \overline{BD} + \overline{BC} \cdot \overline{DA} = \overline{AB} \cdot \overline{CD}$, добијамо:

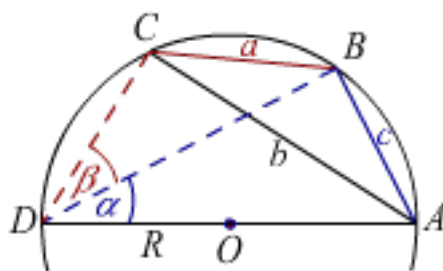
$$b^2 + a(a - 2b \cos \gamma) = c^2,$$

$$b^2 + a^2 - 2ab \cos \beta = c^2.$$

То је трећа од једнакости (1.15). Понављајући ове кораке измештањем темена B и C добијамо остатак косинусне теореме. \square

Пример 1.6.7. Применити косинусну теорему на троугао ABC на слици 1.32 и доказати познату⁸ формулу за косинус збира

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$



Slika 1.32: Збир углова.

Решење. На слици 1.32 видимо дати троугао ABC уписан у кружницу са центром у тачки O и полупречником R . Унутрашњи углови у теменима A , B и C су редом $\angle A = \beta$, $\angle B = \pi - (\alpha + \beta)$ и $\angle C = \alpha$. Из правоуглих троуглова ABO , BCO и ACO налазимо $c = 2R \sin \alpha$, $a = 2R \sin \beta$ и $b = 2R \sin(\alpha + \beta)$. Косинусна теорема даје:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \angle B,$$

$$[2R \sin(\alpha + \beta)]^2 = (2R \sin \beta)^2 + (2R \sin \alpha)^2 - 2(2R)^2 \sin \beta \sin \alpha \cos[\pi - (\alpha + \beta)],$$

$$\sin^2(\alpha + \beta) = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha + \beta).$$

Сменом $x = \cos(\alpha + \beta)$, због основних тригонометријских идентитета (1.10) и након сређивања добијамо квадратну једначину

$$x^2 + 2x \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \alpha - \cos^2 \beta = 0,$$

чије је реално решење $x = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$. \square

Косину теорему користимо за решавање троугла коме су дате три странице (ССС), или када су дате две странице и угао захваћен њима (СУС). У првом случају, када су дате странице троугла a, b, c , онда су углови троугла:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos \beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \quad (1.27)$$

У другом случају, када су дате две странице и угао између њих, рецимо a, b и γ , тада израчунамо $c^2 = a^2 + b^2 - 2bc \cos \gamma$, па наставимо са претходним (1.27). Посебно, када је $\gamma = 90^\circ$ троугао је правоугли а ова једнакост постаје Питагорина теорема.

⁸Начин извођења није познат.

Пример 1.6.8. Доказати да важи једнакост

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$$

ако и само ако је троугао са угловима α, β, γ правоугли.

Доказ. Странице троугла наспрамне угловима α, β, γ су редом a, b, c .

Нека је дата једнакост тачна. Синусна теорема и пропорције дају:

$$\frac{a^2}{\sin^2 \alpha} = \frac{b^2}{\sin^2 \beta} = \frac{c^2}{\sin^2 \gamma} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Узимамо трећи са последњим изразом и одговарајући из косинусне теореме:

$$\frac{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}{\sin^2 \gamma} = \frac{2(a^2 + b^2 - ab \cos \gamma)}{2},$$

$$(a^2 + b^2)(1 - \sin^2 \gamma) = ab \cos \gamma(2 - \sin^2 \gamma),$$

$$(a^2 + b^2) \cos^2 \gamma = ab \cos \gamma(1 + \cos^2 \gamma).$$

Очигледно прво решење ове једначине је $\cos \gamma_1 = 0$, а отуда $\gamma_1 = 90^\circ$.

Друга решења тражимо након скраћивања са $\cos \gamma \neq 0$:

$$(a^2 + b^2) \cos \gamma = ab(1 + \cos \gamma^2),$$

$$ab \cos^2 \gamma - (a^2 + b^2) \cos \gamma + ab = 0,$$

$$\cos \gamma_{23} = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2}}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 \pm (a^2 - b^2)}{2ab},$$

$$\cos \gamma_2 = \frac{a}{b}, \quad \cos \gamma_3 = \frac{b}{a},$$

а то су косинуси оштрих углова опет правоуглих троуглова.

Нека је троугао правоугли, рецимо $\gamma = 90^\circ$. Тада је $\beta = 90^\circ - \alpha$ и:

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 90^\circ = 2,$$

па важи наведена једнакост.

Тиме је тврђење доказано у оба смера. □

Ово је био 2. проблем на Ирској математичкој олимпијади 2007. године, али се пре тога могао наћи (као не много тежак) у код нас одавно пре тога популарној Веневој збирци задатака за 2. разред гимназија⁹. То је варијанта задатка са Међународне математичке олимпијаде у Пољској 1967. године.

⁹в. [15], стр. 126. задатак1242.

1.7 Тангенсна и котангенсна теорема

Следеће две теореме, *тангенсну* и *котангенсну*, ређе спомињемо. Прва¹⁰ се може употребити за решавање троугла у случају када су дате две странице и угао захваћен њима (СУС), или када су дате једна страна са два угла (СУУ). Друга¹¹ повезује углове са страницама и полупречником уписаног круга троугла.

Теорема 1.7.1 (Тангенсна). *За троугао са ознакама из теореме 1.6.2, важи:*

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

То је тангенсна теорема.

Доказ. За доказ користимо синусну теорему 1.6.2:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = 2R,$$

односно

$$a = 2R \sin \alpha, \quad b = 2R \sin \beta.$$

Одужимањем и сабирањем формирамо разломак:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{2R \sin \alpha - 2R \sin \beta}{2R \sin \alpha + 2R \sin \beta} = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta}.$$

Користећи идентитете (2.10) за разлику и збир синуса, добијамо

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Тиме смо доказали тражена једнакост. □

Теорема 1.7.2. *За троугао са уобичајеним ознакама, као на слици 1.33, важе једнакости:*

$$\frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{s-a} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}{s-b} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}{s-c} = \frac{1}{r}$$

и поред тога, полупречник уписаног круга је:

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

То је котангенсна теорема.

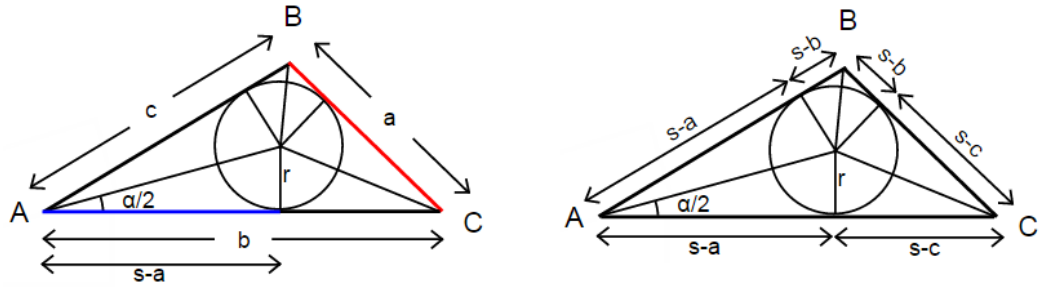
Доказ. Са слика 1.33 видимо да је котангенс $\operatorname{ctg}(\alpha/2) = (s-a)/r$ и слично за остала два угла. Како је

$$\operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} \right) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$$

¹⁰Law of tangents: https://en.wikipedia.org/wiki/Law_of_tangents

¹¹Law of cotangents: http://en.wikipedia.org/wiki/Law_of_cotangents

ТРИГОНОМЕТРИЈА



Slika 1.33: Круг уписан у троугао.

отуда добијамо

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}.$$

Сменом горњих котангенса, имамо:

$$\frac{s-a}{r} \cdot \frac{s-b}{r} \cdot \frac{s-c}{r} = \frac{s-a}{r} + \frac{s-b}{r} + \frac{s-c}{r},$$

а збир десно је s/r , дајући и r^2 дајући и друго тврђење. □

Теорема 1.7.3. *Површина троугла ABC је:*

$$\Pi = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2},$$

где су кориштене ознаке троугла као у теорему 1.6.2. То је Херонов образац.

Доказ. Са слике 1.33 видимо да је површина датог троугла $\Pi = rs$, па је:

$$\Pi = r((s-a) + (s-b) + (s-c)) = r^2 \left(\frac{s-a}{r} + \frac{s-b}{r} + \frac{s-c}{r} \right),$$

а из првог дела котангенсне теореме 1.7.2, даље налазимо:

$$\Pi = r^2 \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \right) = r^2 \left(\frac{s-a}{r} \cdot \frac{s-b}{r} \cdot \frac{s-c}{r} \right) = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{r}.$$

Затим, користећи други део котангенсне теореме, добијамо

$$\Pi^2 = s(s-a)(s-b)(s-c),$$

а отуда тражени Херонов образац. □

Ако је r угао у радијанима, онда је $s = 180r/\pi$ тај угао изражен у степенима; ако је s угао у степенима, онда је $r = \pi s/180$ угао у радијанима.

Задатак 1.7.4. *Проверити да су тачне једнакости:*

$$\begin{aligned} \sin(\pm 90^\circ + k \cdot 360^\circ) &= \pm 1, & \cos(k \cdot 360^\circ) &= 1, & \cos(180^\circ + k \cdot 360^\circ) &= -1, \\ \operatorname{tg}(k \cdot \pi) &= 0, & \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right) &= \infty, & \operatorname{ctg} x &= 1/\operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

за свако $k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

Задатак 1.7.5. *Проверити да су тачне једнакости:*

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - x) &= \cos x, & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x, & \sin(\pi - x) &= \sin x, \\ \operatorname{tg}(90^\circ - x) &= \operatorname{ctg} x, & \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \operatorname{tg} x, & \operatorname{tg}(\pi - x) &= -\operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

за сваки угао x .

1.7.1 Основни идентитети

Из претходних резултата добијамо основне тригонометријске идентитете¹²:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad (1.28)$$

$$\sin \alpha = \frac{\pm \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad \cos \alpha = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

Синус је позитиван у првом (углови од 0 до $\pi/2$) и другом квадранту ($\pi/2$ до π), а косинус је позитиван у првом и четвртом (од $3\pi/2$ до 2π), тангенс је позитиван у првом и трећем квадранту ($\pi, 3\pi/2$). На тригонометријској кружници видимо да су у осталим случајевима ове функције негативне, или нула.

Котангенсна оса је тангента у крајњој горњој тачки кружнице, са исходиштем у тачки додира и са смером паралелним апсциси.

Нека је тачка додира котангенсне осе и кружнице C_3 , а пресек праве на којој лежи радијус вектор \vec{OA} са контангенсном осом A_3 . Тада је $\angle OA_3C_3 = \alpha$, па је $\operatorname{ctg} \alpha = \overline{C_3A_3} : \overline{OC_3} = \overline{C_3A_3}$, јер је $\overline{OC_3} = 1$. Према томе, слично тангенсу, котангенс дефинише место продора продужетка покретног крака угла и те осе.

Иначе, реципрочна вредност тангенса угла ($\operatorname{tg} \alpha$) назива се котангенс ($\operatorname{ctg} \alpha$) тог угла, реципрочна вредност косинуса назива се секанс ($\operatorname{sc} \alpha$), а реципрочна вредност синуса назива се косеканс ($\operatorname{csc} \alpha$) датог угла. Према томе

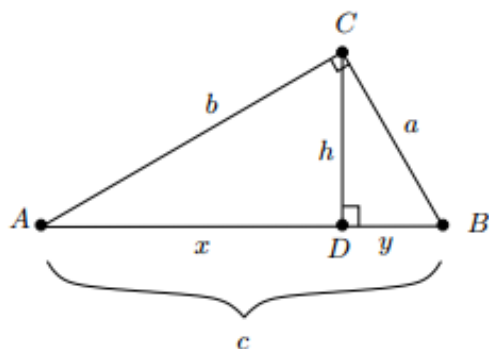
$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1, \quad \cos \alpha \cdot \operatorname{sc} \alpha = 1, \quad \sin \alpha \cdot \operatorname{csc} \alpha = 1, \quad (1.29)$$

$$\operatorname{sc}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{csc}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1.$$

Из претходне секције о сличности троуглова следи следећи став. Ако су два троугла слична, онда је однос њихових површина једнак квадрату односа било које две одговарајуће стране. Другим речима, важи:

$$(\triangle ABC \sim \triangle DEF \wedge \overline{AB} = r \cdot \overline{DE}) \Rightarrow \Pi(ABC) = r^2 \Pi(DEF). \quad (1.30)$$

Такође, из сличности троуглова следи и Питагорина теорема.



Slika 1.34: Доказ Питагорине теореме помоћу сличности.

¹²Идентитет је једнакост која је (скоро) увек тачна, за разлику од једначине која је (скоро) увек нетачна једнакост.

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Доказ Питагорине теореме помоћу сличности погледајмо на слици 1.34. Дат је правоугли троугао ABC са катетама $a = \overline{BC}$ и $b = \overline{AC}$ и правим углом у темену $\angle C = 90^\circ$ из којег је на хипотенузу AB повучена висина $h = \overline{CD}$. Подножје висине, тачка D дели хипотенузу $c = \overline{AB}$ на одсечке $x = \overline{AD}$ и $y = \overline{DB}$. Из $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CDB$ следе $b : x = c : b$ и $a : y = c : a$. Отуда $b^2 = cx$ и $a^2 = cy$, а њихов збир је:

$$b^2 + a^2 = cx + cy = c(x + y) = c^2. \quad (1.31)$$

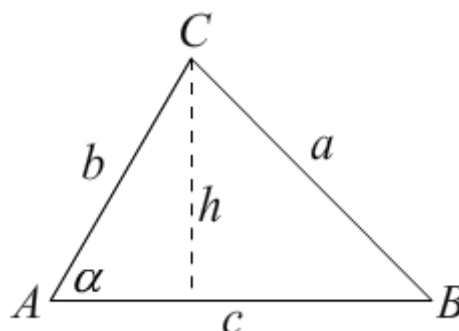
То је Питагорина теорема (1.6).

1.8 Адиционе формуле

Многобројне су и различите примене тригонометрије, у математици и изван. Тригонометрија може бити помоћ у геометрији па и самој тригонометрији. На пример, на слици 1.35 видимо да троугао ABC има површину

$$\Pi(ABC) = \frac{bc}{2} \sin \alpha, \quad (1.32)$$

где је $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$ и $\alpha = \angle ABC$. Наиме, $\Pi = \frac{ch}{2}$ и $h = b \sin \alpha$.



Slika 1.35: Површина троугла

Пример 1.8.1. Конвексан четвороугао $ABCD$ подељен је дијагоналама AC и BD које се секу у тачки E . Показати да су производи површина добијених наспрамних троуглова једнаки, тј. $\Pi(AEB) \cdot \Pi(CDE) = \Pi(BCE) \cdot \Pi(DAE)$.

Доказ. Нека је $\angle AEB = \varphi$. Тада је $\angle BEC = \pi - \varphi$. Отуда:

$$\begin{aligned} \Pi(AEB) \cdot \Pi(CDE) &= \left(\frac{1}{2} \overline{AE} \cdot \overline{BE} \sin \varphi\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \overline{CE} \cdot \overline{DE} \sin \varphi\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2} \overline{BE} \cdot \overline{CE} \sin \varphi\right) \cdot \left(\overline{DE} \cdot \overline{AE} \sin \varphi\right) = \Pi(BCE) \cdot \Pi(DAE), \end{aligned}$$

јер је $\sin \varphi = \sin(\pi - \varphi)$. □

Формула (1.18) примењена на низ троуглова унутар горње тригонометријске полукружнице, на следећој слици 1.36, доказује¹³ да је

$$\sin(\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \leq \sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_n. \quad (1.33)$$

Посебно, шрафирани троугао лево има површину

$$\Pi_l = \frac{1 \cdot 1}{2} \sin(\alpha_1 + \dots + \alpha_n),$$

а десно је укупни збир површина $n \in \mathbb{N}$ троуглова

$$\Pi_d = \frac{1 \cdot 1}{2} \sin \alpha_1 + \dots + \frac{1 \cdot 1}{2} \sin \alpha_n.$$

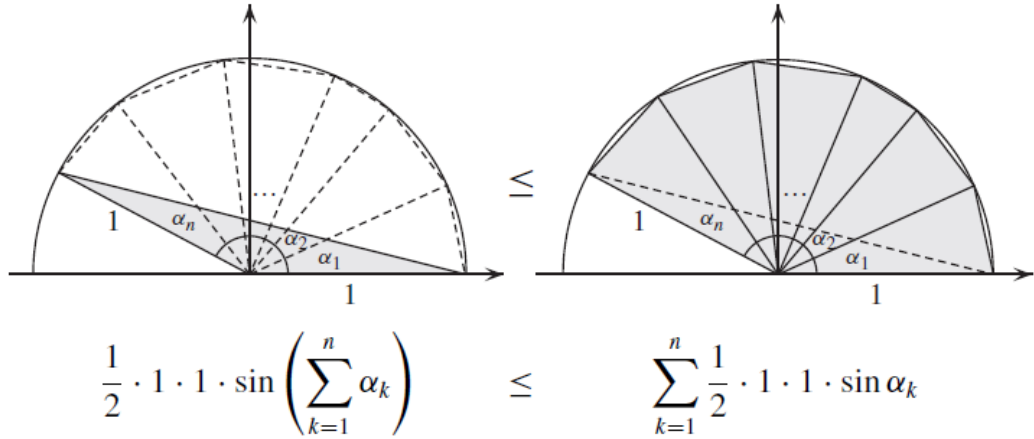
Уоређивањем слика видимо да је $\Pi_l \leq \Pi_d$.

Доказ субадитивности синуса можемо наћи и на мало једноставнијој слици 1.32. У примеру уз ту слику, видели смо да су странице a , b и c троугла ABC редом $2R \sin \beta$, $2R \sin(\alpha + \beta)$ и $2R \sin \alpha$. Због неједнакости троугла, да је свака страница троугла мања од збира остале две а већа од њихове разлике, је $|a - c| < b < a + c$, и

$$|\sin \beta - \sin \alpha| < \sin(\alpha + \beta) < \sin \beta + \sin \alpha, \quad (1.34)$$

¹³Xingya Fan (simplegroup2011@gmail.com) and Yixin Zhu (xyz@mail.cnu.edu.cn), School of Mathematical Science, Capital Normal University, Beijing, China 100038

ТРИГОНОМЕТРИЈА



Slika 1.36: Доказ субадитивности синуса.

што за ове углове $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ значи субадитивност синуса.

Тачан израз за синус збира ова два угла може се добити помоћу слике 1.37. Из правоуглих троуглова налазимо:

$$\begin{cases} BCD: \overline{BD} = a \sin \alpha, & h = a \cos \alpha, \\ ACD: \overline{AD} = b \sin \beta, & h = b \cos \beta. \end{cases}$$

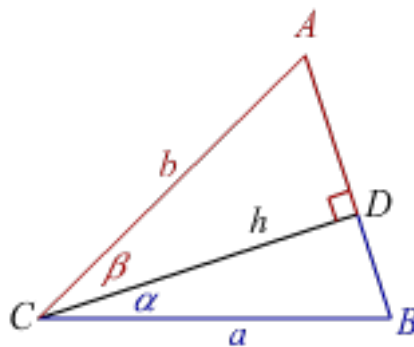
За површине троуглова на слици важи, редом:

$$\begin{aligned} \Pi(ABC) &= \Pi(BCD) + \Pi(ACD), \\ \frac{1}{2}ab \sin(\alpha + \beta) &= \frac{1}{2}ah \sin \alpha + \frac{1}{2}hb \sin \beta, \\ \frac{1}{2}ab \sin(\alpha + \beta) &= \frac{1}{2}ab \sin \alpha \cos \beta + \frac{1}{2}ab \cos \alpha \sin \beta, \end{aligned}$$

а отуда

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \quad (1.35)$$

То је адициона формула за синус збира углова.



Slika 1.37: Синус збира.

Заменом угла $\beta \rightarrow -\beta$, због парности косинусне, $\cos(-\beta) = \cos \beta$, и непарности синусне функције, $\sin(-\beta) = -\sin \beta$, добијамо

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \quad (1.36)$$

ТРИГОНОМЕТРИЈА

То је адициона формула за синус разлике углова.

Сменом $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} - \alpha$, зато што са комплементним угловима синус прелази у косинус и обрнуто, формула за синус збира постаје:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta,$$

$$\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right] = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

а отуда

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (1.37)$$

То је адициона формула за косинус разлике. Сменом $\beta \rightarrow -\beta$ сада налазимо

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (1.38)$$

То је адициона формула за косинус збира. Приметимо да је она тачно једнака формули (1.16) коју смо добили применом косинусне теореме.

Количник синуса и косинуса истог угла је тангенс тог угла, па добијамо:

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{\sin \beta}{\cos \beta}},$$

а отуда

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (1.39)$$

То је адициона формула за тангенс збира углова. Сменом $\beta \rightarrow -\beta$, зато што је тангенсна функција непарна, $\operatorname{tg}(-\beta) = -\operatorname{tg} \beta$, добијамо

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (1.40)$$

То је адициона формула за тангенс разлике. Како је котангенс реципрочна функција тангенсној, сменама $\operatorname{tg} x = 1/\operatorname{ctg} x$ налазимо:

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}. \quad (1.41)$$

То су адиционе формуле за котангенс збира (горњи знак) и разлике (доњи).

Стављајући да је $\beta = \alpha$ у претходне формуле добијамо:

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \\ \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \end{cases} \quad \begin{cases} \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \\ \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}. \end{cases} \quad (1.42)$$

Лево су адиционе формуле двоструких углова из којих су изведене десно формуле половине углова.

Из основних адиционих се лако добијају и формуле за претварање збира у производ:

$$\begin{cases} \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{cases} \quad (1.43)$$

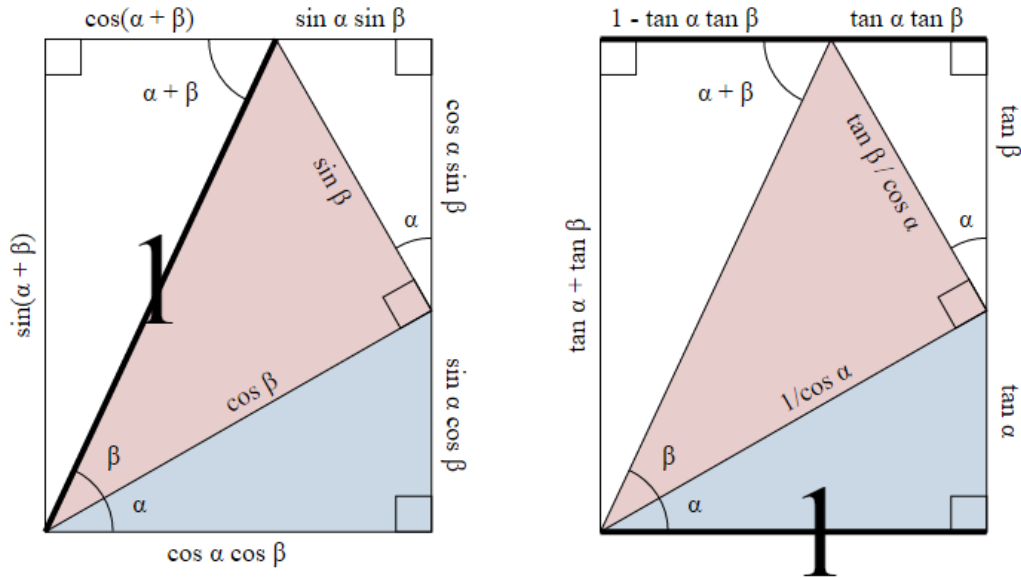
ТРИГОНОМЕТРИЈА

Наиме, сменом $\alpha = x + y$ и $\beta = x - y$, налазимо:

$$\begin{cases} \sin(x + y) \pm \sin(x - y) = (\sin x \cos y + \sin y \cos x) \pm (\sin x \cos y - \sin y \cos x), \\ \cos(x + y) \pm \cos(x - y) = (\cos x \cos y - \sin x \sin y) \pm (\cos x \cos y + \sin x \sin y), \end{cases}$$

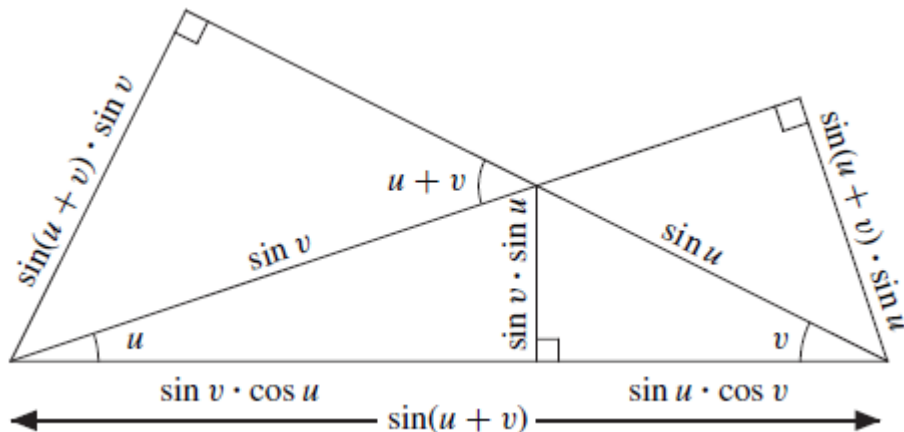
а отуда сменом $x = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $y = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ налазимо (1.28). Исте смене даће обрнуте формуле, за претварање производа у збир.

Занимљив визуелни доказ адиционих формула можемо наћи у Википедији, са хипотенузом односно једном катетом јединичне дужине, овде на слици 1.38.



Slika 1.38: Адиционе формуле.

Ради вежбе, покушајте самостално са ових слика добијати претходне адиционе формуле. Поучан је и следећи, такође визуелан пример¹⁴.



Slika 1.39: $\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$.

¹⁴Long Wang (lwang@spsu.edu), Southern Polytechnic State University, Marietta GA

Пример 1.8.2. Доказати адicione формуле помоћу слике 1.39.

Докази. Полазећи од слике 1.39 и особина парности $\cos(-v) = \cos v$ косинусне, затим непарности синусне $\sin(-v) = -\sin v$ и тангенсне функције $\operatorname{tg}(-\beta) = -\operatorname{tg} \beta$, је:

$$\sin(u - v) = \sin[u + (-v)] = \sin u \cos v - \cos u \sin v.$$

Полазећи од ове две и од идентитета $\cos \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$, доказујемо формуле за косинус збира и разлике:

$$\begin{aligned} \cos(u \pm v) &= \sin\left[\frac{\pi}{2} - (u \pm v)\right] = \sin\left[\left(\frac{\pi}{2} \pm u\right) \pm v\right] = \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm u\right) \cos v \pm \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm u\right) \sin v \\ &= \cos(\mp u) \cos v \pm \sin(\mp u) \sin v \\ &= \cos u \cos v \mp \sin u \sin v. \end{aligned}$$

Из претходних формула следе адicione формуле за тангенс збира и разлике:

$$\operatorname{tg}(u \pm v) = \frac{\sin(u \pm v)}{\cos(u \pm v)} = \frac{\sin u \cos v \pm \cos u \sin v}{\cos u \sin v \mp \sin u \cos v} = \frac{\operatorname{tg} u \pm \operatorname{tg} v}{1 \mp \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}.$$

У последњем кораку су бројник и називник „скраћени“ производом косинуса. □

У примеру 1.6.6 смо полазећи од Птоломејеве доказивали косинусну теорему, да бисмо у следећем примеру 1.6.7 помоћу косинусне теореме доказали адicione формулу за косинус збира углова. То је било на крају прошле секције. Овде смо видели како се сменом $\beta \rightarrow -\beta$ од адicione формуле за збир (разлику) може добити адicione формула за разлику (збир) и како се преласком на комплементарне углове из адicione формуле за синус (косинус) може добити одговарајућа адicione формула за косинус (синус). Успут, приметимо да су адicione формуле последица Птоломејеве и синусне теореме.

Пример 1.8.3. Користећи слике 1.40 лево и десно и Птоломејеву теорему, доказати адicione формуле за синус збира и разлике (2.8).

Докази. На обе кружнице на слици 1.40 нека је пречник $\overline{AB} = 1$. Знамо да је периферни угао над пречником прав, рецимо $\angle ACB = \pi/2$.

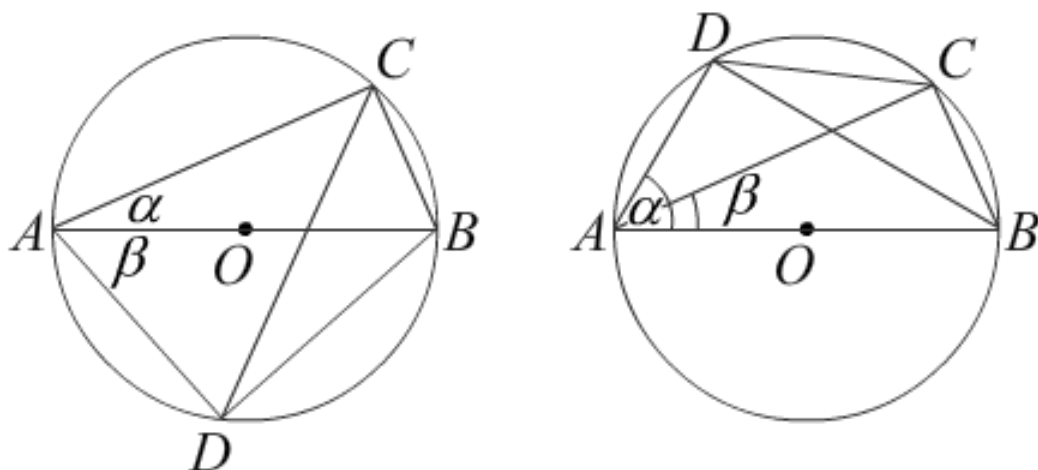
Из троугла ABC излази $\overline{AC} = \cos \alpha$, $\overline{BC} = \sin \alpha$. Из троугла ADB је $\overline{AD} = \cos \beta$, $\overline{BD} = \sin \beta$. На основу синусне теореме је $CD = \sin(\alpha + \beta)$. Птоломејева теорема (ако је четвороугао уписан у кружницу, онда је производ његових дијагонала једнак збиру производа парова његових супротних страница) сада даје:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

На кружници десно, $\overline{DA} = \cos \alpha$, $\overline{BD} = \sin \alpha$, $\overline{CA} = \cos \beta$, $\overline{BC} = \sin \beta$ међутим $\overline{CD} = \sin(\alpha - \beta)$. Из $\overline{BD} \cdot \overline{CA} = \overline{CD} \cdot \overline{AB} + \overline{DA} \cdot \overline{BC}$ следи

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

То су адicione формуле, прва за синус збира, друга за синус разлике. □

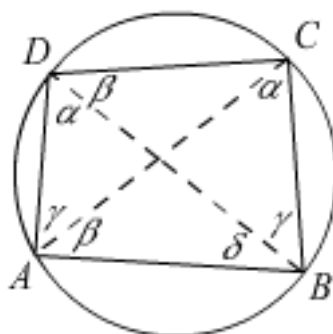


Slika 1.40: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$.

На крају ћемо затворити круг доказујући Птолемејеву теорему помоћу адитивних формула. Тиме потврђујемо да су „обична геометрија“ и тригонометрија делови једне шире логичне целине.

Пример 1.8.4. Користећи слику 1.41 и претходне формуле тригонометрије, доказати Птолемејеву теорему:

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}. \quad (1.44)$$



Slika 1.41: Птолемејева теорема из адитивних.

Доказ. Нека су α , β и γ периферни углови над тетивама AB , BC и CD кружнице са полупречником R на слици 1.41, у коју је уписан тетивни четвороугао темена $ABCD$ редом. Тетива AD се из темена B и C види под углом $\delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$. Отуда и због синусне теореме:

$$\begin{cases} \overline{AB} = 2R \sin \alpha, & \overline{BC} = 2R \sin \beta, & \overline{CD} = 2R \sin \gamma, \\ \overline{AC} = 2R \sin(\alpha + \beta), & \overline{BD} = 2R \sin(\beta + \gamma), & \overline{AD} = 2R \sin(\alpha + \beta + \gamma). \end{cases}$$

Сменом у дату Птолемејеву једнакост и након скраћивања са $(2R)^2$ добијамо:

$$\begin{aligned} (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)(\sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma) &= \\ &= \sin \alpha \sin \gamma + \sin \beta \sin(\alpha + \beta + \gamma). \end{aligned}$$

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Лако је показати да након сређивања обе стране ове једнакости постају

$$\sin \alpha \sin \beta \cos \beta \cos \gamma + \sin \alpha \cos^2 \beta \sin \gamma + \\ + \cos \alpha \sin^2 \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \sin \gamma.$$

Тиме је доказана Птоломејева теорема. □

Ради комплетности, погледајмо и један од многих доказа Птоломејеве теореме на геометријски начин без тригонометрије.

Теорема 1.8.5 (Птоломејева). *Нека је дат конвексан четвороугао $ABCD$ уписан у круг. Тада је збир производа супротних страница једнак производу две дијагонале. Другим речима*

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

Доказ. На дијагонали BD одредимо тачку E тако да углови $\angle ACB$ и $\angle ECD$ буду једнаки. Како су углови $\angle BAC$ и $\angle BDC$ периферни над истом тетивом, они су једнаки. Зато су троуглови ABC и DEC слични. Отуда $\overline{CD} : \overline{ED} = \overline{AC} : \overline{AB}$ или $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{ED}$.

Углови $\angle BCE$ и $\angle ACD$ су такође једнаки, па су и троуглови BCE и ACD слични. Отуда $\overline{BC} : \overline{BE} = \overline{AC} : \overline{AD}$ или $\overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{BE}$. Сабирањем са претходном, добијамо:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{ED} + \overline{AC} \cdot \overline{BE} = \overline{AC} \cdot \overline{BD},$$

а то је оно што је требало доказати. □

Адиционе формуле тригонометријских функција са доказима и примерима делом се могу наћи у књизи [11]. Прегледно, основне адиционе формуле су:

$$\begin{cases} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta, \\ \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \end{cases} \quad (1.45)$$

Из ових се лако изводе формуле за двоструке углове и полууглове:

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \\ \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \end{cases} \quad \begin{cases} \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \\ \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}. \end{cases} \quad (1.46)$$

Из истих се лако добијају и формуле за претварање збира у производ:

$$\begin{cases} \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \end{cases} \quad (1.47)$$

а из ових, сменом $\alpha = x + y$ и $\beta = x - y$, лако налазимо обрнуте, формуле за претварање производа у збир.

У наставку ћемо погледати неке познате идентитете, који су још увек блиски самим адиционим формулама или бар њиховим непосредним изведбама. То више са циљем да нагласимо приступ овој теми на начин који није уобичајен у редовној настави.

1.9 Идентитети

Поред основних тригонометријских идентитета (1.11), користили смо особину парности косинусне и непарности синусне и тангенсне функције. Такође, преласком на комплементаран угао, $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} - \alpha$, синус прелази у косинус а косинус у синус. Тада тангенс прелази у котангенс и котангенс у тангенс. Они се непосредно проверавају на правоуглом троуглу или на тригонометријској кружници, за разлику од следећих који траже додатну пажњу. Пре тога погледајмо пар примера мало сложеније употребе адicioних формула.

Пример 1.9.1. Показати да је $\sin 15^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

Решење. $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ =$

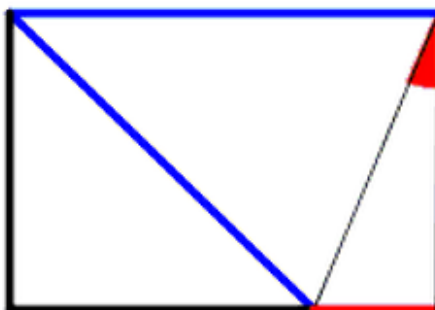
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

Да су дати синуси и косинуси тачно наведени може се проверити помоћу квадрата и једнакостаничног троугла на слици 1.14. □

Пример 1.9.2. Показати да је $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

Решење. $\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \frac{\pi}{4})} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, јер је $\frac{\pi}{8}$ пола од $\frac{\pi}{4}$. □

Задатак 1.9.3. Помоћу слике 1.42 папира формата А4, који је дизајниран да апроксимира $\sqrt{2} \times 1$, показати¹⁵ да је $\operatorname{tg} 22,5^\circ = \sqrt{2} - 1$.



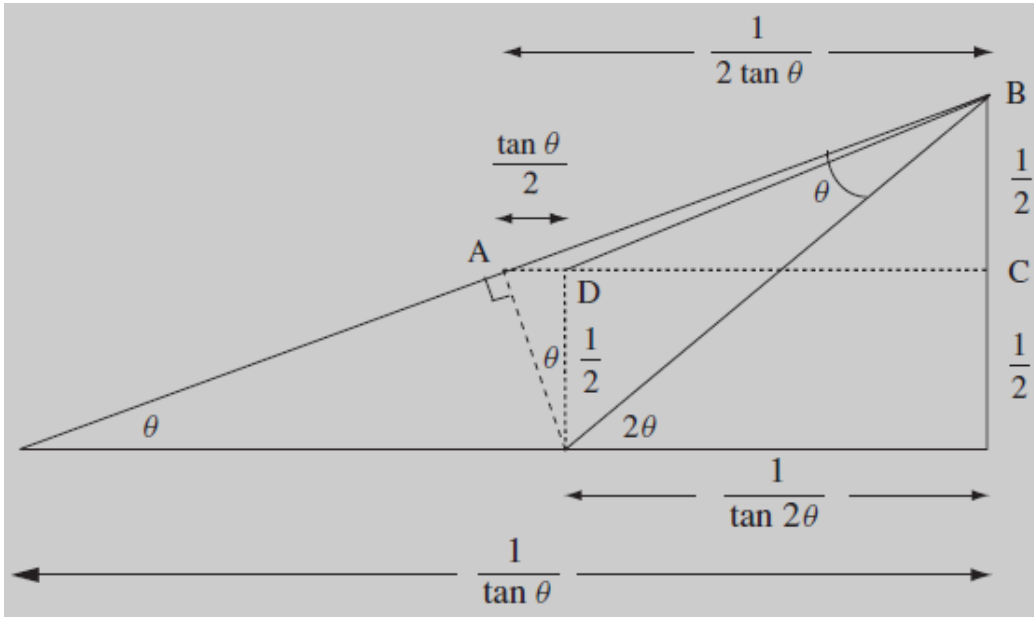
Slika 1.42: Формат А4 папира, 297×210 mm.

Пример 1.9.4. Доказати тригонометријски идентитет

$$\operatorname{ctg}(2\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \theta} - \operatorname{tg} \theta \right), \quad (1.48)$$

прво алгебарски а затим помоћу слике 1.43.

¹⁵Proof without words by Grégoire Nicollier from Sion, Switzerland, <http://www.cut-the-knot.org/WhatIs/WhatIsTrigonometry.shtml>



Slika 1.43: Котангенс двоструког угла.

Докази. Трансформација десне стране једнакости:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \theta} - \operatorname{tg} \theta \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \operatorname{ctg}(2\theta).$$

На слици 1.43 приметимо да се површина троугла ABC састоји од површина троуглова ABD и DBC . Тако налазимо еквиваленције, редом:

$$\begin{aligned} \Pi(ABC) &= \Pi(ABD) + \Pi(DBC), \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \operatorname{tg} \theta} \cdot \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\tan \theta}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \operatorname{tg} 2\theta} \cdot \frac{1}{2}, \\ \frac{2}{\tan 2\theta} &= \frac{1}{\tan \theta} - \tan \theta, \end{aligned}$$

а отуда¹⁶ тражени идентитет. □

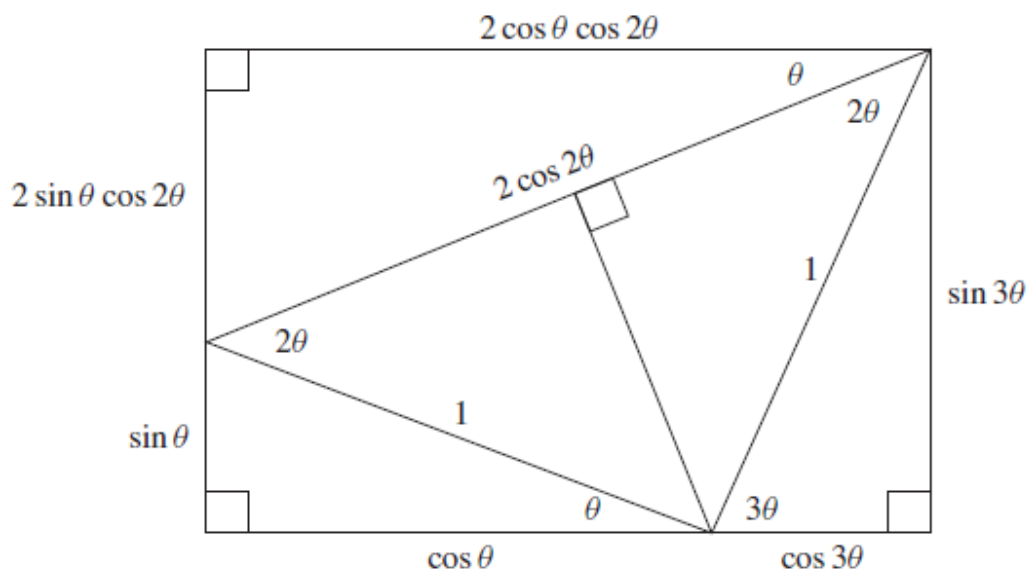
Пример 1.9.5. *Полазећи од слике 1.44, изразити $\sin 3\theta$ и $\cos 3\theta$ као функцији редом $\sin \theta$ и $\cos \theta$. Известите исте резултате и алгебарски.*

Решење. На слици 1.44 је правоугаоник¹⁷ конструисан од произвољног оштрог угла $\theta \in (0, \pi/6)$. Полазећи од једнакости бочних страна, односно основица, налазимо изразе у левој, односно десној колони:

$$\begin{aligned} \sin 3\theta &= 2 \sin \theta \cos 2\theta + \sin \theta & \cos 3\theta &= 2 \cos \theta \cos 2\theta - \cos \theta \\ &= 2 \sin \theta (1 - 2 \sin^2 \theta) + \sin \theta & &= 2 \cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1) - \cos \theta \\ &= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta. & &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta. \end{aligned}$$

¹⁶Yukio Kobayashi (koba@t.soka.ac.jp), Department of Information Systems Science, Faculty of Engineering, Soka University

¹⁷By Claudi Alsina, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain, and Roger B. Nelsen, Lewis & Clark College, Portland, Oregon, in [5]



Slika 1.44: $\sin 3\theta = 2 \sin \theta \cos 2\theta + \sin \theta$ и $\cos 3\theta = 2 \cos \theta \cos 2\theta - \cos \theta$.

Алгебарски: $\sin 3\theta = \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta =$

$$\begin{aligned} &= (2 \sin \theta \cos \theta) \cos \theta + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sin \theta \\ &= 2 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) + (1 - 2 \sin^2 \theta) \sin \theta \\ &= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta. \end{aligned}$$

Слично налазимо и другу. □

Задатак 1.9.6. Доказати формуле за троструке углове:

$$\operatorname{tg} 3\theta = \frac{3 \operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg}^3 \theta}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \theta}, \quad \operatorname{ctg} 3\theta = \frac{3 \operatorname{ctg} \theta - \operatorname{ctg}^3 \theta}{1 - 3 \operatorname{ctg}^2 \theta}.$$

Задатак 1.9.7. Са скраћеницама $t_k = \operatorname{tg} \theta_k$, $k = 1, 2, 3$, доказати:

$$\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \frac{t_1 + t_2 + t_3 - t_1 t_2 t_3}{1 - t_1 t_2 - t_1 t_3 - t_2 t_3}.$$

Затим доказати исту формулу за ctg са скраћеницама $t_k = \operatorname{ctg} \theta_k$.

Ево још неколико задатака за увежбавање доказивања тригонометријских идентитета, који се често налазе у основним курсевима тригонометрије.

Задатак 1.9.8. Доказати идентитете:

$$\begin{aligned} \sin x \cos x \operatorname{tg} x &= 1 - \cos^2 x, & \sec^4 x - \operatorname{tg}^4 x &= 2 \sec^2 x - 1, & \sin x + \sin x \operatorname{ctg}^2 x &= \operatorname{csc} x, \\ \frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{1 - \cos x}{\sin x} &= 2 \operatorname{csc} x, & \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x &= \frac{2}{\sin 2x}, & \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} &= -\frac{\cos 2x}{1 + 2 \sin 2x}, \\ \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{\sin(x+y) - \sin(x-y)} &= \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}, & \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x &= \frac{1}{\sin 2x}, & \frac{\sin^2 x - \sin^2 y}{\sin^2(x+y)} &= \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}. \end{aligned}$$

Пример 1.9.9. Доказати идентитете:

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2 &= 4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 &= 4 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{aligned}$$

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Доказ. Први, квадрирањима и сабирањем лево добијамо $2 + 2 \cos(\alpha - \beta)$, па применимо адициону формулу за половину угла. Други, лево добијамо $2 - 2 \cos(\alpha - \beta)$, а отуда тражена једнакост. \square

Пример 1.9.10. Доказати идентитете:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma) &= 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma + \alpha}{2}, \\ \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos(\alpha + \beta + \gamma) &= 4 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\gamma + \alpha}{2}. \end{aligned}$$

Доказ. Први, трансформишемо израз на левој страни једнакости:

$$\begin{aligned} &= (\sin \alpha + \sin \beta) + (\sin \gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma)) \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \cos \frac{\alpha + \beta + 2\gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta + 2\gamma}{2} \right) \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2}, \end{aligned}$$

а отуда тражени израз. Аналогно доказујемо други. \square

Пример 1.9.11 (Моавров образац). За природан број n важи

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi,$$

где је $i = \sqrt{-1}$ имагинарна јединица.

Доказ. Користимо математичку индукцију. За $n = 1$ то је очигледан идентитет. Нека је дата једнакост тачна за неки природан број $k = 1, 2, 3, \dots$, биће:

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^{k+1} &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^k (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= (\cos k\varphi + i \sin k\varphi)(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= (\cos k\varphi \cos \varphi - \sin k\varphi \sin \varphi) + i(\sin k\varphi \cos \varphi + \cos k\varphi \sin \varphi) \\ &= \cos(k+1)\varphi + i \sin(k+1)\varphi, \end{aligned}$$

што значи да је једнакост тачна и за $k + 1$. Према томе, како је тачна за $n = 1$ тачна је и за $n = 2$, а када је тачна за $n = 2$ онда је тачна за $n = 3$, и редом даље, тачна је за сваки природан број n . \square

Условни тригонометријски идентитети су једнакости које су тачне за све променљиве везане неким условом.

Пример 1.9.12. Доказати да за углове α , β и γ троугла важи једнакост

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma.$$

Доказ. Због $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ имамо: $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\pi - \beta - \gamma) = -\operatorname{tg}(\beta + \gamma) =$

$$= -\frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma} = \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma - 1}.$$

Након множења називником и сређивања добијамо тражену једнакост. \square

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Пример 1.9.13. Доказати да за углове α , β и γ троугла важи идентитет

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Доказ. Полазимо од $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$ и на левој страни имамо редом

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta + \sin[\pi - (\alpha + \beta)] &= \sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta) \\ &= \sin \alpha + \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ &= \sin \alpha(1 + \cos \beta) + \sin \beta(1 + \cos \alpha) \\ &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} + 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cdot 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \\ &= 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) \\ &= 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \\ &= 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Крај доказа. □

Пример 1.9.14. Доказати да за углове α , β и γ троугла важи идентитет

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Доказ. Користимо $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$ и додајемо неутрално $1 - 1$, па лево имамо:

$$\begin{aligned} 1 + \cos \alpha + \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) - 1 &= \\ &= 1 + 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} \\ &= 1 + 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \\ &= 1 + 4 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \\ &= 1 + 4 \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}, \end{aligned}$$

а отуда тражена једнакост. □

Пример 1.9.15. Доказати да за углове α , β и γ троугла важи идентитет

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1.$$

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Доказ. Поступно трансформишемо леву страну:

$$\begin{aligned}
 & \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \\
 & = \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right) \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha + \gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \\
 & = \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \gamma}{2}} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \\
 & = \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right) \cdot \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \\
 & = 1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1,
 \end{aligned}$$

што је и требало доказати. □

Завршићемо ову секцију са површинама које су иначе важна али често слабо видљива основа како геометрије тако и тригонометрије. Следеће две формуле су добро познате и скоро па очигледне. Наводим их због комплетности текста.

Пример 1.9.16. *Површина троугла са страницама a , b и c је*

$$\Pi = \frac{abc}{4R}, \quad \Pi = rs$$

где су R и r полупречници редом описане и уписане кружнице, $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ је полубим троугла.

Доказ. Прва. Из израза за површину и синусне теореме имамо редом:

$$\Pi = \frac{bc}{2} \sin \alpha, \quad \sin \alpha = \frac{a}{2R},$$

а отуда и тражена једнакост.

Друга. Нека је O центар уписане кружнице троугла, а темена наспрам страница a, b, c су редом A, B, C . Тада је $\Pi(ABC) = \Pi(OAB) + \Pi(OBC) + \Pi(OCA) =$

$$= \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br = \frac{1}{2}(a+b+c)r = rs,$$

што је и требало показати. □

Херонов образац за површину троугла је такође добро познат, али не у следећем облику.

Пример 1.9.17. *Површина троугла са страницама a , b и c је*

$$\Pi = \frac{1}{4} \sqrt{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}. \quad (1.49)$$

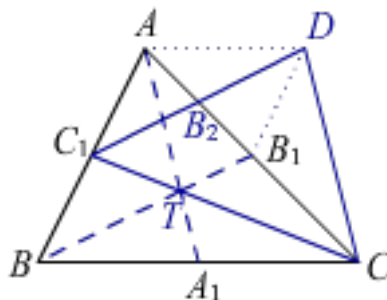
ТРИГОНОМЕТРИЈА

Доказ. Полазимо од стандардног Хероновог образаца:

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \left[\frac{1}{2}(a+b+c) - a\right] \cdot \left[\frac{1}{2}(a+b+c) - b\right] \cdot \left[\frac{1}{2}(a+b+c) - c\right]} \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{[(b+c)^2 - a^2] \cdot [a^2 - (b-c)^2]} \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{(b^2 + 2bc + c^2 - a^2)(a^2 - b^2 + 2bc - c^2)}.
 \end{aligned}$$

Множењем и сређивањем израза под кореном добијамо тражени израз. □

Тежишница (медијана) троугла је дуж која спаја врх са средином супротне стране троугла. Дуж која спаја средине страница троугла паралелна је трећој страници и једнака њеној половини. Тежишница дели троугао на два троугла једнаких површина, чије основе чини подељена страница са заједничком висином. Све три тежишнице деле дати троугао на шест троуглова једнаких површина. Тежишнице се секу у једној тачки која се назива *тежиште* троугла. Тежиште дели тежишницу у односу 2 : 1 почев од врха. Дужинама тежишница једнозначно је одређен троугао.



Slika 1.45: Тежишнице троугла.

На слици 1.45 је троугао ABC са страницама $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ и тежишницама $t_a = AA_1$, $t_b = BB_1$, $t_c = CC_1$ које се секу у тачки T . Странице троугла C_1CD паралелне су тежишницама првог троугла.

Пример 1.9.18 (Средња линија). *Доказати да је дуж која спаја средине страница троугла паралелна трећој страни и једнака половини њене дужине.*

Доказ. Према Талесовој теорему о сличности, четвороугао $C_1BA_1B_1$ је паралелограм (одсечки на крацима CA и CB су пропорционални, $1 : 2$, па су праве AB и A_1B_1 паралелне). Према томе $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{B_1C_1}$. Продужимо B_1C_1 за исти износ до тачке E , тако да је $E-C_1-B_1$, четвороугао EVB_1A је паралелограм јер му се дијагонала полове. Према томе је AC паралелно са EB . Зато је четвороугао $EVCB_1$ паралелограм (јер има два пара паралелних страна). Тиме је доказана и паралелност $B_1C_1 \parallel BC$, а аналогно важи и за остале. □

Да тежиште дели тежишницу у односу 2 : 1 почев од темена троугла, можемо доказати и на следећи начин. Пресликајмо троугао ABC осно симетрично (осном рефлексijом) у односу на осу AC . Тачке C_1, B, A_1 и T пресликавају се редом у тачке C'_1, B', A'_1 и T' . Четвороугао $ABCB'$ је паралелограм са дијагоналom $B - B_1 - B'$. Из $\overline{CA_1} = \overline{AC'_1}$ и $CA_1 \parallel AC'_1$ следи да је $A_1CC'_1A$ паралелограм. Посебно је $\overline{A_1T} = \overline{C'_1T'}$. Из $\overline{BA_1} = \overline{A_1C}$ и $A_1T \parallel CT'$ следи $\overline{BT} = \overline{TT'}$. Из $\overline{TB_1} = \overline{B_1T'}$ следи $\overline{BT} : \overline{TB_1} = 2 : 1$.

За површине на слици 1.45 важе једнакости:

$$\Pi(AC_1C) = \frac{1}{2}\Pi(ABC), \quad \Pi(CB_2C_1) = \frac{1}{2}\Pi(CDC_1), \quad \Pi(AC_1B_2) = \frac{1}{4}\Pi(AC_1C), \quad (1.50)$$

па је

$$\Pi(AC_1C) : \Pi(C_1B_2C) = 4 : 3, \quad \Pi(ABC) : \Pi(CDC_1) = 4 : 3. \quad (1.51)$$

Како су површине датог троугла и троугла који чине његове тежишнице у односу 4 : 3, одмах можемо писати за површину троугла

$$\Pi(ABC) = \frac{1}{3}\sqrt{2(t_a^2t_b^2 + t_b^2t_c^2 + t_c^2t_a^2) - (t_a^4 + t_b^4 + t_c^4)}. \quad (1.52)$$

То је последица Хероновог образаца (1.35).

Пример 1.9.19. Показати да су странице и тежишнице троугла на слици 1.45 у релацијама:

$$\begin{cases} t_a = \frac{1}{2}\sqrt{-a^2 + 2b^2 + 2c^2}, & t_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 - b^2 + 2c^2}, & t_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}, \\ a^2 = -\frac{1}{2}t_a^2 + t_b^2 + t_c^2, & b^2 = t_a^2 - \frac{1}{2}t_b^2 + t_c^2, & c^2 = t_a^2 + t_b^2 - \frac{1}{2}t_c^2. \end{cases} \quad (1.53)$$

Доказ. Посматрајмо тај троугао и његову тежишницу t_a , која која дели троугао ABC спајајући теме A са тачком A_1 на средини странице $a = BC$. Одсечени троуглови имају површине:

$$\begin{cases} \Pi(ABA_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h_a = \frac{1}{4}ah_a, \\ \Pi(AA_1C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h_a = \frac{1}{4}ah_a, \end{cases}$$

где је h_a висина троугла ABC из темена A на страницу a . Дакле, тежишница не дели троугао на два подударна троугла, већ на два троугла једнаких површина, па Херонова формула (1.35) даје:

$$\begin{cases} \Pi(ABA_1) = \frac{1}{4}\sqrt{2\left[c^2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2t_a^2 + t_a^2c^2\right] - \left[c^4 + \left(\frac{a}{2}\right)^4 + t_a^4\right]}, \\ \Pi(AA_1C) = \frac{1}{2}\sqrt{2\left[t_a^2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2b^2 + b^2t_a^2\right] - \left[t_a^4 + \left(\frac{a}{2}\right)^4 + b^4\right]}. \end{cases}$$

Изједначавањем ова два израза, квадрирањем и сређивањем, добијамо прву, а затим аналогно изводимо другу и трећу од шест тражених једнакости. Решавајући те једначине по страницама, добијамо и доње три релације. \square

Са слике 1.45 читамо $\Pi(BCT) = \frac{1}{3}\Pi(BCA)$, па отуда

$$\sin \alpha' : \sin \alpha = (9bc) : (4t_bt_c), \quad (1.54)$$

где су углови $\alpha' = \angle BTC$ и $\alpha = \angle BAC$ редом између тежишница и одговарајућих страница (угао α је унутрашњи угао датог троугла у темену A).

1.10 Опште неједнакости

Овде ћемо видети неколико познатих општих неједнакости које се често срећу у математици и применама. Неке од њих ћемо детаљније објаснити и доказивати, а видећемо и неке њихове примене у тригонометрији.

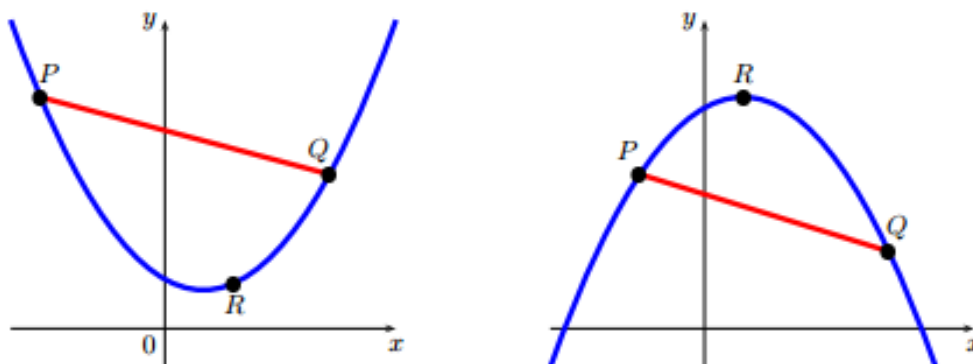
1.10.1 Конвексне функције

Реална функција $f(x)$ је *конвексна* на интервалу $I = [a, b]$ ако и само ако је

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \quad (1.55)$$

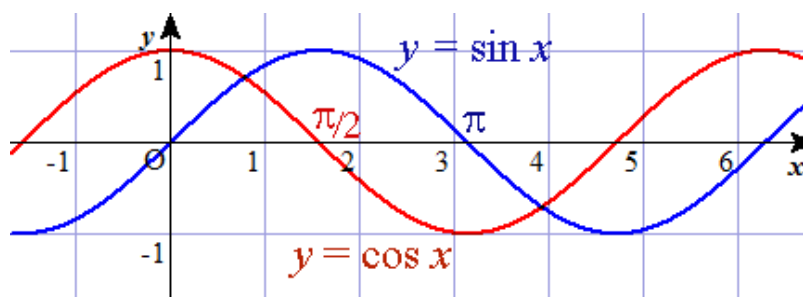
за све $x_1, x_2 \in I$, при чему су скалари $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Функција $f(x)$ је *строго конвексна* на датом интервалу, ако и само ако за било које две тачке $P(x_1, f(x_1))$ и $Q(x_2, f(x_2))$ њеног графа, тачка $R(x, f(x))$ лежи испод тачака дужи PQ за сваку апсцису између x_1 и x_2 . Аналогно, када су тачке R изнад дужи PQ , кажемо да је функција *строго конкавна* на том интервалу, као на слици 1.46.



Slika 1.46: Конвексна (испуњена на доле) и конкавна (удубљена одоздо) функција.

На пример, Тангенсна функција $f(x) = \operatorname{tg} x$ је строго конвексна на интервалу $[0, \pi/2)$, а функције $\sin x$ и $\cos x$ су строго конкавне редом на интервалу $[0, \pi]$ и $[-\pi/2, \pi/2]$. На слици 1.47 плава је *синусоида* $y = \sin x$, црвена линија је *косинусоида* $y = \cos x$.



Slika 1.47: Синусна и косинусна функција.

Пример 1.10.1. Доказати идентитет $\sin \alpha + \cos \alpha \leq \sqrt{2}$, где једнакост важи ако и само је $\alpha = \pi/4$.

Доказ. Ако су α и β оштри углови правоуглог троугла, тада кажемо да су то *комплементарни углови*, или комплементарни јер је $\alpha + \beta = \pi/2$, па је $\sin \alpha = \cos \beta$. Из конкавности синусне функције на том опсегу углова следи:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right) &\geq \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin\beta, \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) &\geq \frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} &\geq \frac{1}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha),\end{aligned}$$

а отуда, и због $\sin \pi/4 = \sqrt{2}/2$, добијамо тражена неједнакост. \square

Исти идентитет 1.10.1 доказујемо и на следећи начин. Нека је

$$\sin \alpha + \cos \alpha = a.$$

Множећи ову једнакост са $\sqrt{2}/2 = \cos \pi/2 = \sin \pi/2$, добијамо:

$$\begin{aligned}\sin \alpha \cos \frac{\pi}{2} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{2} &= \frac{a\sqrt{2}}{2}, \\ \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{a\sqrt{2}}{2},\end{aligned}$$

а због $|\sin x| \leq 1$, биће $|a\sqrt{2}/2| \leq 1$, тј. $|a| \leq \sqrt{2}$, а отуда 1.10.1.

1.10.2 Јенсенова неједнакост

Неједнакост конвексних функција (1.41) се може применити на три и више аргумената. Тако поопштена она се назива *Јенсенова неједнакост*¹⁸.

Пример 1.10.2. *Показати да је*

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3), \quad (1.56)$$

за све конвексне функције $f(x)$ на интервалу $I = [a, b]$, при чему су скалари $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ненегативни, али такви да је њихов збир један. Једнакост важи ако¹⁹ $x_1 = x_2 = x_3$.

Доказ. Нека је $x_1 \neq 1$. Тада је $1 - \lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3 \neq 0$, па имамо редом:

$$\begin{aligned}f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) &= f\left(\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) \frac{\lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{\lambda_2 + \lambda_3}\right) \leq \\ &\leq \lambda_1 f(x_1) + (1 - \lambda_1) f\left(\frac{\lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{\lambda_2 + \lambda_3}\right) \\ &\leq \lambda_1 f(x_1) + (1 - \lambda_1) f\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3} x_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} x_3\right) \\ &\leq \lambda_1 f(x_1) + (1 - \lambda_1) \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3} f(x_2) + \frac{\lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} f(x_3)\right) \\ &\leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3).\end{aligned}$$

Тиме је доказана тражена неједнакост. Све ове релације су једнакости када су сва три икса међусобно једнаки. \square

¹⁸Johan Jensen (1859 - 1925), дански математичар и инжењер.

¹⁹ако - ако и само ако

ТРИГОНОМЕТРИЈА

То је Јенсенова неједнакост (1906) са три аргумента. Она се лако поопштава на низ од $n \in \mathbb{N}$ аргумената x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) са исто толико скалара $\lambda_i \geq 0$ чији збир је један ($\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$), примењено на конвексну функцију $f(x)$. Тада је

$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) \leq \sum_i \lambda_i f(x_i). \quad (1.57)$$

Једнакост важи акко $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Доказује се аналогно (1.42). У случају конкавне функције, смер неједнакости је супротан.

1.10.3 Основне средине

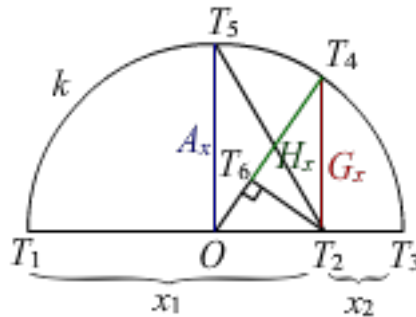
Уређен низ бројева x_i за индексе $i = 1, 2, \dots, n$ где је $n \in \mathbb{N}$ природан број, може се писати као вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Аритметичка, геометријска и хармонијска средина тог низа су бројеви, редом:

$$A(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n), \quad G(\mathbf{x}) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}, \quad H(\mathbf{x}) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}. \quad (1.58)$$

За исти низ ове средине могу имати различите вредности, али ако су коефицијенти датог низа позитивни реални бројеви, увек важе неједнакости:

$$A(\mathbf{x}) \geq G(\mathbf{x}) \geq H(\mathbf{x}), \quad (1.59)$$

при чему важе једнакости ако и само ако $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.



Slika 1.48: Средине двочланог низа.

На слици 1.48 видимо геометријску потврду ових неједнакости када је $n = 2$. Дата је кружница k са центром O и пречником T_1T_3 . На пречнику бирамо произвољну тачку $T_2 \in T_1T_3$ па означимо $x_1 = T_1T_2$ и $x_2 = T_2T_3$, а на кружници бирамо још две тачке $T_4, T_5 \in k$ при чему је $T_5O \perp T_1T_3$. На слици је угао $\angle T_3OT_4$ оштар па постоји тачка $T_6 \in OT_4$ таква да је $T_2T_6 \perp OT_4$. Тада је $A_x = \overline{OT_5}$ аритметичка средина, $G_x = \overline{T_2T_4}$ геометријска средина и $H_x = \overline{T_4T_6}$ хармонијска средина бројева x_1 и x_2 .

Приметимо на тој слици да је $\overline{T_2T_5} = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}/2 = K_x$, број који називамо корен средине квадрата, и да је:

$$K_x \geq A_x \geq G_x \geq H_x, \quad (1.60)$$

где једнакост важи акко $T_2 = O$.

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Чисто алгебарски гледајући на те двочлане низове, када ставимо $x_1 = a$, $x_2 = b$, имамо неједнакости:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}, \quad a, b > 0. \quad (1.61)$$

Наиме, из еквивалентних израза, упоредо за прве две неједнакости имамо:

$$\begin{aligned} (a - b)^2 &\geq 0, & (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 &\geq 0, \\ 2a^2 + 2b^2 &\geq a^2 + 2ab + b^2, & a - 2\sqrt{ab} + b &\geq 0, \\ \frac{a^2 + b^2}{2} &\geq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}, & a + b &\geq 2\sqrt{ab}, \end{aligned}$$

а отуда лева и средња неједнакост, $K \geq A \geq G$, при чему важи једнакост акко $a = b$. Десна неједнакост следи из средње и редом:

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a + b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}},$$

а то је неједнакост геометријске и хармонијске средине, $G \geq H$.

Пример 1.10.3. Доказати да важи неједнакост

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,$$

за произвољне $a, b, c \in \mathbb{R}$, при чему важи једнакост акко $a = b = c$.

Доказ. Из неједнакости аритметичке и геометријске средине следи:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, \quad b^2 + c^2 \geq 2bc, \quad c^2 + a^2 \geq 2ca,$$

а отуда сабирањем и скраћивањем са 2, тражена неједнакост. □

Пример 1.10.4. Доказати неједнакост аритметичке и геометријске средине

$$\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}, \quad (1.62)$$

помоћу (1.43).

Доказ. Логаритамска функција је конкавна. Зато је

$$\log\left(\frac{1}{n} \sum_i x_i\right) \geq \frac{1}{n} \sum_i \log(x_i),$$

а отуда сабирањем и скраћивањем логаритама следи тражена неједнакост. □

Пример 1.10.5. Нека су a_1, a_2, \dots, a_n позитивни реални бројеви такви да $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. Доказати да је тада

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Доказ. Множењем неједнакости А-Г:

$$1 + a_1 \geq 2\sqrt{a_1}, \quad 1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_2}, \quad \dots, \quad 1 + a_n \geq 2\sqrt{a_n},$$

добијмо тражену. □

Тежинске аритметичке и геометријске средине су редом:

$$A_\lambda(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n, \quad G_\lambda(\mathbf{x}) = a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n}, \quad (1.63)$$

где су коефицијенти $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ненегативни реални бројеви чији збир је један. За њих такође важи неједнакост

$$A_\lambda(\mathbf{x}) \geq G_\lambda(\mathbf{x}), \quad (1.64)$$

при чему важи једнакост акко су сви $a_i = a_j$ и $\lambda_i \neq 0$. Не-тежинске средине добијамо стављајући свако $\lambda_i = 1/n$.

Примењујући синусну теорему 1.6.2, из друге неједнакости добијамо

$$a + b + c \leq 3\sqrt{3}R, \quad (1.65)$$

где су a, b и c одговарајуће странице датог троугла, а R полупречник његове описане кружнице.

Пример 1.10.6. Нека је ABC троугао са страницама a, b и c наспрам датих темена, и унутрашњим угловима α, β и γ у датим теменима. Докажи²⁰:

$$2a \cos \alpha + 2b \cos \beta + 2c \cos \gamma \leq 3\sqrt[3]{abc}.$$

Доказ. Нека су Π и s површина и полуобим троугла ABC . Према косинусној теорему, на левој страни дате неједнакости имамо:

$$\begin{aligned} & 2a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + 2b \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + 2c \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \\ & = \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{bc} + \frac{b(c^2 + a^2 - b^2)}{ca} + \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{ab} \\ & = \frac{(a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(a + a - b)}{abc} \\ & = \frac{16s(s - a)(s - b)(s - c)}{abc} = \frac{16\Pi^2}{abc}. \end{aligned}$$

У последњој једнакости је употребљен Херонов образак 1.7.3. Након кореновања, преостаје да је полазна неједнакост еквивалентна са

$$4\Pi \leq \sqrt{3} \sqrt[3]{(abc)^2}.$$

Затим користимо:

$$\Pi = \frac{abc}{4R}, \quad a + b + c \leq 3\sqrt{3}R,$$

из чега следи

$$4\Pi = \frac{abc}{R} \leq \frac{3\sqrt{3}abc}{a + b + c} \leq \frac{3\sqrt{3}abc}{3\sqrt[3]{abc}} = \sqrt{3} \sqrt[3]{(abc)^2},$$

где смо употребили и неједнакост аритметичке и геометријске средине. Тиме је доказ завршен. □

²⁰By Elias Lampakis, Kiparissia, Greece.

1.10.4 Неједнакост усклађивања

Постоји још једна једноставна неједнакост, мање позната (непозната) у математици а која је сама по себи занимљива и чији доказ можете наћи у мојој недавно објављеној књизи Информација перцепције²¹. Када имамо два низа реалних бројева x_i и y_i , са индексима $i = 1, 2, \dots, n$ и $n \in \mathbb{N}$, тада се скаларним производом назива број

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \quad (1.66)$$

Може се доказати да је овај производ максималан када су чланови низова *усклађени*. Једноставно, низови су усклађени када већем x_i одговара већи y_i . Рецимо, низови су усклађени када су им чланови поредани тако да је:

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n, \quad y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n. \quad (1.67)$$

Тада производ (1.52) није мањи од било којег другог производа који би се могао добити нарушавањем неједнакости (1.53).

На пример, Шенонова информација ($x_i \in [0, 1]$, $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$) је ненегативан реалан број

$$S = -x_1 \ln x_1 - x_2 \ln x_2 - \dots - x_n \ln x_n. \quad (1.68)$$

То је заправо математичко очекивање (тежинска аритметичка средина) у теорији вероватноће, а овде средња вредност логаритама вероватноћа дате расподеле. По Хартлију (1928), број $I_i = -\ln p_i$ је информација $n_i = 1/p_i$ једнако вероватних догађаја. Шенонов број S има максималну вредност у односу на све могуће скаларне производе низа бројева x_i и логаритама тих бројева, јер су низови x_i и $y_i = -\ln x_i$ усклађени. Даље се у поменутој књизи узима да скаларни производ поопштава Шенонову информацију.

У новијим мојим текстовима и у књизи Природа времена²², та поопштена информација се упоређује са Лагранжовом функцијом физичког дејства. Следећи корак била би промоција „принципа информације” који би заправо био „принцип најмањег (највећег) дејства” одавно познат теоријској физици. Тај принцип следи из чињенице да више информације има догађај који је био мање вероватан, што је добро познато јавним медијима а и у математици у скромнијем облику. Према томе, ако природа тежи реализацији највероватнијег, онда је она шкрта са информацијом.

То су били први примери употребе неједнакости скаларног производа. Следеће примере узмемо прво из претходног примера, за скаларни производ низа $x_1 = a$, $x_2 = b$ и $x_3 = c$, са низом $y_1 = \cos \alpha$, $y_2 = \cos \beta$ и $y_3 = \cos \gamma$, где су x -ове странице троугла наспрам углова чији су косинуси y -и. Из геометрије знамо да већој страници одговара већи наспрамни угао, па је скаларни производ (1.46) увек неусклађен, осим када су све три странице једнаке. Зато функција

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma \quad (1.69)$$

има максимум у једнакостраничном троуглу $a = b = c$ који износи $3c \cos \frac{\pi}{3} = \frac{3c}{2}$. Заједно са поменутиим примером погледајмо и скаларни производ са истим вектором $\mathbf{x} = (a, b, c)$, али са вектором $\mathbf{y} = (\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma)$:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma = 2R(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma), \quad (1.70)$$

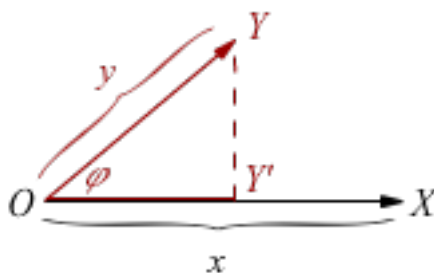
²¹В. [13].

²²В. [14].

где је употребљена синусна теорема. Овај скаларни производ је већ максималан у датим условима, када су α, β, γ углови троугла наспрамни страницама редом a, b, c , а R је полупречник описане кружнице троугла. Тада су компоненте вектора усклађене, јер је наспрам веће стране већи угао, а већем углу одговара већи синус.

1.10.5 Коши-Шварцова неједнакост

Векторе $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ можемо схватити као орјентисане дужи $\overline{OX} = \vec{x}$ и $\overline{OY} = \vec{y}$ чији су врхови тачке $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $Y(y_1, y_2, \dots, y_n)$ са по n координата у неком n -димензионалном Декартовом простору са исходиштем $O(0, 0, \dots, 0)$. Без обзира колико је координата $n \in \mathbb{N}$, троугао ΔOXY је увек у једној равни.



Slika 1.49: Скаларни производ вектора.

На слици 1.49 је приказан троугао ΔOXY који чине вектори, орјентисане дужи \vec{x} и \vec{y} између којих је угао $\varphi = \angle XOY$. Дужине ових вектора су $x = |\vec{x}|$ и $y = |\vec{y}|$, а дужина пројекције вектора \vec{y} на вектор \vec{x} је $\overline{OY'} = y \cos \varphi$. Оно што називамо скаларним производом два вектора је производ дужине првог вектора и дужине пројекције другог на први

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = xy \cos \varphi. \quad (1.71)$$

Исти резултат се добије када množимо дужину другог вектора са дужином пројекције првог на други, па кажемо да је скаларни производ комутативан, пишемо

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}. \quad (1.72)$$

Лако се проверава да је овај производ и дистрибутиван

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}. \quad (1.73)$$

Када је угао између вектора нула, $\varphi = 0$, тада је косинус један, $\cos \varphi = 1$, па је скаларни производ просто производ дужина (интензитета) два вектора. Када је угао прав, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ онда је косинус нула па скаларни производ постаје нула.

Зато у правоуглом систему координата са јединичним векторима координатних оса \mathbf{e}_k , где векторе можемо писати као збирове:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{y} = y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 + \dots + y_n \mathbf{e}_n, \quad (1.74)$$

скаларни производ постаје (1.50), а интензитети вектора постају

$$x = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, \quad y = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}. \quad (1.75)$$

Отуда је увек

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}. \quad (1.76)$$

То је Коши-Шварцова неједнакост²³.

Пример 1.10.7. Нека су a, b, c реални бројеви. Показати да је

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2.$$

Решење. Из Коши-Шварцове неједнакости, $(1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c)^2$. \square

Пример 1.10.8. За позитивне реалне бројеве a, b, c доказати

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Решење. Дата неједнакост је еквивалентна са:

$$\frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 \geq \frac{9}{2},$$

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq \frac{9}{2},$$

$$(x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) \geq (1+1+1)^2,$$

где је $x = \sqrt{b+c}$, $y = \sqrt{c+a}$, $z = \sqrt{a+b}$, а то је тачно према Коши-Шварц. \square

Пример 1.10.9. За позитивне реалне бројеве x, y, z за које важи $x + y + z = 1$ је

$$\frac{x}{y^2+z} + \frac{y}{z^2+x} + \frac{z}{x^2+y} \geq \frac{9}{4}.$$

Доказ. Из Коши-Шварцове неједнакости следи:

$$\left(\frac{x}{y^2+z} + \frac{y}{z^2+x} + \frac{z}{x^2+y} \right) [x(y^2+z) + y(z^2+x) + z(x^2+y)] \geq (x+y+z)^2,$$

па је довољно доказати $4(x+y+z)^2 \geq 9[x(y^2+z) + y(z^2+x) + z(x^2+y)]$. После сређивања, ово је $4(x^2 + y^2 + z^2) \geq xy + yz + zx + 9(xy^2 + yz^2 + zx^2)$. Да је то тачно видимо из $x^2 \cdot 1 = x^2(x+y+z) = x^3 + x^2y + x^2z$, и слично за y и z , па сабирањем неједнакости (и неједнакост А-Г) даје $x(x^2 + y^2) \geq 2x^2z$, $y(x^2 + y^2) \geq 2xy^2$, $z(z^2 + y^2) \geq 2z^2y$, а отуда тражена неједнакост. Једнакост важи акко $x = y = z = \frac{1}{3}$. \square

²³Cauchy-Schwarz inequality: https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%E2%80%93Schwarz_inequality

1.10.6 Холдерова неједнакост

Коши-Шварцова неједнакост је посебан случај Холдерове²⁴ неједнакости

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad 1/p + 1/q = 1, \quad p, q > 1. \quad (1.77)$$

при чему неједнакост постаје једнакост акко постоје реални бројеви α, β такви да је $\alpha|f|^p + \beta|g|^q = 0$, у случају тзв. линеарности. То је скраћени израз у којем $1/\infty$ значи нулу, а норме векторског простора V функција f када је p коначан број и када је $p = \infty$, дате су изразима:

$$\|f\|_p = \left(\int_V |f|^p dv \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|f\|_\infty = \sup\{|f|\}.$$

Десно је супремум (максимум) вредности $|f|$. На пример, за претходне низове је

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1/p + 1/q = 1, \quad p, q > 1. \quad (1.78)$$

Холдерова неједнакост се може доказати помоћу Јунгове неједнакости²⁵

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad (1.79)$$

где су a и b ненегативни реални бројеви а p и q су позитивни реални бројеви такви да је $1/p + 1/q = 1$. Ова неједнакост постаје једнакост акко $a^p = b^q$.

Приметимо да је Јунгова неједнакост за случај $p = q = 2$ еквивалентна неједнакости, $G \leq A$, аритметичке и геометријске средине:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \iff \sqrt{a^2 b^2} \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Општу (1.65) добијамо аналогно користећи тежинске средине и (1.50).

Пример 1.10.10. Доказати Јунгову неједнакост помоћу Јенсенове.

Доказ. Логаритамска функција је удубљена одоздо (конкавна) и зато:

$$\ln[tx + (1-t)y] \geq t \ln x + (1-t) \ln y,$$

где важи једнакост акко $x = y$. Ставимо $x = a^p$, $y = b^q$, $t = 1/p$, па је $1-t = 1/q$, а отуда Јунгова неједнакост (1.65). \square

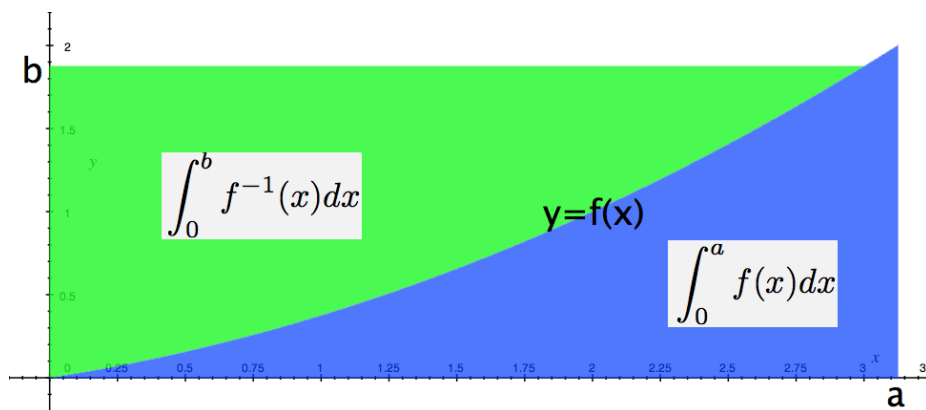
Јунгова неједнакост (1.65) је посебан случај Јунгове неједнакости

$$ab \leq \int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(x) dx, \quad (1.80)$$

где је $f(x)$ непрекидна растућа функција дефинисана за ненегативне реалне бројеве x и $f(x) = 0$, а a, b су позитивни реални бројеви такви да је први у домену а други кодомену дате функције. Једнакост важи акко $f(a) = b$.

²⁴Hölder's inequality: https://en.wikipedia.org/wiki/H%C3%B6lder%27s_inequality

²⁵Young's inequality: https://en.wikipedia.org/wiki/Young%27s_inequality



Slika 1.50: Јунгова неједнакост за интеграле.

Доказ (1.66) се види на слици 1.50²⁶. Наиме, нека је $f(x) = x^{p-1}$. Тада:

$$\int_0^a f(x) dx = \frac{a^p}{p}, \quad f^{-1}(x) = x^{1/(p-1)},$$

$$\int_0^b f^{-1}(x) dx = \frac{b^{p/(p-1)}}{p/(p-1)}, \quad q = p/(p-1),$$

па из Јунгове неједнакост (1.65) следи (1.66). На Јунговој неједнакости се заснивају многи докази Холдерове неједнакости (1.63).

Пример 1.10.11. Доказати Холдерову неједнакост помоћу Јунгове.

Доказ. Када је $\|f\|_p = 0$ тада је $f = 0$ па се нема шта доказивати. Случај $\|g\|_q = 0$ је сличан. Са друге стране, можемо претпоставити да су дате функције реалне, да је $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ за свако x . Нека је:

$$a = \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}, \quad b = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}, \quad \alpha = 1/p, \quad \beta = 1/q.$$

Тада из Јунгове неједнакости следи

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

То су мерљиве функције, па интегрирањем добијамо:

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{\|f(x)\|_p^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\|g(x)\|_q^q}{\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

а отуда неједнакост (1.63). □

Холдерова неједнакост која поопштава израз (1.64) каже да за бројеве a_{ij} , где $i = 1, 2, \dots, k$ и $j = 1, 2, \dots, n$ важи неједнакост

$$\prod_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right)^{\lambda_i} \geq \sum_{j=1}^n \left(\prod_{i=1}^k a_{ij}^{\lambda_i} \right) \quad (1.81)$$

²⁶Mathematics: <http://math.stackexchange.com/>

за све $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. На пример, у случају $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, ова се неједнакост своди на

$$(a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n})^{\frac{1}{2}} (a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n})^{\frac{1}{2}} \geq (a_{11}a_{21})^{\frac{1}{2}} + (a_{12}a_{22})^{\frac{1}{2}} + \dots + (a_{1n}a_{2n})^{\frac{1}{2}},$$

која је Коши-Шварцова (1.62).

Пример 1.10.12. Нека су a, b, c реални позитивни бројеви такви да је $a + b + c = 3$. Шта је најмања могућа вредност израза $f(a, b, c) = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}$?

Решење. Из Холдере неједнакости (1.67) следи

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right) (a + b + c) \geq (1 + 1 + 1)^3,$$

а како је $a + b + c = 3$, минимум функције f је 3. □

1.10.7 Неједнакост Минковског

Када је $p \geq 1$ а a_i и b_i су реални бројеви за индексе $i = 1, 2, \dots, n$ који иду до неког природног броја $n \in \mathbb{N}$, тада важи неједнакост

$$\left(\sum_{i=0}^n |a_i + b_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=0}^n |a_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=0}^n |b_i|^p \right)^{1/p}. \quad (1.82)$$

То је Минковскијева неједнакост.

За $p = 1$ неједнакост Минковског се своди на неједнакост троугла, да је збир две странице троугла већи од треће. Када је $p > 1$ имамо:

$$\begin{aligned} |a_k + b_k|^p &= |a_k + b_k| |a_k + b_k|^{p-1} \leq (|a_k| + |b_k|) |a_k + b_k|^{p-1}, \\ |a_k + b_k|^p &\leq |a_k| |a_k + b_k|^{p-1} + |b_k| |a_k + b_k|^{p-1}. \end{aligned}$$

Ставимо $q = \frac{p}{p-1}$ да је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, па Холдеова неједнакост даје:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n |a_k| |a_k + b_k|^{p-1} &\leq \left(\sum_{k=0}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^n |a_k + b_k|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}}, \\ \sum_{k=0}^n |b_k| |a_k + b_k|^{p-1} &\leq \left(\sum_{k=0}^n |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^n |a_k + b_k|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Сабирајући ове две неједнакости, делећи заједничким фактором десне стране и узимајући у обзир $(p-1)q = p$, добијамо:

$$\left(\sum_{k=0}^n |a_k + b_k|^p \right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \frac{\sum_{k=0}^n (|a_k| + |b_k|) |a_k + b_k|^{p-1}}{\left(\sum_{k=0}^n |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}} \leq \left(\sum_{k=0}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=0}^n |b_k|^p \right)^{1/p},$$

а отуда следи (1.68).

Када су у n -димензионалном Декартовом простору $n \in \mathbb{N}$ дате тачке $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $B(-b_1, -b_2, \dots, -b_n)$ и $C(c_1, c_2, \dots, c_n)$, где је $c_k = a_k + b_k$ редом за $k = 1, 2, \dots, n$, тада је $\triangle ABC$ троугао са страницама дужина:

$$a = \sqrt{\sum_k a_k^2}, \quad b = \sqrt{\sum_k b_k^2}, \quad c = \sqrt{\sum_k |a_k + b_k|^2}.$$

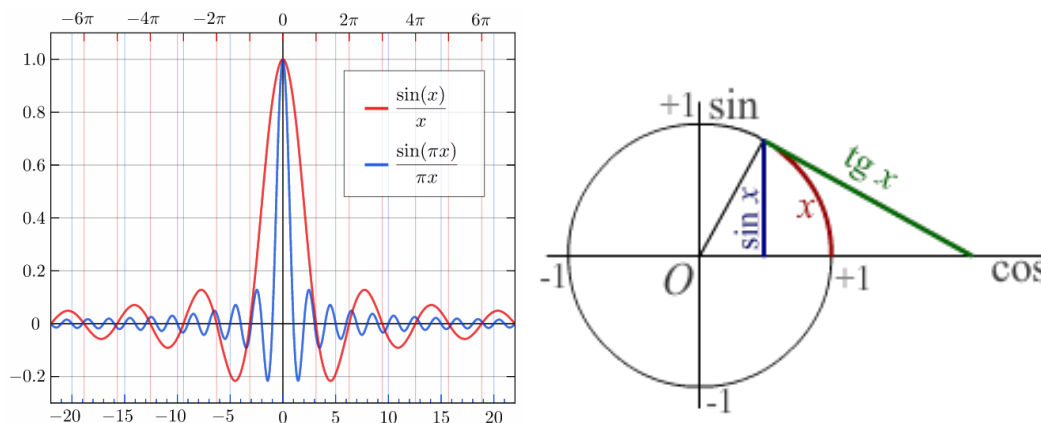
Неједнакост троугла $c \leq a + b$ је специјални случај неједнакости (1.68) за $p = 2$.

1.10.8 Кардинални синус

Кардинални синус је функција

$$\operatorname{sinc}(\lambda x) = \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda x}, \quad (1.83)$$

са графом 1.51 лево²⁷, за $\lambda = 1$ и $\lambda = \pi$. Видимо да $\operatorname{sinc} x \rightarrow 1$, када $x \rightarrow 0$.



Slika 1.51: Кардинални синус, $\sin x/x \rightarrow 1$ за $x \rightarrow 0$.

Да кардијални синус тежи јединици када аргумент тежи нули најбрже видимо помоћу Лопиталовог правила (извод бројника и називника не мења вредност лимеса количника):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \lambda x}{\lambda x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda \cos \lambda x}{\lambda} = 1.$$

Исти резултат даје слика 1.51 десно. За правоугли троугао чија је висина $\sin x$ и катета $\operatorname{tg} x$, а унутар којег је кружни лук дужине x у радијанима, важе неједнакости:

$$\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x,$$

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x},$$

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1,$$

па када $x \rightarrow 0$ овај сендвич (тзв. „два полицајца око лопова“) даје

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (1.84)$$

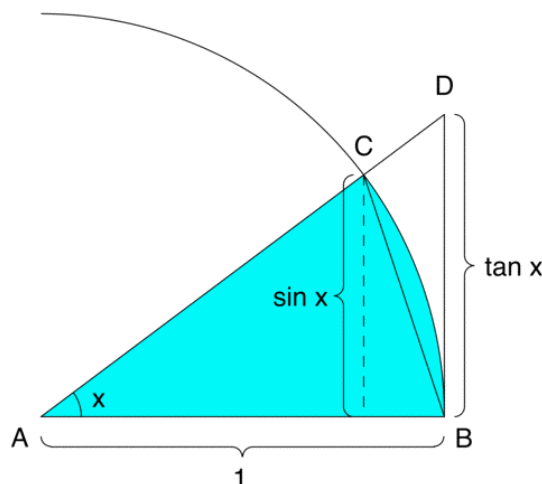
То је позната и веома важна гранична вредност. Ако мислите да на претходној слици има неких нејасноћа, постоји још убедљивија, слика 1.52, однекуд са интернета.

На слици 1.52 посматрамо не дужине, већ површине. Површина троугла ABC је $\frac{1}{2} \sin x$ (полу производ основице и висине), површина сенченог исечка круга је $\frac{1}{2} x$, а површина троугла ABD је $\frac{1}{2} \operatorname{tg} x$. Сада је сасвим јасно да важе неједнакости:

$$\frac{1}{2} \sin x \leq \frac{1}{2} x \leq \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

²⁷Wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Sinc_function

ТРИГОНОМЕТРИЈА



Slika 1.52: Неједнакост површина и $\sin x/x \rightarrow 1$ за $x \rightarrow 0$.

а отуда опет (1.45).

Тригонометријске функције су довољно непрекидне и диференцијабилне да су веома захвалне за употребу инфинитезималног рачуна. Као и било коју реалну функцију $f(x)$ која се у околини тачке $x = a$ може развити у Тејлоров²⁸ ред, облика

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots, \quad (1.85)$$

развијамо и функције:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad (1.86a)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} + \dots, \quad (1.86b)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} + \dots, \quad (1.86c)$$

где је бирана околина тачке $a = 0$, када ови редови постају Маклоренови²⁹. Ојлер³⁰ је ове редове употребио и са имагинарном јединицом $i = \sqrt{-1}$, када се непосредно добија

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad (1.87)$$

што доприноси значају Моавровог образаца, пример 1.9.11. На тај начин, стављајући $x = \pi$, Ојлер је добио своју славну формулу

$$e^{i\pi} = -1. \quad (1.88)$$

У почетку оспораване ови Ојлерови резултати су након детаљних анализа дефинитивно прихваћени у математици.

²⁸Brook Taylor (1685-1731), енглески математичар.

²⁹Colin Maclaurin (1698-1746), шкотски математичар.

³⁰Leonhard Euler (1707-1783), швајцарско руски математичар.

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Поред визуелног геометријског приступа и тригонометрије реалних функција, подсетимо се и да је:

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= (x - y)(x + y), \\x^3 - y^3 &= (x - y)(x^2 + xy + y^2).\end{aligned}$$

Затим, приметимо да је:

$$\begin{aligned}x - y &= (x^{1/2} - y^{1/2})(x^{1/2} + y^{1/2}) = \\&= (x^{1/4} - y^{1/4})(x^{1/2} + y^{1/2})(x^{1/4} + y^{1/4}) \\&= (x^{1/8} - y^{1/8})(x^{1/2} + y^{1/2})(x^{1/4} + y^{1/4})(x^{1/8} + y^{1/8})\end{aligned}$$

и да је уопште

$$x - y = (x^{1/2^n} - y^{1/2^n}) \prod_{k=1}^n (x^{1/2^k} + y^{1/2^k}). \quad (1.89)$$

Пример 1.10.13. Доказати да за кардинални синус важи једнакост

$$\frac{\sin \theta}{\theta} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{\theta}{2^k}.$$

Доказ. У једнакост (1.43) ставимо $x = e^{i\theta}$ и $y = e^{-i\theta}$, па добијамо

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2^n (e^{i\theta/2^n} - e^{-i\theta/2^n}) \prod_{k=1}^n \frac{e^{i\theta/2^k} + e^{-i\theta/2^k}}{2}.$$

Из $e^{i\theta} = \sin \theta + i \cos \theta$ и делећи горњу једнакост са $2i\theta$, добијамо

$$\frac{\sin \theta}{\theta} = \frac{\sin(\theta/2^n)}{\theta/2^n} \prod_{k=1}^n \cos(\theta/2^k).$$

У граничном случају $n \rightarrow \infty$ биће $\frac{\sin(\theta/2^n)}{\theta/2^n} \rightarrow 1$, и добијамо тражену једнакост. \square

Без доказа наводим још неколико особина кардиналног синуса.

$$\operatorname{sinc} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}, \quad (1.90)$$

$$\operatorname{sinc} x = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right). \quad (1.91)$$

Такође је

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} x \, dx = \pi, \quad (1.92)$$

иако овај интеграл није апсолутно конвергентан. Међутим,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2 x \, dx = \pi, \quad (1.93)$$

а квадрат кардиналног синуса јесте интеграбилан. Непрекидна Фуријеова трансформација $\operatorname{sinc} x$ је *ректангуларна функција*

$$\operatorname{rect}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(t) e^{2\pi i f t} \, dt, \quad (1.94)$$

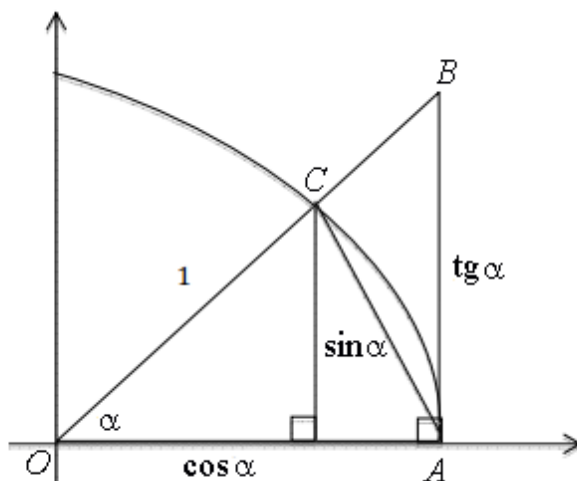
која има вредност 1 за аргумент између $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$, а иначе нулу.

1.11 Посебне неједнакости

За оштре углове у радијанима ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) важи неједнакост

$$\alpha < \frac{1}{2}(\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha). \quad (1.95)$$

То је најмање сто година стара тврдња која се може наћи у једној мађарској збирци задатака из 1909. године, а коју ћемо доказати корак по корак. Овде то радимо пре свега због понављања наших претходних резултата, укључујући и важну неједнакост добијену са слике 1.53.



Slika 1.53: Неједнакост $\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$.

Приметимо да важе адиционе формуле:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1, \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Затим, да важе идентичне трансформације:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha - 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} - \frac{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{(2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2})^2}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} [\cos^4 \frac{\alpha}{2} - (\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2})]}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} (\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2})} \\ &= \frac{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} (\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1)^2}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos \alpha}, \end{aligned}$$

па за $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ важи неједнакост $\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha - 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} > 0$ односно

$$\sqrt{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha} > 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad (1.96)$$

Када применимо неједнакост аритметичке и геометријске средине

$$\frac{1}{2}(\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha) > \sqrt{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha} > 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

а са слике 1.53 видимо да су површине троуглова

$$\Pi(OAC) = \frac{1}{2} \sin \alpha, \quad \Pi(OAB) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha,$$

и да је површина кружног исечка $\Pi(\widehat{OAC}) = \frac{\alpha}{2}$. Како је површина троугла ΔOAC мања од површине исечка \widehat{OAC} , а ова мања од површине троугла ΔOAB , имамо од раније познате неједнакости:

$$\frac{1}{2} \sin \alpha < \frac{1}{2} \alpha < \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha.$$

То су строге неједнакости јер је $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\cos \alpha < 1$.

Комбиновано са претходним неједнакостима, сада имамо редом:

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} < \alpha < 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} < \sqrt{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha} < \frac{1}{2} (\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha),$$

$$\alpha < \frac{1}{2} (\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha),$$

а то је тражена неједнакост (1.81).

Заједно са претходном доказујемо и неједнакости:

$$\sin \alpha < 2 \sin \frac{\alpha}{2} < \alpha < \sin \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} < 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} < \sqrt{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha} < \frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{2} < \operatorname{tg} \alpha, \quad (1.97)$$

за углове $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Наиме, у претходној неједнакости заменимо α са $\alpha/2$, добијамо:

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} < \alpha < \sin \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Отуда и због $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} < 2 \sin \frac{\alpha}{2}$ лако налазимо (1.83).

1.11.1 Тетиве елипсе

Нека су $a \neq b \geq 0$ и θ реални бројеви и n природан број ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$). Тада

$$\frac{a^{2n} + b^{2n} - 2a^n b^n \cos(n\theta)}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta} \leq \left(\frac{a^n - b^n}{a - b} \right)^2. \quad (1.98)$$

Томас Прајс³¹ је до ове неједнакости дошао разматрајући тетиве кружнице и елипсе. Доказаћемо је у неколико корака кроз примере.

Пример 1.11.1 (Тетиве кружнице). *Дата је јединична кружница (периферија круга) са $n > 1$ подједнако распоређених тачака $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$. Спојимо ω_0 тетивама са осталим тачкама. Доказати да је производ дужина тих $n - 1$ тетива n .*

Доказ. Поставимо центар круга у исходиште комплексне равни тако да је $\omega_0 = 1$ као на слици 1.54. Тада су тачке $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ за $k = 1, 2, \dots, n - 1$ корени јединице, дакле корени полинома $z^n - 1$. Према томе је:

$$z^n - 1 = (z - 1)(z - \omega_1)(z - \omega_2) \dots (z - \omega_{n-1}),$$

³¹T. E. Price, Product of chord lengths of an ellipse, Math Magazine 75 (2002), no. 4, 300-307.

ТРИГОНОМЕТРИЈА

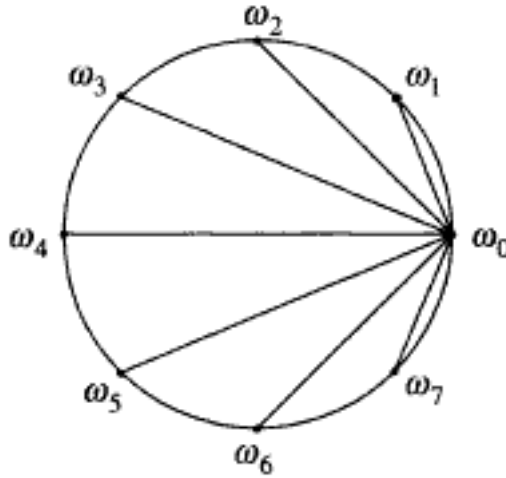
$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = (z - \omega_1)(z - \omega_2) \dots (z - \omega_n),$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left| \frac{z^n - 1}{z - 1} \right| = \lim_{z \rightarrow 1} |z - \omega_1| |z - \omega_2| \dots |z - \omega_n| = \prod_{k=1}^{n-1} |1 - \omega_k|,$$

а то је тачно производ дужина тетива. Помоћу Лопиталовог правила налазимо:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left| \frac{z^n - 1}{z - 1} \right| = \left| \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^n - 1}{z - 1} \right| = \left| \lim_{z \rightarrow 1} \frac{nz^{n-1}}{1} \right| = |n| = n,$$

а то је оно што је требало доказати. □



Slika 1.54: Јединична кружница са седам тетива.

Када је пронашао да је производ ових тетива једнак броју тачака, Прајс је затим исти метод применио на елипсу дефинишући је помоћу два различита и реална броја $a \geq b \geq 0$, посматрајући углове $0 \leq \theta < 2\pi$. Темена на великој и малој полуоси елипсе су редом $\pm(a + b)$ и $\pm i(a - b)$, а тачке елипсе су комплексни бројеви

$$ae^{i\theta} + be^{-i\theta} = (a + b) \cos \theta + i(a - b) \sin \theta.$$

Мењајући бројеве a, b могуће је добити било коју елипсу са центром у исходишту комплексне равни \mathbb{C} и фокусима на великој оси једнако удаљеним од исходишта.

Та крајеве тетива бирамо тачке на елипси које су слике n -тих корена јединице добијене пресликавањем $e^{i\theta} \rightarrow ae^{i\theta} + be^{-i\theta}$, при чему је $\omega_0 = a + b$. Тада је производ дужина тетива d_n елипсе дат са

$$d_n = n \frac{a^n - b^n}{a - b}. \tag{1.99}$$

Изненађујуће је да ово постаје позната Бинетова формула³² за Фибоначијеве бројеве ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$ и $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$) ако су бројеви a, b златне средине $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Прајс је дошао до овог резултата након опширног израчунавања, након чега је доказао и

³²Binet's Formula: <http://mathworld.wolfram.com/BinetsFibonacciNumberFormula.html>

неједнакост (1.84). Уместо његовог, овде ћемо следити лакши пут доказивања³³, ближи основној теми ове књиге.

Пример 1.11.2. Доказати неједнакост

$$\sin(n\theta) \cdot \sin \theta \leq 2n(1 - \cos \theta), \quad (1.100)$$

када је $n \in \mathbb{N}$ и $\theta \in \mathbb{R}$.

Доказ. Ако је $-1 \leq \cos \theta < 0$, тада је очигледно $2n(1 - \cos \theta) \leq 2n(1 + 1) = 4n$. Свакако је $\sin(n\theta) \cdot \sin \theta \leq 1$, па је дата неједнакост тривијално тачна.

Случај $0 \leq \cos \theta \leq 1$ доказаћемо математичком индукцијом. Када је $n = 1$, тада:

$$\begin{aligned} 2n(1 - \cos \theta) - \sin(n\theta) \cdot \sin \theta &= 2(1 - \cos \theta) - (1 - \cos^2 \theta) = \\ &= 1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta = (1 - \cos \theta)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Затим доказујемо корак индукције. Претпоставимо да дата неједнакост важи за позитиван цели број n . Тада:

$$\begin{aligned} \sin[(n+1)\theta] \cdot \sin \theta &= \sin(n\theta + \theta) \cdot \sin \theta = \\ &= [\sin(n\theta) \cdot \cos \theta + \cos(n\theta) \cdot \sin \theta] \cdot \sin \theta \\ &= \sin(n\theta) \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + \sin^2 \theta \cdot \cos(n\theta) \\ &\leq 2n(1 - \cos \theta) \cdot \cos \theta + (1 - \cos^2 \theta) \cdot \cos(n\theta) = \end{aligned}$$

ово према претпоставци индукције, па имамо даље:

$$\begin{aligned} &= 2n(1 - \cos \theta) \cdot \cos \theta + (1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) \cdot \cos(n\theta) \\ &= (1 - \cos \theta)[2n \cos \theta + (1 + \cos \theta) \cdot \cos(n\theta)] \leq \end{aligned}$$

због $\cos \theta \in [0, 1]$ имамо даље:

$$\begin{aligned} &\leq (1 - \cos \theta)(2n + 1) = 2(n + 1)(1 - \cos \theta), \\ \sin[(n+1)\theta] \cdot \sin \theta &\leq 2(n + 1)(1 - \cos \theta), \end{aligned}$$

чиме је доказ индукцијом завршен. □

Пример 1.11.3. Нека су $n \in \mathbb{N}$ и $\theta \in \mathbb{R}$. Тада

$$1 - \cos(n\theta) \leq n^2(1 - \cos \theta).$$

Доказ. Опет користимо индукцију. За $n = 1$ неједнакост је тривијално тачна. Даље, претпоставимо да неједнакост важи за $n \in \mathbb{N}$. Тада:

$$\begin{aligned} 1 - \cos[(n+1)\theta] &= 1 - \cos(n\theta) \cdot \cos \theta + \sin(n\theta) \cdot \sin \theta \leq \\ &\leq 1 - \cos(n\theta) \cos \theta + 2n(1 - \cos \theta) \\ &= 1 - \cos(n\theta) \cdot \cos \theta + 2n(1 - \cos \theta) + \cos \theta - \cos \theta \\ &= [1 - \cos(n\theta)] \cdot \cos \theta + (1 - \cos \theta) + 2n(1 - \cos \theta) \\ &\leq n^2(1 - \cos \theta) \cdot \cos \theta + (1 - \cos \theta) + 2n(1 - \cos \theta) \\ &= (1 - \cos \theta)(n^2 \cos \theta + 2n + 1) \\ &\leq (1 - \cos \theta)(n^2 + 2n + 1) = (n + 1)^2(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

чиме је доказ индукцијом завршен. □

³³H. Katsuura and S. Obaid, Inequalities involving trigonometric and hyperbolic functions, Mathematical Inequalities and Applications 10 (2007), no. 2, 243-250.

Пример 1.11.4. Нека су a и b позитивни реални бројеви, а n и k позитивни цели бројеви. Тада

$$\sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} \geq (n+1)a^{n/2}b^{n/2}.$$

Доказ. Нека је $x = a/b > 0$. Тада:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} &= b^n (x^0 + x^1 + \dots + x^n) = b^n (n+1) \frac{x^0 + x^1 + \dots + x^n}{n+1} \geq \\ &\geq b^n (n+1) \sqrt[n+1]{x^0 \cdot x^1 \cdot \dots \cdot x^n} = b^n (n+1) (x^{0+1+\dots+n})^{1/(n+1)} \\ &= b^n (n+1) x^{[n(n+1)/2] \cdot [1/(n+1)]} = b^n (n+1) x^{n/2} = (n+1) a^{n/2} b^{n/2}, \end{aligned}$$

а отуда тражена неједнакост. □

Сада можемо доказати Прајсову неједнакост (1.84). Нека су a и b различити ненегативни реални бројеви а θ било који реалан број. Нека је n цели број не мањи од један. Када је $\theta = 2k\pi$ за било који цели број k , тада је Прајсово тврђење тривијално, оно тада постаје једнакост.

Претпоставимо да је $\theta \neq 2, \pi$ за било који цели број k . Тада је:

$$\begin{aligned} P &= (a^n - b^n)^2 (a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta) - (a - b)^2 (a^{2n} + b^{2n} - 2a^n b^n \cos n\theta) = \\ &= (a^n - b^n)^2 (a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta) - (a - b)^2 (a^{2n} - 2a^n b^n + b^{2n} + 2a^n b^n - 2a^n b^n \cos n\theta) \\ &= (a^n - b^n)^2 (a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta) - (a - b)^2 [(a^n - b^n)^2 + 2a^n b^n - 2a^n b^n \cos n\theta] \\ &= (a^n - b^n)^2 (a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta) - (a^n - b^n)^2 (a - b)^2 - 2a^n b^n (1 - \cos n\theta) (a - b)^2 \\ &= (a^n - b^n)^2 (a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta) - (a^n - b^n)^2 (a^2 + b^2 - 2ab) - 2a^n b^n (1 - \cos n\theta) (a - b)^2 \\ &= 2ab(1 - \cos \theta) \left[(a^n - b^n)^2 - \frac{1 - \cos n\theta}{1 - \cos \theta} a^{n-1} b^{n-1} (a - b)^2 \right] \\ &\geq 2ab(1 - \cos \theta) [(a^n - b^n)^2 - n^2 a^{n-1} b^{n-1} (a - b)^2] \\ &= 2ab(1 - \cos \theta) (a - b)^2 \left[\left(\frac{a^n - b^n}{a - b} \right)^2 - n^2 a^{n-1} b^{n-1} \right] \\ &= 2ab(1 - \cos \alpha) (a - b)^2 \left[\left(b^{n-1} \cdot \frac{b^n - a^n}{b^n - a^n} \right)^2 - n^2 a^{n-1} b^{n-1} \right] \\ &= 2ab(1 - \cos \alpha) (a - b)^2 \left[\left(b^{n-1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^n}{1 - \frac{b}{a}} \right)^2 - n^2 a^{n-1} b^{n-1} \right]. \end{aligned}$$

Као што знамо, формула за збир (суму) првих n чланова геометријског низа је

$$S = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r},$$

па можемо трансформисати даље:

$$P \geq 2ab(1 - \cos \theta) (a - b)^2 \left[\left(b^{n-1} \sum_{k=0}^n \left(\frac{a}{b} \right)^k \right)^2 - n^2 a^{n-1} b^{n-1} \right] \geq$$

$$\begin{aligned} &\geq 2ab(1 - \cos \theta)(a - b)^2 \left[\left(na^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \right)^2 - n^2 a^{n-1} b^{n-1} \right] \\ &= 2ab(1 - \cos \theta)(a - b)(n^2 a^{n-1} b^{n-1} - n^2 a^{n-1} b^{n-1}) = 0. \end{aligned}$$

Према томе

$$\frac{a^{2n} + b^{2n} - 2a^n b^n \cos n\theta}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta} \leq \left(\frac{a^n - b^n}{a - b} \right)^2.$$

Тиме је доказ Прајсове неједнакости (1.84) завршен.

Приметимо да Прајсова неједнакост не важи када се косинуси замене синусима. На пример, нека је $a = 2$, $b = 1$, $n = 2$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$. Тада:

$$\frac{a^{2n} + b^{2n} - 2a^n b^n \sin n\theta}{a^2 + b^2 - 2ab \sin \theta} = \frac{16 + 1 - 8 \cdot 0}{4 + 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1} = 17 > 9 = \left(\frac{4 - 1}{2 - 1} \right)^2 = \left(\frac{a^n - b^n}{a - b} \right)^2.$$

Међутим, она важи када се обични косинуси замене хиперболним $\cos n\theta \rightarrow \operatorname{ch} n\theta$, али о њима ћемо више причати у хиперболној тригонометрији.

1.11.2 Аристархова неједнакост

Антички Грчки астроном и математичар Аристарх са Самоса (око 310-230. п.н.е.) открио је тригонометријску неједнакост

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}, \quad (1.101)$$

за оштре углове $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Птоломеј је Аристархову неједнакост користио током 2. века п.н.е. у Египту при изради својих чувених таблица тетива (Алмагест) које су данас еквивалент таблица синуса.

Доказ ове једнакости није једноставан. Аристарх је неједнакости (1.87) открио посматрајући мале углове за које је израчунавао одговарајуће вредности и склапао слику. Уместо израчунавања за мноштво малих углова, овде можемо поједноставити ствар и проверавати дате неједнакости на паровима основних углова и њихових тригонометријских функција добијених са слике 1.14.

Пример 1.11.5. Проверити Аристархову неједнакост за углове $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и $\beta = \frac{\pi}{6}$.

Решење. Имамо еквивалентне изразе:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} &\iff \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{6}} < \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{6}} < \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} \\ &\iff \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} < \frac{3}{2} < \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} &\iff \sqrt{2} < 1,5 < \sqrt{3}, \end{aligned}$$

што је тачно, јер $\sqrt{2} = 1,41\dots$ и $\sqrt{3} = 1,73\dots$ □

Поменути индуктивни начин „доказивања“ би у случају неједнакости (1.87) могао бити и убедљив, иако је он за математику наиван. Није много боље од тога посматрати површине на слици 1.53 и интуитивно проценити да је разлика тих површина све већа што је угао $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ већи, те да је:

$$\frac{\sin \alpha_2}{\alpha_2} < \frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1}, \quad \frac{\alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_2} < \frac{\alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_1}, \quad 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \frac{\pi}{2}, \quad (1.102)$$

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} < \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} < \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1}, \quad 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \frac{\pi}{2},$$

а то су неједнакости (1.87).

Знамо да је извод опадајуће функције негативан (растуће позитиван) и са исте слике 1.53 узмимо $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$. Применимо то на кардинални синус, тачније на функцију $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ и њен извод, а затим и на функцију $g(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$, у следећем примеру.

Пример 1.11.6. Помоћу извода доказати Аристархове неједнакости (1.87).

Доказ. За функцију $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ имамо:

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{1}{x^2 \sin x \cos x} \left(\frac{x}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} \right) < 0.$$

Према томе, функција $f(x)$ је опадајућа за мале углове, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, а отуда:

$$0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2} \iff f(x_1) > f(x_2) \iff \frac{\sin x_1}{x_1} > \frac{\sin x_2}{x_2},$$

а то води до прве од неједнакости (1.88), а затим до Аристархове прве неједнакости.

Слично, за функцију $g(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ налазимо да је растућа:

$$g'(x) = \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x}{x^2} = \frac{\sin x}{x^2 \cos^2 x} \left(\frac{x}{\sin x} - \cos x \right) > 0,$$

јер је $\frac{x}{\sin x} > 1 > \cos x$. Отуда:

$$0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2} \iff g(x_1) < g(x_2) \iff \frac{\operatorname{tg} x_1}{x_1} < \frac{\operatorname{tg} x_2}{x_2},$$

а то води до друге неједнакости (1.88) па до Аристархове десне неједнакости. Тиме су обе неједнакости (1.87) доказане. \square

1.11.3 Јорданова неједнакост

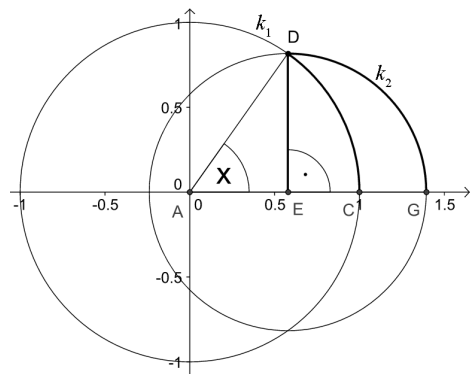
Јорданова³⁴ неједнакост тврди да је

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]. \quad (1.103)$$

Доказ³⁵ се види на слици 1.55. Дата је тригонометријска кружница $k_1(A, 1)$ са центром у исходишту A координатног система и полупречником један. Тачка C је пресек кружнице k_1 и апсцисе, а тачка $D \in k_1$ дефинише угао $x = \angle CAD \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Дужина лука $\widehat{CAD} \in k_1$ такође је x .

Тачка D се пројектује у тачку E апсцисе, тако да је $ED = \sin x$. Друга кружница $k_2(E, \overline{ED})$ има центар у тачки



Slika 1.55: Јорданова неједнакост.

³⁴Camille Jordan (1838-1922), француски математичар.

³⁵Jordan's inequality: https://en.wikipedia.org/wiki/Jordan%27s_inequality

E и полупречник $\overline{ED} = \sin x$. Она сече апсцису у тачки G , тако да су A, E, C и G тачке апсцисе. Дужина лука $\widehat{GAD} = \frac{\pi}{2} \sin x$. На слици се затим види:

$$\begin{aligned} \overline{DE} &\leq \widehat{CAD} \leq \widehat{GAD}, \\ \sin x &\leq x \leq \frac{\pi}{2} \sin x, \\ \frac{2}{\pi}x &\leq \sin x \leq x, \end{aligned}$$

а то је Јорданова неједнакост (1.89).

Једно од побољшања Јорданове неједнакости дао је Кобер³⁶:

$$1 - \frac{2}{\pi}x \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{\pi}, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad (1.104)$$

односно

$$\cos x \leq 1 - \frac{2}{\pi^2}x^2, \quad x \in [0, \pi].$$

Лево стране Коберове и Јорданове неједнакости су еквивалентне, јер се једна на другу своду трансформацијом $x \rightarrow \frac{\pi}{2} - x$.

Друго побољшање³⁷ Јорданове неједнакости дао је Редхефер³⁸:

$$\frac{\sin x}{x} \geq \frac{\pi^2 - x^2}{\pi^2 + x^2}, \quad x \neq 0. \quad (1.105)$$

За $x \geq 1$ доказ следи из:

$$\begin{aligned} \frac{1 - x^2}{1 + x^2} - \frac{\pi x}{\pi x} &= \frac{1 - x^2}{1 + x^2} + \frac{\sin[\pi(x-1)]}{\pi(x-1)} \cdot \frac{x-1}{x} \leq \\ &\leq \frac{1 - x^2}{1 + x^2} + \frac{1 - x}{x} = -\frac{(1-x)^2}{x(1+x^2)} \leq 0. \end{aligned}$$

За $0 < x < 1$ доказ следи из познатог (1.77) развоја кардиналног синуса у ред:

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) \quad (1.106)$$

због чега је довољно доказати да је $(1 + x^2)P_n \geq 1$ за $n \geq 2$, где је $P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$. Коначно, индукцијом користећи релацију $P_{n+1} = \left[1 - \frac{x^2}{(n+1)^2}\right]P_n$ доказује се $(1 + x^2)P_n \geq 1 + \frac{x^2}{n}$ за $0 < x < 1$.

Треће побољшање Јорданове неједнакости је Кашијева неједнакост (Cassia's inequality):

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x + \frac{1}{12\pi}x(\pi^2 - 4x^2), \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]. \quad (1.107)$$

³⁶H. Kober, Approximation by integral functions in the complex domain, Trans. Amer. Math. Soc. 56 (1944), no. 1, 7-31.

³⁷FENG QI: <http://www.ajmaa.org/RGMIA/papers/v9n3/refine-jordan-kober.pdf>

³⁸R. Redheffer, Problem 5642, Amer. Math. Monthly 75 (1968), no. 10, 1125. затим R. Redheffer, Correction, Amer. Math. Monthly 76 (1969), no. 4, 422.

Доказује се тражењем минимума функције $f(x)$ која узима вредност 1 за $x = 0$, а вредност $\frac{\sin x}{x} + \frac{x^2}{3\pi}$ за $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Побољшани облик исте неједнакости је

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x + \frac{x}{\pi^3}(\pi^2 - 4x^2). \quad (1.108)$$

Исти аутор је доказао да се коефицијент $\frac{1}{\pi^3}$ не може даље поправљати већим.

Престин³⁹ и касније Куанг⁴⁰ су доказали неједнакост

$$\left| \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right| \leq 1 - \frac{2}{\pi}, \quad (1.109)$$

која важи за $0 < |x| \leq \frac{\pi}{2}$. Коначно, имамо и побољшања Јорданове неједнакости која произилазе из Тејловог развоја у ред:

$$x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5, \quad (1.110a)$$

$$1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x \leq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4, \quad (1.110b)$$

за $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Уводећи помоћне функције (auxiliary functions) $\cos x - 1 + \frac{2}{\pi}x - \alpha x(\pi^2 - x^2)$ и $\cos x - 1 + \frac{2}{\pi}x - \beta x(\pi - 2x)$ са условом $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ и непознатим позитивним константама α и β , могу се доказати⁴¹ неједнакости:

$$1 - \frac{2}{\pi}x + \frac{\pi - 2}{\pi^2}x(\pi - 2x) \leq \cos x \leq 1 - \frac{2}{\pi}x + \frac{2}{\pi^2}x(\pi - 2x), \quad (1.111a)$$

$$1 - \frac{2}{\pi}x + \frac{\pi - 2}{2\pi^3}x(\pi^2 - 4x^2) \leq \cos x \leq 1 - \frac{2}{\pi}x + \frac{2}{\pi^3}x(\pi^2 - 4x^2), \quad (1.111b)$$

за $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Ове две двоструке неједнакости су оштре у смислу да константе $\frac{\pi-2}{\pi^2}$, $\frac{2}{\pi^2}$, $\frac{\pi-2}{2\pi^3}$ и $\frac{2}{\pi^3}$ не могу бити редом замењиване већим или мањим.

Неједнакост (1.97a) можемо писати

$$1 - \frac{4 - \pi}{\pi}x - \frac{2(\pi - 2)}{\pi^2}x^2 \leq \cos x \leq 1 - \frac{4}{\pi^2}x^2. \quad (1.112)$$

Сменом $x \rightarrow \frac{\pi}{2} - x$ добијамо:

$$x - \frac{2(\pi - 2)}{\pi^2}x^2 \leq \sin x \leq \frac{4}{\pi}x - \frac{4}{\pi^2}x^2, \quad (1.113)$$

за $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Исти аутор⁴² добио је и неједнакости

$$\frac{2}{\pi}x + \frac{4}{\pi^3}x^3(\pi - 2x) \leq \sin x \leq \frac{2}{\pi}x + \frac{\pi - 2}{\pi^3}x(\pi^2 - 4x^2), \quad (1.114)$$

где је избор константи најбољи могућ.

³⁹J. Prestin, Trigonometric interpolation in Holder spaces, J. Approx. Theory 53 (1988), no. 2, 145–154.

⁴⁰J.-Ch. Kuang, Changyong Budengshu (Applied Inequalities), 3rd ed., Shandong Science and Technology Press, Jinan City, Shandong Province, China, October 2004. (Chinese)

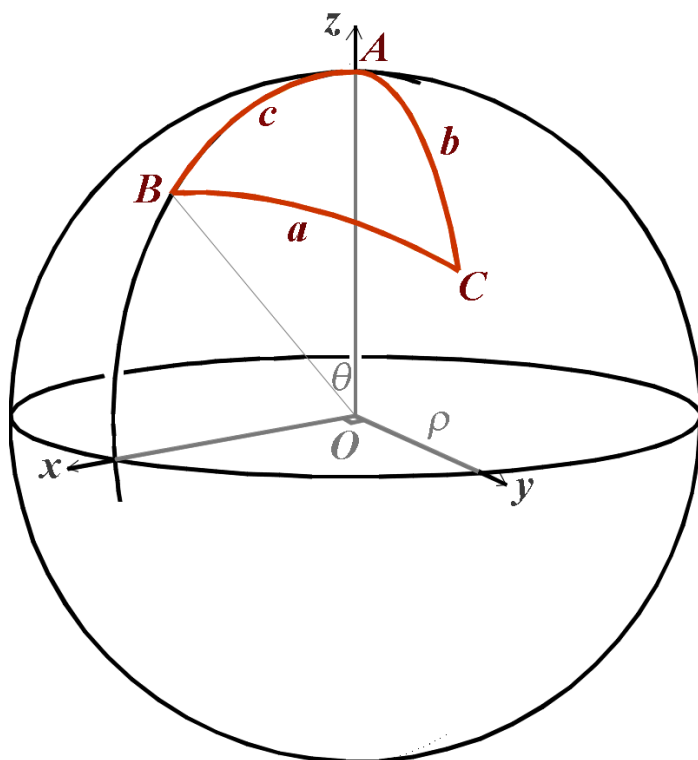
⁴¹F. Qi and B.-N. Guo, Extensions and sharpenings of the noted Kober's inequality, Jiaozuo Kuangye Xueyuan Xuebao (Journal of Jiaozuo Mining Institute) 12 (1993), no. 4, 101–103. (Chinese)

⁴²F. Qi and B.-N. Guo, On generalizations of Jordan's inequality, Meitan Gaodeng Jiaoyu (Coal Higher Education), supplement, November/1993, 32–33. (Chinese)

Glava 2

Сферна тригонометрија

Пресечемо ли *куглу* полупречника ρ равнином кроз њено средиште O , на површини кугле коју називамо *сфера* добијамо тзв. *главну кружницу* чији полупречник је једнак полупречнику кугле. Кроз сваке две тачке A и B на кугли, с изузетрком дијаметралних, можемо повући једну главну кружницу, а њезин мањи лук AcB (сл. 2.1) на кугли који спаја те тачке називамо *геодетска линија*. Она представља најкраће растојање између датих тачака на кугли и има исту улогу као правац у еуклидској равнини.



Slika 2.1: Сферни троугао ABC .

Нека је централни угао кугле $\angle AOB = \theta$, као на слици 2.1, а дужина тетиве кугле $AB = c_0$. Тада је $c = \rho\theta$ и $c_0/2 = \rho \sin \theta/2$, па је

$$\frac{c_0}{2\rho} = \sin \frac{c}{2\rho}. \quad (2.1)$$

Упоређујући овај резултат са кардијалним синусом (1.83) видимо да ће лук и тетива постати приближно исте дужине $c \approx c_0$ када је полупречник ρ кугле веома велики, или је лук веома мали, тачније када $\frac{c}{2\rho} \rightarrow 0$.

2.0.1 Основне теореме

Са друге стране, ова релација оправдава дефиницију сферног угла помоћу дужине лука, слично дефиницији радијана у обичној тригонометрији. Конструирамо сферу јединичног полупречника са истим центром O . Нека правци OA и OB продиру кроз ту сферу у тачкама A' и B' , дефинишући лук $\widehat{A'B'}$ на тој сфери дужине c' . Дужина лука c' јединичне сфере је *сферни угао* једнак углу θ .

Да би извели *косинусну теорему* за странице сферног троугла ABC , конструирамо раван нормалну на OA , негде изван сфере. Та раван пресеца OA , OB и OC у удаљеним тачкама P , Q и R редом. Косинусна теорема 1.6.5 равне тригонометрије за троуглове PQR и OQR даје једначину

$$(PQ)^2 + (PR)^2 - 2(PQ)(PR) \cos \angle A = (OQ)^2 + (OR)^2 - 2(OQ)(OR) \cos a',$$

где је $\angle A = \angle QPR$, односно угао између тангенти на странице (лукове) датог сферног троугла ABC у тачки A .

Ако ни једна страна или угао сферног троугла није 90° , дужине PQ , PR , OQ и OR могу се заменити са $OP \cdot \operatorname{tg} c'$, $OP \cdot \operatorname{tg} b'$, $OP / \cos c'$ и $OP / \cos b'$ редом. Уврштавањем у претходну једнакост добијамо

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos \angle A. \quad (2.2)$$

То је косинусна теорема сферне тригонометрије. Због непрекидности ова је релација још увек тачна и за углове од 90° .

Слично извођење сферне косинусне теореме може се наћи у Енциклопедији Британика¹, или у једном старом Математичком магазину². Све три формуле косинусне теореме за странице биле би

$$\begin{cases} i: & \cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos \angle A, \\ ii: & \cos b' = \cos c' \cos a' + \sin c' \sin a' \cos \angle B, \\ iii: & \cos c' = \cos a' \cos b' + \sin a' \sin b' \cos \angle C. \end{cases} \quad (2.3)$$

Пређимо сада на извођење *синусне теореме* за сферни троугао.

Множећи обе стране (i) и (ii) са $\cos a'$ и $\cos b'$ редом, и одузимајући добијамо

$$\cos^2 a' - \cos^2 b' = (\sin b' \cos a' \cos \angle A - \sin a' \cos b' \cos \angle B) \sin c'. \quad (2.4)$$

Слично, множећи обе стране (i) и (ii) са $\sin a' \cos \angle B$ и $\sin b' \cos \angle A$ редом, добијамо

$$\begin{aligned} \sin a' \cos a' \cos \angle B - \sin b' \cos b' \cos \angle A &= \\ &= (\sin a' \cos b' \cos \angle B - \cos a' \sin b' \cos \angle A) \cos c'. \end{aligned} \quad (2.5)$$

¹Encyclopaedia Britannica, 14th edition, volume 22, p. 474.

²C. E. Clark: *Proofs of the Fundamental Theorems of Spherical Trigonometry*, MAA, Mathematics Magazine, Vol. 21, No. 3 (Jan. - Feb., 1948), pp. 151-155

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Квадрирањем обе стране последње две једнакости, сабирањем и сређивањем, добијамо једначину

$$\begin{aligned} (\cos^2 a' - \cos^2 b')^2 + \sin^2 a' \cos^2 a' \cos^2 \angle B + \sin^2 b' \cos^2 b' \cos^2 \angle A = \\ = \sin^2 b' \cos^2 a' \cos^2 \angle A + \sin^2 a' \cos^2 b' \cos^2 \angle B. \end{aligned}$$

Ову једначину можемо писати

$$\begin{aligned} (\cos^2 a' - \cos^2 b')^2 + \sin^2 a' \cos^2 \angle B (\cos^2 a' - \cos^2 b') \\ - \sin^2 b' \cos^2 \angle A (\cos^2 a' - \cos^2 b') = 0. \end{aligned}$$

Уклањањем заједничког фактора и заменом косинуса синусом, добијамо

$$\sin^2 a' \sin^2 \angle B = \sin^2 b' \sin^2 \angle A.$$

На тај начин се доказује и остатак сферне синусне теореме

$$\frac{\sin a'}{\sin \angle A} = \frac{\sin b'}{\sin \angle B} = \frac{\sin c'}{\sin \angle C}, \quad (2.6)$$

јер су сви употребљени углови између 0° и 180° .

Помоћу синусне теореме добијамо:

$$\sin \angle A \sin \angle B = \frac{\sin a' \sin b' \sin^2 C}{\sin^2 c'} = \frac{\sin a' \sin b'}{\sin^2 c'} (1 - \cos^2 \angle C),$$

а отуда

$$\cos \angle C = -\cos \angle A \cos \angle B + \sin \angle A \sin \angle B \cos c'.$$

Да је овај резултат идентитет лако се проверава уврштавањем претходних израза и сређивањем.

Из претходних резултата следе прва три тзв. *Неперова правила*³, односно сферна косинусна теорема за углове:

$$\begin{cases} I: & \cos \angle A = -\cos \angle B \cos \angle C + \sin \angle B \sin \angle C \cos a', \\ II: & \cos \angle B = -\cos \angle C \cos \angle A + \sin \angle C \sin \angle A \cos b', \\ III: & \cos \angle C = -\cos \angle A \cos \angle B + \sin \angle A \sin \angle B \cos c'. \end{cases} \quad (2.7)$$

Отуда даље закључујемо за $\angle C = 90^\circ$. Из (iii) налазимо $\cos c' = \cos a' \cos b'$, из (I) и (II) налазимо $\cos \angle A = \sin \angle B \cos a'$ и $\cos \angle B = \sin \angle A \cos b'$, из (III) добијамо $\cos c' = \operatorname{ctg} \angle A \operatorname{ctg} \angle B$. Синусна теорема даје релације $\sin a' = \sin c' \sin \angle A$ и $\sin b' = \sin c' \sin \angle B$.

Користећи добијене релације налазимо

$$\operatorname{tg} a' = \frac{\sin a'}{\cos a'} = \frac{\sin c' \sin \angle A \sin \angle B}{\cos \angle A} = \sin b' \operatorname{tg} \angle A.$$

Симетрично, добијамо $\operatorname{tg} b' = \sin a' \operatorname{tg} \angle B$. Штавише:

$$\operatorname{tg} a' = \frac{\sin a'}{\cos a'} = \frac{\operatorname{tg} b' \cos b'}{\operatorname{tg} \angle B \cos c'} = \frac{\sin b'}{\operatorname{tg} \angle B \cos c'} = \frac{\sin c' \sin \angle B}{\cos c' \operatorname{tg} \angle B} = \operatorname{tg} c' \cos \angle B.$$

³ *John Napier*, 1550 - 1617, шкотски математичар

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Из симетрије следи $\operatorname{tg} b' = \operatorname{tg} c' \cos \angle A$. Тиме смо извели десет Неперових правила за правоугли сферни троугао.

Ова Неперова правила се могу извести из косинусне теореме за странице и косинусне теореме за углове и без синусне теореме. Из претходних резултата имамо:

$$\begin{aligned} \cos \angle A &= \frac{\cos a' - \cos b' \cos c'}{\sin b' \sin c'} = \frac{\cos a' - \cos a' \cos^2 b'}{\sin b' \sin c'} = \\ &= \frac{\cos a' \sin^2 b'}{\sin b' \sin c'} = \frac{\cos a' \sin b'}{\sin c'} = \frac{\cos c' \sin b'}{\cos b' \sin c'} = \operatorname{ctg} c' \operatorname{tg} b'. \end{aligned}$$

Отуда правило $\operatorname{tg} b' = \operatorname{tg} c' \cos \angle A$ и симетрично $\operatorname{tg} a' = \operatorname{tg} c' \cos \angle B$. Затим налазимо:

$$\sin a' = \operatorname{tg} a' \cos a' = \frac{\operatorname{tg} c' \cos \angle B \cos \angle A}{\sin \angle B} = \operatorname{ctg} \angle B \operatorname{tg} b'.$$

То је правило $\operatorname{tg} b' = \sin a' \operatorname{tg} \angle B$, а због симетрије имамо такође $\operatorname{tg} a' = \sin b' \operatorname{tg} \angle A$. Преостала два правила добијамо из једнакости⁴:

$$\sin a' = \operatorname{tg} b' \operatorname{ctg} \angle B = \frac{\operatorname{tg} b' \cos c'}{\operatorname{ctg} \angle A} = \operatorname{tg} c' \cos A \cos c' \operatorname{tg} \angle A = \sin \angle A \sin c'.$$

Симетрија даје $\sin b = \sin \angle B \sin c$.

Мало другачију аналizu управо доказаних десет Неперових правила

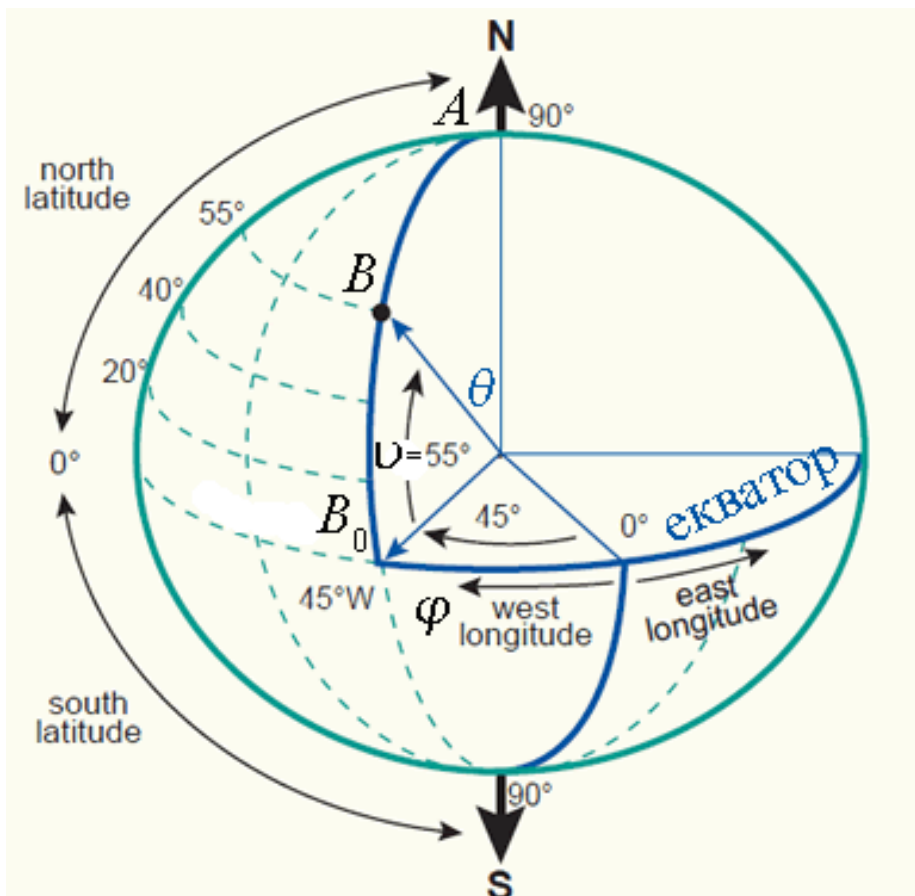
$$\begin{aligned} 1. \quad \sin a' &= \sin c' \sin \angle A, & 2. \quad \sin b' &= \sin c' \sin \angle B, \\ 3. \quad \sin a' &= \operatorname{tg} b' \operatorname{ctg} \angle B, & 4. \quad \sin b' &= \operatorname{tg} a' \operatorname{ctg} \angle A, \\ 5. \quad \cos c' &= \cos a' \cos b', & 6. \quad \cos c' &= \operatorname{ctg} \angle A \operatorname{ctg} \angle B, \\ 7. \quad \cos \angle A &= \cos a' \sin \angle B, & 8. \quad \cos \angle B &= \cos b' \sin \angle A, \\ 9. \quad \cos \angle A &= \operatorname{tg} b' \operatorname{ctg} c', & 10. \quad \cos \angle B &= \operatorname{tg} a' \operatorname{ctg} c'. \end{aligned} \tag{2.8}$$

можете погледати у презентацији [6]. Још једном напомињем, Неперов троугао је правоугли, са $\angle C = 90^\circ$.

⁴Примовање ознаке странице овде значи одговарајућу страницу на јединичној сфери. Страница a се из центра сфере види под углом a' у радијанима, што је и лук јединичне кружнице дужине a' . Централни углови под којим се виде a и a' су исти, па ћемо касније писати просто a подразумевајући тај централни угао.

2.1 Географске координате

Косинусна и синусна теорема се могу користити за решавање основних проблема навигације на површини Земље. Погледајмо то на примерима. Географске ширине (латитуде) означаваћемо ϑ , а географске дужине (лонгитуде) са φ , тако да је свако место $M(\vartheta, \varphi)$ на површини Земље дефинисано са те две координате. Просечан полу-пречник Земље је $\rho = R_{\oplus} = 6371 \text{ km}$.



Slika 2.2: Географске координате.

Приметимо на сликама 2.1 и 2.2, да је $\vartheta = 90^\circ - \theta$. Тачке $B(\vartheta_B, \varphi_B)$ и $C(\vartheta_C, \varphi_C)$ означавају места на површини Земље, а тачка $A(90^\circ, 0^\circ)$ је северни пол (енг. *North*). *Екватор* је велика кружница у пресеку равни Oxy и дате сфере. Пресек велике кружнице AB (равни ABO) и екватора је тачка B_0 , а пресек велике кружнице AC и екватора била би C_0 . Латитуде места на Земљи се задају у степенима северно (N) или јужно (S) од екватора, а лонгитуде угловима источно (E) или западно (W) од Гринича, опсерваторије у предграђу Лондона. Тада се нулта лонгитуда назива *примарни меридијан* по Гриничу.

Пример 2.1.1. *Наћи удаљеност између Лондона и Бања Луке.*

Решење. У енциклопедији налазимо координате Лондона и Бањалуке, редом

$$B(51^\circ 30' 26'' N, 0^\circ 7' 39'' W), \quad C(44^\circ 46' N, 17^\circ 11' E).$$

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Прва координата је латитуда (ширина), а друга је лонгитуда (дужина). Два града се налазе са различитих страна Гринич меридијана, па зато лонгитуде сабирамо и добијамо сферни угао⁵:

$$\angle A = 0^\circ 7' 39'' W + 17^\circ 11' E = 17^\circ 18' 39'' = 17,3108^\circ.$$

Поларна удаљеност места је 90° минус латитуда места, па за Лондон односно Бања Луку добијамо, редом:

$$b' = 90^\circ - 51^\circ 30' 26'' N = 38^\circ 29' 34'' = 38,4928^\circ.$$

$$c' = 90^\circ - 44^\circ 46' N = 45^\circ 14' = 45,2333^\circ,$$

Користимо косинусну теорему (2.27)(i) и налазимо редом:

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos \angle A,$$

$$\cos a' = \cos(45^\circ 14') \cos(38^\circ 29' 34'') + \sin(45^\circ 14') \sin(38^\circ 29' 34'') \cos(17^\circ 18' 39''),$$

$$\cos a' = 0,704221 \cdot 0,782687 + 0,709981 \cdot 0,622416 \cdot 0,954705 = 0,973072$$

$$a' = 13,3267^\circ \Rightarrow a' = 13^\circ 19' 36''.$$

Дакле, централни угао⁶ лука Бања Лука - Лондон износи $a' = 13,3267^\circ$. Обим Земље је $L_\oplus = 40074$ km, што је еквивалент 360° . Угао a' је $a'/360$ пуног угла, Земљиног обима. Према томе, удаљеност од Лондона до Бањалуке је:

$$L_\oplus \times a'/360 = 40074 \times 13,3267/360 \approx 1483 \text{ km.}$$

□

Исту косинусну теорему (2.27)(i) користимо и у следећем примеру, али са латитудама локација на Земљи, уместо поларних удаљености.

Пример 2.1.2. *Наћи удаљеност између Београда и Сиднеја.*

Решење. Географске координате Београда и Сиднеја су редом:

$$B(44^\circ 49' N, 20^\circ 28' E), \quad C(33^\circ 52' S, 151^\circ 13' E).$$

Удаљеност од Београда до Сиднеја је $a = BC$, латитуда Београда је $\vartheta_B = \angle BOB_0$, латитуда Сиднеја је $\vartheta_C = \angle COC_0$, а лонгитуде се узајамно одузимају ($\angle A = \varphi_C - \varphi_B$) јер су оба града источно од Гринича. Косинусна теорема даје:

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos \angle A,$$

$$\cos a' = \cos(90^\circ - \vartheta_B) \cos(90^\circ - \vartheta_C) + \sin(90^\circ - \vartheta_B) \sin(90^\circ - \vartheta_C) \cos(\varphi_C - \varphi_B),$$

$$\cos a' = \sin \vartheta_B \sin \vartheta_C + \cos \vartheta_B \cos \vartheta_C \cos(\varphi_C - \varphi_B),$$

$$\cos a' = \sin 44,82^\circ \sin 33,87^\circ + \cos 44,82^\circ \cos 33,87^\circ \cos 130,75^\circ,$$

$$\cos a' = 0,690338 \Rightarrow a' = 89,52^\circ.$$

Дакле, удаљеност од Београда до Сиднеја је

$$L_\oplus \cdot a'/360 = 40074 \cdot 89,52/360 = 9965 \text{ km.}$$

Овде је такође, обим Земље $L_\oplus = 40047$ km. □

⁵Напомена: 17 степени, 18 минута и 39 секунди је $17 + (18 + 39/60)/60$ степени у децималама.

⁶Напомена: $13,3267^\circ$ децималних степени је 13° степени и $0,3267 \times 60 = 19,602'$ децималних минута, односно $13^\circ 19'$ плус $0,602 \times 60 = 36,12''$ децималних секунди.

ТРИГОНОМЕТРИЈА

За лет авионом узимамо полупречник Земље увећан за висину лета (око 10 km) и дужу путању од најкраће, па лет од Београда до Сиднеја пређе више од 15000 km и траје дуже од 20 часова.

Пример 2.1.3. Дати су места Олдерни на Каналским острвима (*Alderney, Channel Islands*) и Винипег (*Winnipeg*) у Канади.

1. Колика је њихова међусобна удаљеност у наутичким миљама?
2. У ком правцу по азимуту из Олдернија треба кренути ка Винипегу?

Решење. Винипег је $B(50^\circ N, 97^\circ W)$, а Олдерни $C(50^\circ N, 2^\circ W)$, на слици 2.1. Тако је $b' = c' = 90^\circ - 50^\circ$ и $\angle A = 95^\circ$.

1. Користимо косинусну теорему:

$$\begin{aligned}\cos a' &= \cos c' \cos b' + \sin c' \sin b' \cos \angle A = \\ &= \cos^2 40^\circ + \sin^2 40^\circ \cos 95^\circ = 0,550813\end{aligned}$$

па је $a' = 56,58^\circ$. Наутичка миља, ознака М, износи тачно 1,852 километра. Отуда:

$$a = \frac{L_\oplus}{1,852} \cdot \frac{a'}{360} = 3400 \text{ М.}$$

То је око 7% краће него дуж паралеле са латитудом.

2. Користимо синусну теорему:

$$\frac{\sin \angle C}{\sin c'} = \frac{\sin \angle A}{\sin a'},$$

отуда

$$\sin \angle C = \frac{\sin \angle A \cdot \sin c'}{\sin a'} = \frac{\sin 95^\circ \cdot \sin 40^\circ}{\sin 56,58^\circ} = 0,77.$$

Аркус синус даје $\angle C = 50,1^\circ$ или $129,9^\circ$, а прихватимо само први резултат. Азимут се мери са севера у правцу казаљке на сату, па је решење $360^\circ - 50,1^\circ = 309,9^\circ$. \square

У посебном случају, када је неки од углова сферног троугла ABC прав, подразумева се $\angle C = 90^\circ$, тада можемо користити Неперова правила (2.32). Разне примере са Неперовим правилима можете погледати у књизи [7], писаној на самом почетку 19. века.

Пример 2.1.4. Решити сферни троугао са елементима $a' = 73^\circ$, $b' = 62^\circ$ и $\angle C = 90^\circ$.

Решење. За налажење $\angle A$ користимо 3. од Неперова правило (2.32), у облику:

$$\begin{aligned}\sin b' &= \operatorname{tg} a' \operatorname{ctg} \angle A, \\ \sin 62^\circ &= \operatorname{tg} 73^\circ \operatorname{tg}(90^\circ - \angle A), \\ \operatorname{tg}(90^\circ - \angle A) &= \frac{\sin 62^\circ}{\operatorname{tg} 73^\circ} = 0,269944 \\ 90^\circ - \angle A &= 15,1066^\circ \\ \angle A &= 74,8934^\circ \approx 75^\circ.\end{aligned}$$

ТРИГОНОМЕТРИЈА

За налажење угла c' користимо 5. Неперово правило:

$$\cos c' = \cos a' \cos b',$$

$$\cos c' = \cos 73^\circ \cos 62^\circ = 0,13726$$

$$c' = 82,1107^\circ \approx 82^\circ.$$

За налажење угла $\angle B$ користимо опет 3. правило:

$$\sin a' = \operatorname{tg} b' \operatorname{ctg} \angle B,$$

$$\operatorname{tg} \angle B = \frac{\sin a'}{\operatorname{tg} b'} = \frac{\sin 73^\circ}{\operatorname{tg} 62^\circ} = 0,508476$$

$$\angle B = 26,9523^\circ \approx 27^\circ.$$

□

Приметимо да је $\angle A + \angle B + \angle C = 75^\circ + 27^\circ + 90^\circ = 192^\circ$, тј. да је збир темених углова горњег правоуглог троугла значајно више од испруженог (180°), колико би такав збир требао бити у равној геометрији.

2.2 Површина троугла

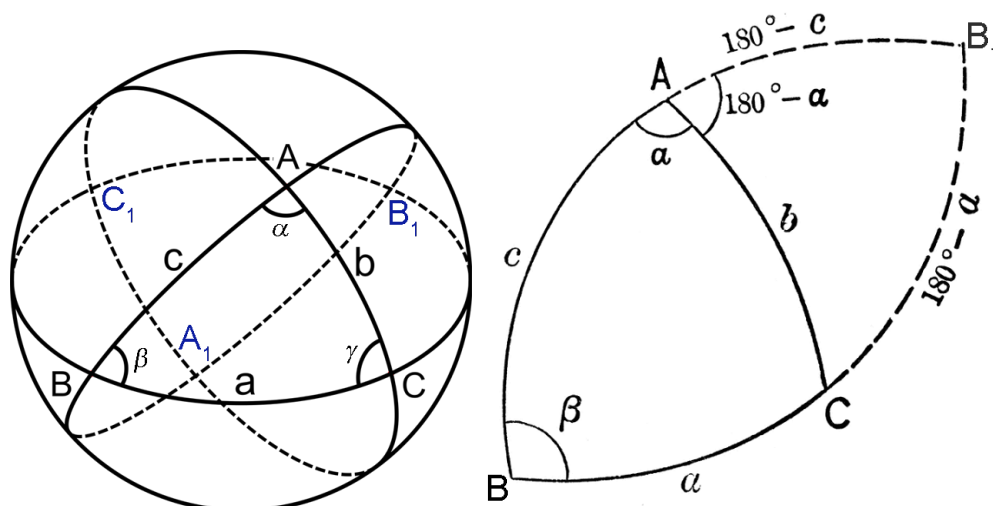
У наставку, уместо степена за меру угла користимо радијан. Доказаћемо да површина сферног троугла ABC на сфери полупречника ρ износи

$$\Pi_{ABC} = (\angle A + \angle B + \angle C - \pi)\rho^2. \quad (2.9)$$

Приметимо да према овој формули збир унутрашњих углова сферног троугла мора бити већи од испруженог (π), осим када троугао има површину нула. Такође приметимо, да троугао дели компактну површину сфере на две области, већу и мању, а да ми овде подразумевамо ону мању.

На слици 2.3 лево, су приказани сферни троугао ABC са унутрашњим угловима α , β и γ , и њему антиподални троугао $A_1B_1C_1$, који рефлектује оригинал кроз центар сфере. Због симетрије, оба та троугла морају имати исту површину.

На слици десно, приказан је сферни двоугао β који формирају велике кружнице BAB_1 и BCB_1 , односно пресек равни тих кружница и сфере. Означимо површину двоугла β са Π_β и аналогно површине двоуглова α и γ редом са Π_α и Π_γ . Сваки од тих двоуглова има свој антиподални двоугао, који рефлектује оригинал кроз центар сфере са површином једнаком оригиналном.



Slika 2.3: Сферни троуглови ABC и $A_1B_1C_1$.

Приметимо да двоугао и његов антипод обилазе целу сферу док преклапају троуглове ABC и $A_1B_1C_1$. Према томе, укупна површина сфере Π_S може се написати у облику:

$$\Pi_S = 2\Pi_\alpha + 2\Pi_\beta + 2\Pi_\gamma - 4\Pi_{ABC}. \quad (2.10)$$

Јасно је да двоугао има површину пропорционалну углу који га формира. Како је површина сфере $\Pi_S = 4\pi\rho^2$, то значи да је површина двоугла $\Pi_\beta = 2\beta\rho^2$. Отуда:

$$4\pi\rho^2 = 4\alpha\rho^2 + 4\beta\rho^2 + 4\gamma\rho^2 - 4\Pi_{ABC},$$

$$\Pi_{ABC} = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)\rho^2. \quad (2.11)$$

То је управо формула (2.33), која се назива и Жирардова⁷ теорема.

Разлика $E = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ између збира углова у радијанима сферног троугла и броја пи назива се *сферни ексцес*, или Жирардова формула ексцеса. Као ознаке сферног ексцеса у литератури се често користе и Δ , δ или ϵ .

Поновимо сада претходне ставове у облику теорема са доказима и новим запажањима, као вежбе из области сферне тригонометрије. Многи од тих примера узети су из уџбеника написаних пре 1900. године.

Следећа Јулијерова⁸ формула је на сфери еквивалент Херономом образцу, теорему 1.7.3, за површину равног троугла.

Теорема 2.2.1. *За сферни ексцес $E = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$ важи једнакост*

$$\operatorname{tg} \frac{E}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{s}{2} \operatorname{tg} \frac{s-a}{2} \operatorname{tg} \frac{s-b}{2} \operatorname{tg} \frac{s-c}{2}},$$

где је $s = (a + b + c)/2$ полуобим.

Доказ. Имамо редом:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{E}{4} &= \operatorname{tg} \frac{\angle A + \angle B + \angle C - \pi}{4} = \frac{\sin \frac{\angle A + \angle B}{2} + \sin \frac{\angle C - \pi}{2}}{\cos \frac{\angle A + \angle B}{2} + \cos \frac{\angle C - \pi}{2}} = \\ &= \frac{\sin \frac{\angle A + \angle B}{2} - \cos \frac{\angle C}{2}}{\cos \frac{\angle A + \angle B}{2} + \sin \frac{\angle C}{2}} = \frac{(\cos \frac{a-b}{2} - \cos \frac{c}{2}) \cos \frac{\angle C}{2}}{(\cos \frac{a+b}{2} + \cos \frac{c}{2}) \sin \frac{\angle C}{2}} \\ &= \frac{2 \sin \frac{s-a}{2} \sin \frac{s-b}{2}}{2 \cos \frac{s}{2} \cos \frac{s-c}{2}} \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin(s-a) \sin(s-b)}} \\ &= \sqrt{\operatorname{tg} \frac{s}{2} \operatorname{tg} \frac{s-a}{2} \operatorname{tg} \frac{s-b}{2} \operatorname{tg} \frac{s-c}{2}}. \end{aligned}$$

□

За лакше разумевање оваквих доказа, корисне су вежбе у решавању задатака из сферне тригонометрије, попут следећих.

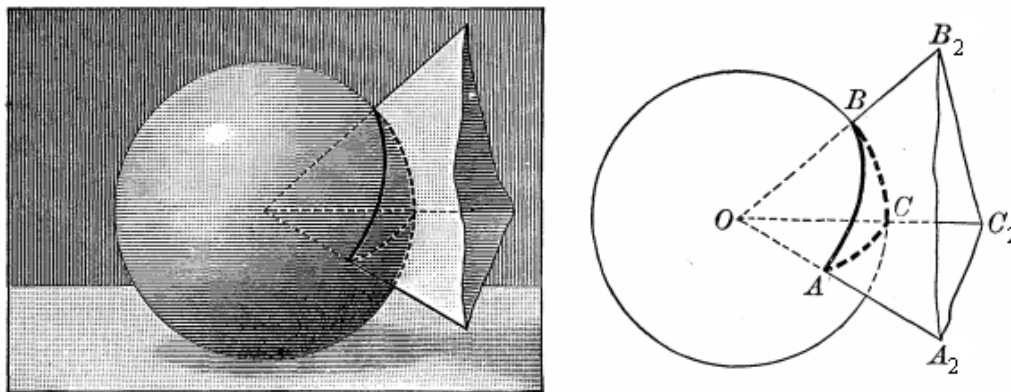
⁷ *Albert Girard*, 1595 - 1632, француски математичар.

⁸ *Simon Antoine Jean L'Huilier*, 1750 - 1840, швајцарски математичар, потомак француских хугенота.

2.3 Вежбања и задаци

Сферна тригонометрија третира тригонометријске релације између шест елемената, три стране (a, b, c) и три угла ($\angle A, \angle B, \angle C$) сферног троугла (ABC). Посматрајући слику 2.4, проверите тачност следећег тврђења.

Лема 2.3.1. *За сваку особину равног троугла може се извести аналогна особина сферног троугла, и обротно.*



Slika 2.4: Сферни и равни троугао, ABC и $A_2B_2C_2$.

Странице сферног троугла су углови обично изражавани у степенима, а дужине тих страница се добијају пропорцијама

$$(\text{обим великог круга}) : (\text{дужина лука}) = 360^\circ : (\text{угао лука}).$$

Углове у теменима A, B и C дефинишу тангенте на сферне странице у тим теменима, а странице a, b и c се мере централним угловима из средишта O дате кугле.

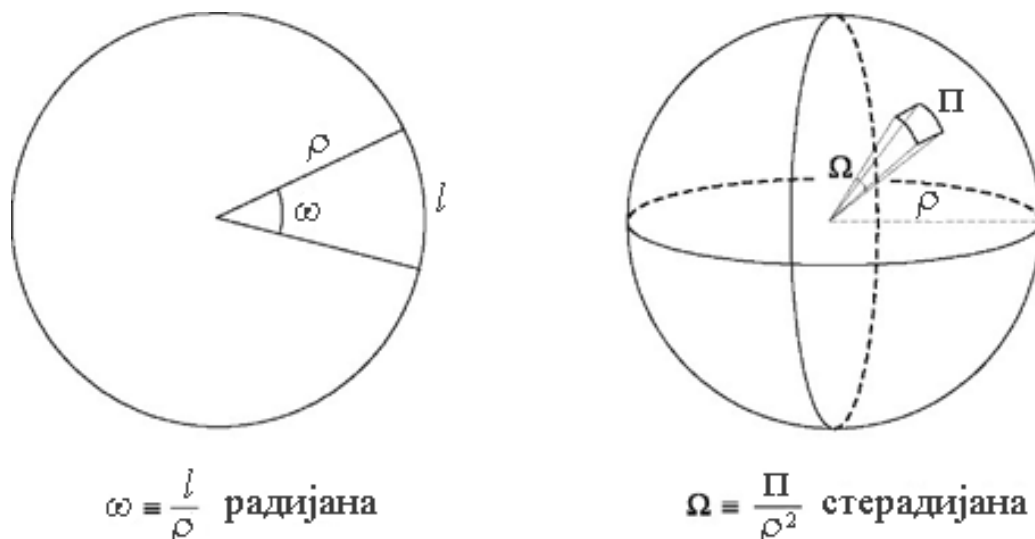
Пример 2.3.2. *Показати да су углови на основици једнакокраког сферног троугла једнаки.*

Решење. Нека је $AC = BC$. Повуцимо тангенте у тачкама A и B на лукове AC и BC редом. Ове тангенте се секу у тачки S праве OC , тако да је $AS = BS$.

Повуцимо тангенте AT, BT на лук AB , па добијамо $AT = BT$. У два троугла SAT, SBT странице SA, AT, TS су једнаке редом са SB, BT, TS , па је $\angle SAT = \angle SBT$, а то су углови на основици сферног троугла. \square

Задатак 2.3.3. *Проверити следеће особине сферне геометрије.*

1. Свака страна сферног троугла је мања од збира остале две.
2. Збир страница сферног троугла је мањи од 360° .
3. Збир углова сферног троугла је већи од 360° и мањи од 540° .
4. Ако су две стране сферног троугла неједнаке, већи је његов угао насупрот веће стране.



Slika 2.5: Равни и просторни угао, ω и Ω .

Упутства. Знамо из еуклидске геометрије, било која два од три равна угла која формира просторни угао из O заједно су већа од трећег. Према томе, било која два од углова AB , BC , CA , збирно су већа од од трећег. Такође, било која страна сферног троугла је већа од разлике остале две. Дефиниција просторног угла дата је сликом 2.5.

Збир три равна угла које формира просторни угао из O је мањи од четири права угла, односно $AB + BC + CA < 2\pi \cdot OA$, а отуда, збир страница (углова лукова) је мањи од обима великог круга.

Из претходног имамо:

$$\begin{aligned} a + b + c &< 2\pi, \\ \pi - \angle A + \pi - \angle B + \pi - \angle C &< 2\pi, \\ \angle A + \angle B + \angle C &> \pi, \end{aligned}$$

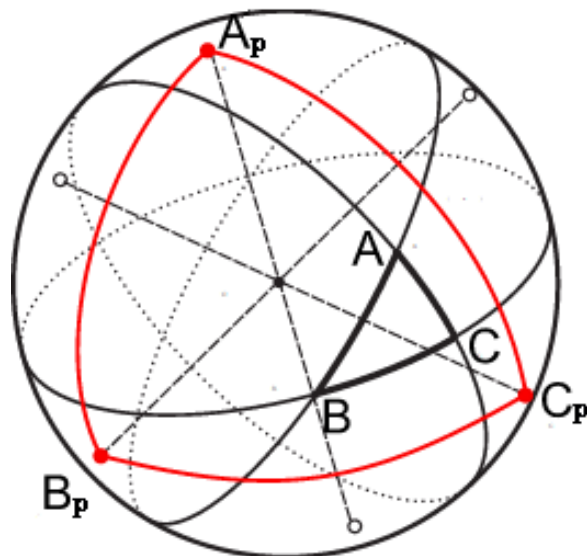
а како је сваки од углова мањи од π , то је њихов збир мањи од $3\pi = 540^\circ$.

Ако је угао ABC већи од угла BAC , онда је страна AC већа од стране BC . Наиме, у B направимо угао ABD једнак углу BAD , па је BD једнако AD и $BD + DC$ је веће од BC , а отуда је $AD + DC$ веће од BC , односно AC је веће од BC \square

Поларни троугао $A_p B_p C_p$ је сферни троугао дефинисан сферним троуглом ABC дужима $X_p O$ окомитим на раван великог круга YZO у центру O сфере, при чему су X_p, X, Y, Z четири разне тачке сфере, тачке $X, Y, Z \in \{A, B, C\}$, а пол X_p и оригинална тачка X су са исте стране равни YZO . На пример, на слици 2.6 је дуж $A_p O$ окомита на раван BCO (кратко $A_p O \perp BCO$), са тачком A на истој полусфери. Посебно, A_p је пол тачке A око којег је описана (орјентисана) велика кружница BC сферног троугла ABC .

Теорема 2.3.4. *Ако је $A_p B_p C_p$ поларни троугао троугла ABC , онда важи и обрнуто, да је ABC поларни троугао троугла $A_p B_p C_p$.*

Доказ. Како је B_p пол велике кружнице CA , то је лук AB_p квадрант, тј. припада равни окомитој на раван CA (кратко $AB_p \perp CA$) и чини четвртину велике кружнице. Како



Slika 2.6: Сферни ABC и поларни троугао $A_pB_pC_p$.

је C_p пол од AB , лук C_pA је квадрант. Дакле, A је пол од B_pC_p . Такође, A и A_p су са исте стране B_pC_p . Како су A и A_p са исте стране BC то значи да је лук AA_p мањи од квадранта, а како је A пол од B_pC_p то су A и A_p са исте стране B_pC_p .

Слично се доказује да су B и C полови тачака B_p и C_p . Према томе, сферни троугао ABC је поларни за троугао $A_pB_pC_p$. \square

Оригинални сферни троугао ABC називамо основни, или *примитивни троугао* њему поларног троугла $A_pB_pC_p$.

Теорема 2.3.5. *Странице и углови поларног троугла су суплементни редом угловима и страницама примитивног троугла.*

Доказ. Нека се лук B_pC_p сече са луковима AB и AC , продуженим ако је потребно, редом у тачкама D и E . Како је A пол од BC то је сферни угао $\angle A$ мера лука DE . Оба B_pE и C_pD су квадранти, па су збирно DE и B_pC_p једнаки полукружници. Дакле, централни угао (из O) над B_pC_p је суплементан⁹ $\angle A$. Кратко кажемо B_pC_p је суплементан са $\angle A$.

Слично се може показати да су C_pA_p и A_pB_p редом суплементни $\angle B$ и $\angle C$. \square

Означимо ли доњим индексом x_p , $x \in \{a, b, c, A, B, C\}$ странице и темена поларног троугла, а без индекса странице и темена примитивног троугла, биће:

$$\begin{aligned} \angle A_p &= \pi - a, & \angle B_p &= \pi - b, & \angle C_p &= \pi - c, \\ a_p &= \pi - \angle A, & b_p &= \pi - \angle B, & c_p &= \pi - \angle C, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где је мера странице угао под којим се та страница види из центра сфере.

Задатак 2.3.6. *Наћи странице поларног троугла сферног троугла са датим угловима. Нацртати фигуру.*

- $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 80^\circ$, $\angle C = 100^\circ$, (Решење: $a_p = 110^\circ$, $b_p = 100^\circ$, $c_p = 80^\circ$).

⁹Углови су суплементни када им је збир испружен угао, тј. π .

ТРИГОНОМЕТРИЈА

2. $\angle A = 56^\circ$, $\angle B = 97^\circ$, $\angle C = 112^\circ$.
3. $\angle A = 68^\circ$, $\angle B = 52^\circ$, $\angle C = 98^\circ 44'$.
4. $\angle A = 115,6^\circ$, $\angle B = 98,9^\circ$, $\angle C = 74,2^\circ$.

Задатак 2.3.7. Наћи углове поларног троугла сферног троугла са датим страницама. Наћи дужине страница, ако је полупречник сфере 4 т.

1. $a = 94^\circ$, $b = 52^\circ$, $c = 100^\circ$, $(\angle A_p = 86^\circ, \angle B_p = 128^\circ, \angle C_p = 80^\circ)$.
2. $a = 74^\circ 42'$, $b = 95^\circ 6'$, $c = 66^\circ 25'$.
3. $a = 106,4^\circ$, $b = 64,3^\circ$, $c = 51,7^\circ$.

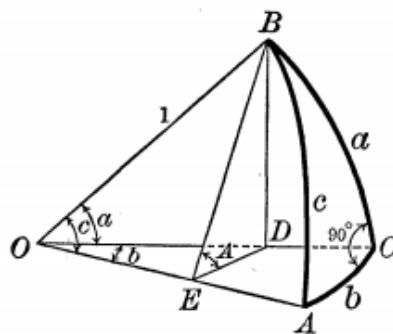
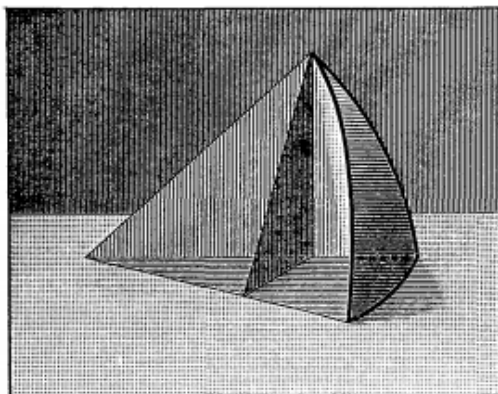
Задатак 2.3.8. Показати да су тачна следећа тврђења.

1. Ако троугао има три права угла, онда су његове стране квадранти.
2. Ако троугао има два права угла, онда су странице наспрот њих квадранти, а трећи угао је мера супротне стране.

Из последња два задатка је јасно да само онај од правоуглих сферних троуглова вреди истраживати који има само један прави угао. Такав је троугао ABC на слици 2.7, са правим углом у темену C и осталим елементима, за сада, мањим од 90° . Дата је јединична сфера. Помоћна раван кроз тачку B окомита на OA , сече OA у тачки E и OC у D . Приказане су дужи BE , DE које су окомите на OA , и дуж BD .

Када је права окомита на раван, окомита је на сваку праву те равни, па је $\angle BED = \angle A$. Раван BDE је окомита на раван AOC , па како је свака раван која садржи праву окомиту на неку раван такође окомита на исту раван, из $BD \subset BDE \cap AOC$ следи $BD \perp AOC$. Када се две равни секу а свака је окомита на трећу, њихов пресек је такође окомит на трећу раван, па из претходног следи да је $BD \perp OC$ и $BD \perp DE$.

Пример 2.3.9. Користећи правоугли (оштроугли) троугао на слици 2.7 доказати десет Неперових правила (2.32).



Slika 2.7: Правоугли сферни (оштроугли) троугао.

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Докази. Из $\angle EOD = b$ следи $OE = OD \cdot \cos b$, јер је страница једнака централном углу под којим се та страница види. Како је и:

$$OE = \cos c (= \cos \angle EOB), \quad OD = \cos a (= \cos \angle DOB),$$

налазимо

$$\cos c = \cos a \cos b. \quad (2.13)$$

То је 3. правило (2.32).

Из $\angle BED = \angle A$ следи $BD = BE \sin \angle A$, па из

$$BD = \sin a (= \sin \angle DOB), \quad BE = \sin c (= \sin \angle EOB),$$

налазимо

$$\sin a = \sin c \sin \angle A. \quad (2.14)$$

Слично, са помоћном равни кроз A окомитом на OB , налазимо

$$\sin b = \sin c \sin \angle B. \quad (2.15)$$

То су 1. и 2. Неперово правило (2.32).

Поново из троугла BED , имамо $DE = BE \cos \angle A$. Из $DE = OD \cdot \sin b$ (из $DE = OD \cdot \sin b$) и

$$OD = \cos a (= \cos \angle DOB), \quad BE = \sin c (= \sin \angle EOB),$$

сменом у прву добијамо

$$\cos \angle A = \frac{OD \cdot \sin b}{\sin c} = \cos a \cdot \frac{\sin b}{\sin c}.$$

Међутим, из (2.39) следи

$$\frac{\sin b}{\sin c} = \sin \angle B,$$

а отуда

$$\cos \angle A = \cos a \sin B. \quad (2.16)$$

То је 7. правило (2.32). Слично, када поставимо раван кроз A окомито на OB , налазимо

$$\cos \angle B = \cos b \sin \angle A, \quad (2.17)$$

а то је 8. правило.

Горњих пет формула су основне. Из њих можемо извести све друге релације у вези са правоуглим сферним троуглом. На пример, релација међу $\angle A, b, c$ следи из (2.40) овако. Прво је:

$$\cos \angle A = \cos a \sin \angle B = \frac{\cos c}{\cos b} \cdot \frac{\sin b}{\sin c},$$

јер из (2.37) следи $\cos a = \cos c / \cos b$, а из (2.39) следи $\sin \angle B = \sin b / \sin c$. Затим добијамо:

$$\begin{aligned} \cos \angle A &= \frac{\sin b}{\cos b} \cdot \frac{\cos c}{\sin c}, \\ \cos \angle A &= \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} c. \end{aligned} \quad (2.18)$$

ТРИГОНОМЕТРИЈА

То је 9. релација (2.32). Слично добијамо 10, 4, 3, и 6. релацију, редом:

$$\cos \angle B = \operatorname{tg} a \operatorname{ctg} c, \quad (2.19)$$

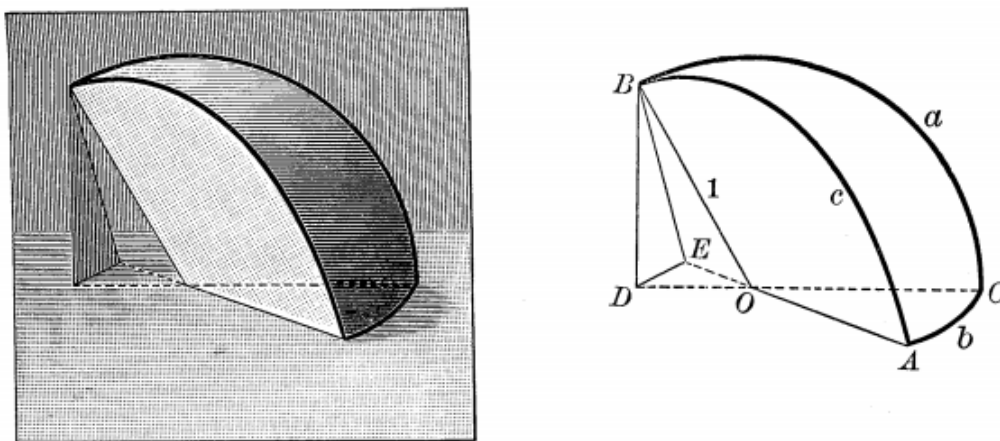
$$\sin b = \operatorname{tg} a \operatorname{ctg} \angle A, \quad (2.20)$$

$$\sin a = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} \angle B, \quad (2.21)$$

$$\cos c = \operatorname{ctg} \angle A \operatorname{ctg} \angle B. \quad (2.22)$$

□

Знамо да су Неперових десет формула довољне за решавање било каквог сферног правоуглог троугла, али смо на претходној слици 2.7 претпостављали да су остала два угла датог троугла мањи од 90° . У наставку погледајмо како оправдати те формуле за један угао већи од правог, рецимо угао $a > 90^\circ$.



Slika 2.8: Правоугли сферни (тупоугли) троугао.

Задатак 2.3.10. Користећи правоугли (тупоугли) троугао на слици 2.8 доказати десет Неперових правила (2.32).

На слици 2.8, помоћна равна BDE сече CO и AO иза тачке O . У троуглу EOD имамо $\cos \angle DOE$, тј. $\cos b$, који износи OE/OD , па имамо:

$$OE = \cos \angle EOB = -\cos \angle AOB = -\cos c,$$

$$OD = \cos \angle DOB = -\cos \angle COB = -\cos a.$$

Сменом у претходни косинус, налазимо:

$$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a},$$

$$\cos c = \cos a \cos b, \quad (2.23)$$

а то је релација (2.37), сада за правоугли тупоугли сферни троугао. На сличан начин се може показати да и остале Неперове формуле важе и у овом случају.

Пример 2.3.11. Доказати следећа тврђења.

1. Ако су обе катете сферног троугла мање или су обе веће од 90° , тада је хипотенуза мања од 90° .
2. Ако је једна катета мања а друга већа од 90° , хипотенуза је већа од 90° .

Доказ. 1. Ако су две катете обе мање или обе веће од 90° , правоуглог сферног троугла са правим углом у темену C , тада су $\cos a$ и $\cos b$ оба позитивни или су оба негативни, па је производ $\cos a \cos b$ позитиван. Отуда и према (2.37) је $\cos c$ позитиван, што значи да је $c < 90^\circ$.

2. Ако је једна катета мања а друга већа од 90° , тада је $\cos c = \cos a \cos b < 0$, што значи да је $c > 90^\circ$. \square

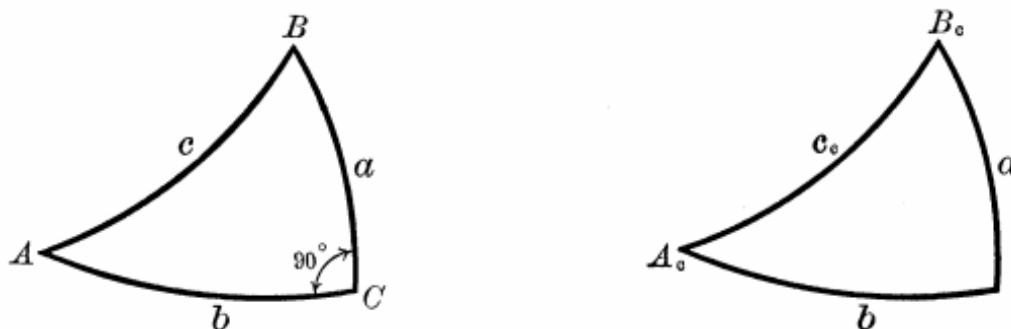
Пример 2.3.12. Доказати да су у правоуглом сферном троуглу угао који није прав и страница насупрот њега обоје мањи или обоје већи од 90° .

Доказ. Из (2.40) и (2.41) следи:

$$\sin \angle B = \frac{\cos \angle A}{\cos a}, \quad \sin \angle A = \frac{\cos \angle B}{\cos b}.$$

Како су A и B мањи од 180° , то су $\sin \angle A$ и $\sin \angle B$ увек позитивни. Тако, $\cos \angle A$ и $\cos a$ имају исти знак, тј. $\angle A$ и a су или оба мањи од 90° или су оба већи од 90° . Слично доказујемо за $\angle B$ и b . \square

Може се показати да свих десет релација следе из два веома корисна правила која је открио барон Непер, познат и по открићу логаритама. Ради тога погледајмо делове правоуглог троугла на слици 2.9. Изабацимо ознаку C и посматрајмо осталих пет елемената $\angle A_c, a, b, \angle B_c, c_c$ кружно распоређених у врховима правилног петоугла.



Slika 2.9: Непрова два додатна правила.

Било који од тих пет врхова правилног петоугла, са ознакама $\angle A_c, a, b, \angle B_c, c_c$, има два суседна и два супротна врха. На пример, суседни a су $\angle A_c$ и b , док су c_c и $\angle B_c$ супротни. **Неперова правила за кружне делове (темена петоугла) гласе:**

1. Синус било којег дела једнак је производу тангенса суседних делова.
2. Синус било којег дела једнак је производу косинуса супротних делова.

ТРИГОНОМЕТРИЈА

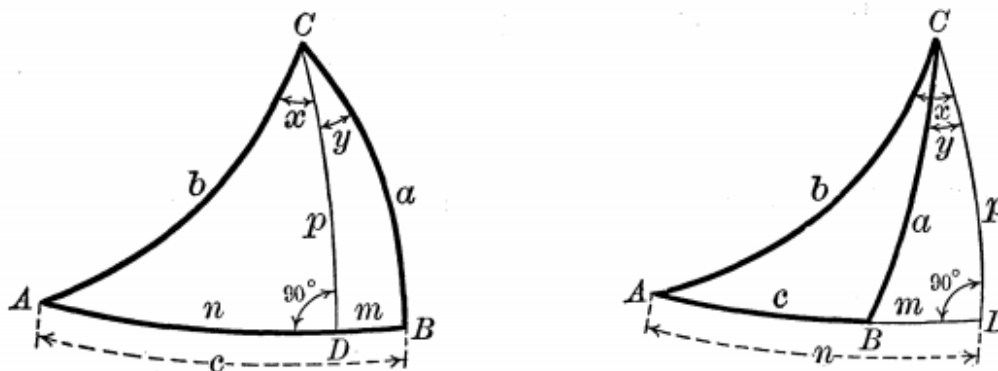
Тако на пример, према 1. кружном правилу је $\sin c_c = \operatorname{tg} \angle A_c \operatorname{tg} \angle B_c$, или $\cos c = \operatorname{ctg} \angle A \operatorname{ctg} \angle B$, што је 6. Неперово правило (2.32). Према 2. кружном правилу је $\sin c_c = \cos a \cos a \cos b$, или $\cos c = \cos a \cos b$, што је 5. Неперово правило (2.32).

$$\begin{array}{ccc} & c_c & \\ A_c & & B_c \\ & a & b \end{array} \quad (2.24)$$

Задатак 2.3.13. Користећи петоугао (2.48) практиковати извођење Неперових десет правила (2.32).

Пређимо сада на троуглове који немају правих углова. За разлику од доказа сферне синусне теореме (2.30), овде ћемо исту теорему доказати помоћу Неперових правила, користећи слику 2.10 оштроуглог и тупоуглог сферног троугла. Дакле, доказујемо синусну теорему.

Теорема 2.3.14. У сферном троуглу су синуси страница пропорционални синусима наспрамних углова.



Slika 2.10: Оштроугли и тупоугли сферни троугао.

Доказ. На слици 2.10 дат је произвољан сферни троугао ABC . Повуцимо CD окомито на AB . Зависно од тога где је пала тачка D имамо два случаја, на датој слици лево је унутар странице а десно је изван. Краткоће ради, пишемо $CD = p$, $AD = n$, $BD = m$, $\angle ACD = x$, $\angle BCD = y$.

У правоуглом троуглу ABC (левом или десном), према 2. кружном правилу биће

$$\sin p = \sin b \sin \angle A.$$

У правоуглом троуглу (левом), према 2. кружном правилу је

$$\sin p = \sin a \sin \angle B.$$

Ово важи и за слику десно, због $\sin \angle DBC = \sin(180^\circ - \angle B) = \sin \angle B$. Изједначавајући $\sin p$ у претходне две једначине, добијамо $\sin a \sin \angle B = \sin b \sin \angle A$, односно

$$\frac{\sin a}{\sin \angle A} = \frac{\sin b}{\sin \angle B}.$$

ТРИГОНОМЕТРИЈА

На исти начин, повлачећи окомице из A , затим из B , налазимо редом:

$$\frac{\sin b}{\sin \angle B} = \frac{\sin c}{\sin \angle C}, \quad \frac{\sin c}{\sin \angle C} = \frac{\sin a}{\sin \angle A}.$$

Ове пропорције су оно што је требало доказати. □

То је била синусна теорема. Следећа је косинусна теорема.

Теорема 2.3.15. *У сферном троуглу је косинус било које странице једнак производу косинуса друге две странице плус производу синуса те две странице и косинуса угла који оне захватају.*

Доказ. На истој слици 2.10 десно, у троуглу DBC , према 2. кружном правилу имамо:

$$\cos a = \cos p \cos m = \cos p \cos(c - m) = \cos p(\cos c \cos m + \sin c \sin m),$$

$$\cos a = \cos p \cos c \cos n + \cos p \sin c \sin n. \quad (2.25)$$

У правоуглом троуглу ADC имамо

$$\cos p \cos n = \cos b, \quad (2.26)$$

при чему је

$$\cos p = \frac{\cos b}{\cos n},$$

па множећи обе стране са $\sin n$ добијамо

$$\cos p \sin n = \frac{\cos b}{\cos n} \cdot \sin n = \cos b \operatorname{tg} n. \quad (2.27)$$

Међутим, према 1. кружном правилу

$$\cos \angle A = \operatorname{tg} n \operatorname{ctg} b,$$

$$\operatorname{tg} n = \operatorname{tg} b \cos \angle A. \quad (2.28)$$

Сменом $\operatorname{tg} n$ из (2.52) у (2.51), налазимо

$$\cos p \sin n = \cos b \operatorname{tg} b \cos \angle A = \sin b \sin \angle A. \quad (2.29)$$

Сменом $\cos p \cos n$ из (2.50) и $\cos p \sin n$ из (2.53), добијамо тражено тврђење

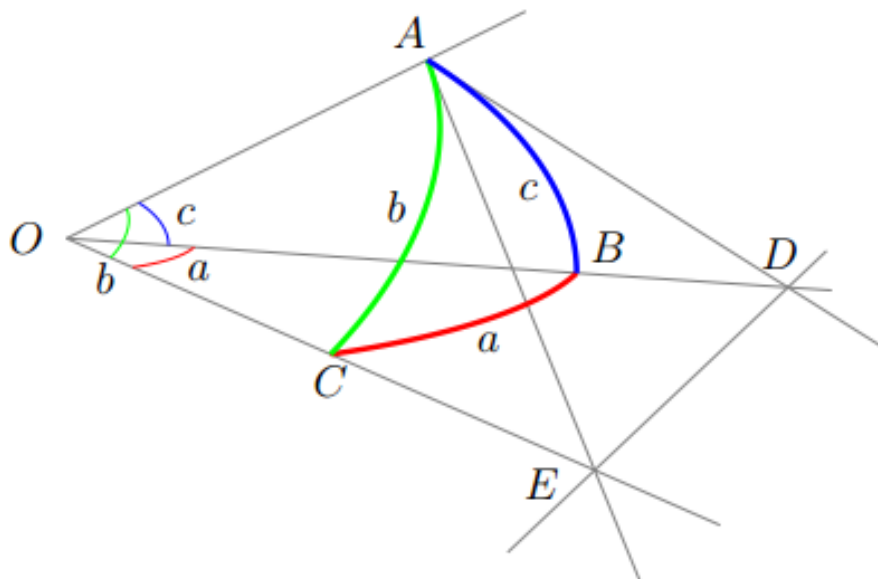
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \angle A. \quad (2.30)$$

Слично, за странице b и c може се добити:

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \angle B, \quad (2.31)$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \angle C. \quad (2.32)$$

То је сферна косинусна теорема, коју је требало доказати. □



Slika 2.11: Косинусна теорема на сфери.

Косинусну теорему смо већ изводили (2.27), али не на овај Неперов данас необичан начин. Помоћу слике 2.11 покушајте реконструисати тај претходни метод, па тек онда погледајте и доказ следеће теореме.

Теорема 2.3.16. Доказати да за произвољан сферни троугао ABC важи једнакост

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \sin \angle A.$$

То је једна од три симетричне косинусне формуле.

Доказ. На слици 2.11 је дати троугао ABC и O центар сфере. Стране a, b и c се мере централним угловима. Тангенте AE и AD сферних лукова b и c су окомите на OA и $\angle EAD = \angle A$. У равнима AED и OED важе еуклидске косинусне теореме:

$$\begin{aligned} DE^2 &= AE^2 + AD^2 - 2 \cdot AE \cdot AD \cdot \cos \angle A, \\ DE^2 &= OE^2 + OD^2 - 2 \cdot OE \cdot OD \cdot \cos \angle A. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Поред тога, важе Питагорине теореме:

$$OE^2 = AE^2 + OA^2, \quad OD^2 = AD^2 + OA^2, \quad (2.34)$$

тако да друга постаје

$$DE^2 = 2 \cdot OA^2 + AE^2 + AD^2 - 2 \cdot OE \cdot OD \cdot \cos a. \quad (2.35)$$

Изједначавањем са првом, добијамо:

$$2 \cdot OA^2 - 2 \cdot OE \cdot OD \cdot \cos a = -2 \cdot AE \cdot AD \cdot \cos \angle A,$$

$$OE \cdot OD \cdot \cos a = OA^2 + AE \cdot AD \cdot \cos \angle A,$$

$$\cos a = \frac{OA}{OE} \cdot \frac{OA}{OD} + \frac{AE}{OE} \cdot \frac{AD}{OD} \cdot \cos \angle A,$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \sin \angle A,$$

а то је оно што је и требало доказати. □

ТРИГОНОМЕТРИЈА

На сличан начин докажете и остале две, од три косинусне формуле:

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \sin \angle A, \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \angle B, \\ \cos c &= \cos b \cos a + \sin b \sin a \cos \angle C.\end{aligned}\tag{2.36}$$

У овим доказима се подразумева да су две стране које формирају дати угао обе мање од 90° . Изведите сличан доказ и за случај већи од 90° .

Пример 2.3.17. У троуглу MNP , $\angle M = 50^\circ$, $p = 70^\circ 45'$, $n = 62^\circ 10'$, наћи m и $\angle P$.

Решење.

$$\begin{aligned}\cos m &= \cos n \cos p + \sin n \sin p \cos \angle M = \\ &= \cos 62^\circ 10' \cos 70^\circ 45' + \sin 62^\circ 10' \sin 70^\circ 45' \cos 50^\circ \approx 0,6906 \\ m &= 45^\circ 19'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \angle P &= \frac{\cos p - \cos m \cos n}{\sin m \sin n} = \\ &= \frac{\cos 70^\circ 45' - \cos 46^\circ 19' \cos 62^\circ 10'}{\sin 46^\circ 19' \sin 62^\circ 10'} \approx 0,01128 \\ \angle P &= 89^\circ 21'.\end{aligned}$$

□

Синусну теорему смо такође изводили на два начина (в. једначину (2.30) и теорему 2.3.14). Сада, ради вежбе, покушајте наћи доказ сличан претходном, гледајући слику 2.12.

Теорема 2.3.18. Доказати да за произвољан сферни троугао ABC важе једнакости:

$$\frac{\sin a}{\sin \angle A} = \frac{\sin b}{\sin \angle B} = \frac{\sin c}{\sin \angle C}.$$

То су три синусне формуле.

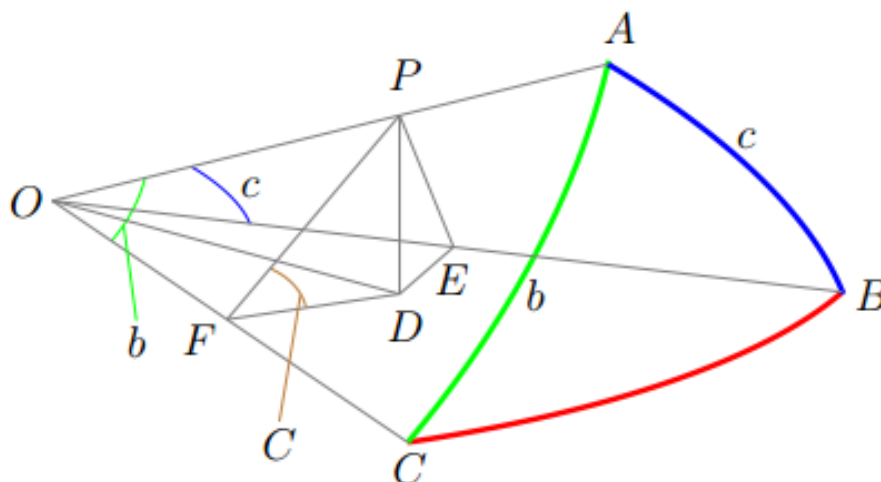
Доказ. На слици 2.12 је сферни троугао ABC и центар сфере O . Нека је P произвољна тачка на дужи OA . Из P иде нормала PD на раван OBC . Повучене су нормале DF и DE на OC и OB , редом. Тада су углови $\angle PDF$, $\angle PDE$ и $\angle PDO$ прави (90°), а према конструкцији $\angle DFO$, $\angle DEO$ су такође прави.

Да би показали да је и $\angle PFO$ прав угао, налазимо:

$$\begin{aligned}PF^2 &= PD^2 + DF^2 = (PO^2 - OD^2) + (OD^2 - OF^2), \\ PF^2 &= PO^2 - OF^2,\end{aligned}$$

што значи да троугао PFO има прави угао у темену F . Слично, троугао PEO има прави угао у E . Отуда, $PF = PO \cdot \sin b$ и $PE = PO \cdot \sin c$, па је

$$\begin{cases} PD = PF \cdot \sin \angle C = PO \cdot \sin b \sin \angle C, \\ PD = PE \cdot \sin \angle B = PO \cdot \sin c \sin \angle B. \end{cases}$$



Slika 2.12: Синусна теорема на сфери.

Изједначавањем десних страна добијамо:

$$\sin b \sin \angle C = \sin c \sin \angle B,$$

$$\frac{\sin b}{\sin \angle B} = \frac{\sin c}{\sin \angle C}.$$

Слично, спуштајући нормалу из OB на раван OAC , доказујемо да је

$$\frac{\sin a}{\sin \angle A} = \frac{\sin c}{\sin \angle C}.$$

То би био доказ све три синусне формуле. □

Пример 2.3.19. У тачкама A и B су два града северне хемисфере, а N је северни пол. Дато је $\angle A = 68^\circ$, $AB = n = 60^\circ 30'$, $\angle N = 80^\circ 16'$, а треба наћи латитуду (географску ширину) места B .

Доказ. Из синусне теореме

$$\frac{\sin a}{\sin \angle A} = \frac{\sin n}{\sin \angle N},$$

следи:

$$\begin{aligned} \sin a &= \frac{\sin n \sin \angle A}{\sin \angle N} = \frac{\sin 60^\circ 30' \sin 68^\circ}{\sin 80^\circ 16'} = 0,818766 \\ a &= 54.9614^\circ = 54^\circ 58', \end{aligned}$$

па латитуда места B износи $35^\circ 02' N$. □

Приметимо да због $\angle N > \angle A$ мора бити $n > a$, па је угао $54^\circ 58'$ решење, а угао $125^\circ 02'$ није. Двосмисленост долази од опште тригонометријске једнакости $\sin x = \sin(180^\circ - x)$, коју овде превазилазимо физичким значењем решења и особином сферног троугла да је наспрам већег угла већа страна (в. упутство задатка 2.3.3), те да разлике $\angle A - \angle B$ и $a - b$ морају имати исти знак.

Пример 2.3.20. Размотрити троугао ABN , у којем је $b = 26^\circ 21'$, $\angle B = 52^\circ 22'$, $\angle A = 104^\circ 44'$.

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Доказ. Из синусне теореме

$$\frac{\sin a}{\sin \angle A} = \frac{\sin b}{\sin \angle B},$$

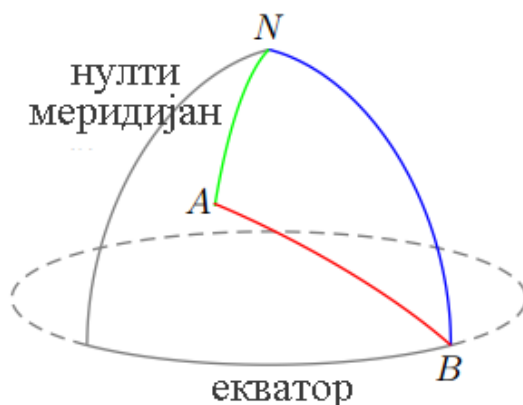
следи:

$$\sin a = \frac{\sin b \sin \angle A}{\sin \angle B} = \frac{\sin 26^\circ 21' \sin 104^\circ 44'}{\sin 52^\circ 22'} = 0,542039$$

$$a_1 = 32^\circ 49', \quad a_2 = 147^\circ 11'.$$

Како је $\angle A - \angle B > 0$ то мора бити позитиван и број $a - b$. Међутим, оба резултата a_1 и a_2 задовољавају тај услов. \square

Пример 2.3.21. Наћи угао одласка из места $A(40^\circ N, 18^\circ E)$ на Земљи ка месту $B(0^\circ N, 58^\circ E)$ по великој кружници.



Slika 2.13: Два места на Земљи, A и B .

Решење. Користимо слику 2.13. Лако налазимо $AN = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$, $BN = 90^\circ$ и $\angle ANB = 58^\circ - 18^\circ = 40^\circ$. Из косинусне теореме добијамо:

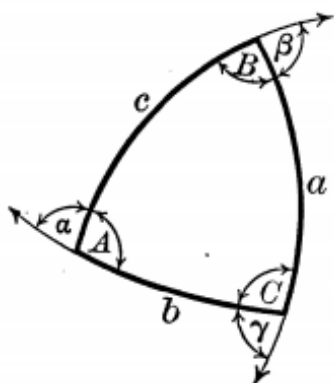
$$\begin{aligned} \cos AB &= \cos AN \cdot \cos BN + \sin AN \cdot \sin BN \cdot \cos \angle ANB = \\ &= \cos 50^\circ \cos 90^\circ + \sin 50^\circ \sin 90^\circ \cos 40^\circ \approx 0,5868 \\ AB &= 54^\circ 04'. \end{aligned}$$

Из синусне теореме добијамо:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \angle NAB}{\sin BN} &= \frac{\sin \angle ANB}{\sin AB}, \\ \sin \angle NAB &= \frac{\sin \angle ANB \sin BN}{\sin AB} = \frac{\sin 40^\circ \sin 90^\circ}{\sin 54^\circ 04'} \approx 0,7939 \\ \angle NAB_1 &= 52^\circ 33', \quad \angle NAB_2 = 127^\circ 27'. \end{aligned}$$

Међутим, из физичких разлога, знамо да је $\angle NAB = 127^\circ 27'$. \square

У наставку понављамо особине поларних троуглова, негде од теореме 2.3.4. Ако теме (или страница) оригиналног троугла има ознаку X , за одговарајуће поларно теме (или страницу) овде ћемо (уместо индекса X_p) користити прим на ту ознаку. Та ознака X' је у литератури уобичајена за дуалне, односно поларне сферне троуглове.



Slika 2.14: Дуални елементи.

Принцип дуалности за сферне троуглове каже да било која реалција између страна a, b, c и темена A, B, C важи такође за његов дуал, поларни троугао чије су одговарајуће странице a', b', c' и темена A', B', C' . На пример, за дуални троугао заједно са (2.60) важи и косинусна теорема

$$\begin{aligned} \cos a' &= \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos \angle A', \\ \cos b' &= \cos c' \cos a' + \sin c' \sin a' \cos \angle B', \\ \cos c' &= \cos a' \cos b' + \sin a' \sin b' \cos \angle C'. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Смењујући (2.36), где је $\pi = 180^\circ$, а угао $\angle X$ у темену $X \in \{A, B, C\}$ пишемо кратко X и добијамо:

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ - A) &= \cos(180^\circ - B) \cos(180^\circ - C) + \\ &+ \sin(180^\circ - B) \sin(180^\circ - C) \cos \angle(180^\circ - a), \end{aligned}$$

и даље доследно за остале две једнакости. Слика 2.3 десно, или слика 2.14, показује на који начин се ово поопштава.

Задатак 2.3.22. Доказати да било која релација међу деловима сферног троугла остаје тачна када сваки део заменимо суплементом супротног дела.

Насупрот углова A, B, C су истоимене странице a, b, c малим словом писане, а насупрот страница су одговарајући углови. Прелазећи на дуални троугао, треба заменити a са $\alpha = 180^\circ - A$, и даље као на слици 2.14, заменити латинска (римска) и грчка слова. Тако долазимо до следеће теореме која се назива “принцип дуалности”.

Теорема 2.3.23. Ако странице општег сферног троугла означимо латинским словима a, b, c а суплементе одговарајућих супротних углова грчким словима α, β, γ , тада ће било која формула која садржи било коју од тих шест делова имати једнако тачну дуалну формулу која се добија простом заменом одговарајућих латинских и грчких слова.

Тако долазимо до косинусне теореме (2.61) писане у облику:

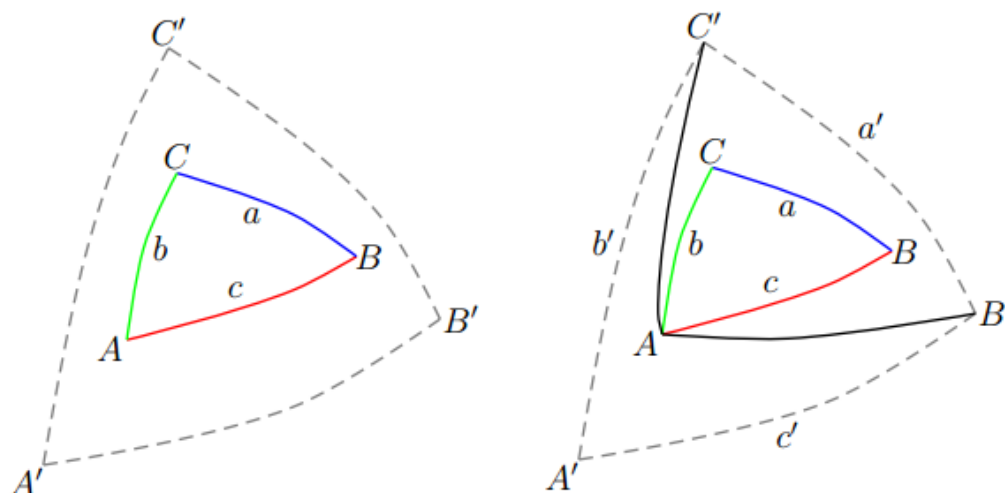
$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos \alpha, \\ \cos b &= \cos c \cos a - \sin c \sin a \cos \beta, \\ \cos c &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \cos \gamma, \end{aligned} \quad (2.38)$$

јер је $\cos \angle A = \cos(180^\circ - a) = -\cos a$, итд. Ови углови α, β и γ су вањски углови троугла, као што се види на слици 2.14. Тврђење из задатка 2.3.22 сада даје косинусну теорему за углове:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos a, \\ \cos \beta &= \cos \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \sin \alpha \cos b, \\ \cos \gamma &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos c. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Слично, имамо дуалну синусну теорему:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}, \quad (2.40)$$



Slika 2.15: Primitivni ABC и поларни троугао $A'B'C'$.

дакле где је $\angle A = 180^\circ - \alpha$, итд.

Алтернативни начин означавања имамо на слици 2.15. Дат је примитивни, оригинални сферни троугао ABC . Велика кружница на којој лежи страница $BC = a$ иде око пола A' , велика кружница странице $CA = b$ иде око пола B' , а кружница $AB = c$ око пола C' . Центар сфере O није приказан, али знамо да је дуж $A'O$ окомита на раван OBC и такође $B'O \perp OCA$, $C'O \perp OAB$.

Под полом велике кружнице подразумевамо тачку на сфери која је удаљена за 90° од сваке тачке те кружнице. Поларни троугао придружен примитивном троуглу ABC је сферни троугао са теменима $A'B'C'$ и страницама $a'b'c'$.

Пример 2.3.24. Ако је A' пол странице, лука a , тада је A пол лука a' . Доказати.

Доказ. Спојимо AC' и AB' , као на слици 2.15 десно. Како је B' пол од AC , то је AB' квадрант (четвртина велике кружнице). Како је C' пол од AB , то је AC' квадрант. Како су оба AC' и AB' квадранти, следи да је A пол лука a' . \square

Докажите слично, да је B пол од b' и да је C пол од c' . У наставку, за формулисање тврдње о суплементности за поларне троуглове, користимо израз “одговарајући” у смислу да је страница b примитивног троугла одговарајућа темену B' поларног, и обратно. Иначе, два угла су “суплементна” ако им је збир 180° .

Пример 2.3.25. Доказати да су углови у поларном троуглу суплементни одговарајућим страницама примитивног троугла, а да су странице поларног троугла суплементне одговарајућим угловима примитивног троугла.

Доказ. Нека страница $A'C'$ сече BA и BC у тачкама D и E редом, као на слици 2.16. Како је B пол од $A'C'$, то је и пол од DE , па су оба BD и BE квадранти и $DE = \angle B$. Како је A' пол од BC , то је $A'E$ квадрант. Како је C' пол од AB , то је $C'D$ квадрант. Отуда:

$$\begin{aligned} C'D + A'E &= 180^\circ, \\ A'C' + DE &= 180^\circ, \\ A'C' + \angle B &= 180^\circ. \end{aligned}$$

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Према томе, $\angle B$ и страница $A'C'$, односно b' , су суплементни. Слично можемо показати да су суплементни $\angle A$ и a' , а такође $\angle C$ и c' . \square

Пример 2.3.26. Дат је троугао PZX елементима $x = 55^\circ 14'$, $\angle P = 54^\circ 01'$, $\angle Z = 121^\circ 25'$. Наћи X .

Решење.

$$\begin{aligned}\cos \angle X &= -\cos \angle P \cos \angle Z + \sin \angle P \sin \angle Z \cos x = \\ &= -\cos 54^\circ 01' \cos 121^\circ 25' + \sin 54^\circ 01' \sin 121^\circ 25' \cos 55^\circ 14', \\ x &= 45^\circ 34'.\end{aligned}$$

\square

У следећим задацима користимо ознаку s за полуобим сферног троугла. Лако доказујемо:

$$\begin{cases} s = \frac{a+b+c}{2}, & s-a = \frac{-a+b+c}{2}, \\ s-b = \frac{a-b+c}{2}, & s-c = \frac{a+b-c}{2}. \end{cases} \quad (2.41)$$

Следеће “адicione формуле” докажете помоћу равне тригонометрије (2.9) и (2.62).

Пример 2.3.27. Доказати, за сферне троуглове:

$$\begin{cases} \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}, \\ \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin b \sin c}}, \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin(s-b) \sin(s-c)}}. \end{cases}$$

Доказ. Адациона формула (2.9) за синус са

$$\cos \alpha = \frac{\cos b \cos c - \cos \alpha}{\sin b \sin c}$$

даје:

$$\begin{aligned}2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha &= 1 - \frac{\cos b \cos c - \cos \alpha}{\sin b \sin c} = \frac{\sin b \sin c - \cos b \cos c + \cos \alpha}{\sin b \sin c} = \\ &= \frac{\cos \alpha - (\cos b \cos c - \sin b \sin c)}{\sin b \sin c} = \frac{\cos \alpha - \cos(b+c)}{\sin b \sin c} \\ &= \frac{-2 \sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(a-b-c)}{\sin b \sin c},\end{aligned}$$

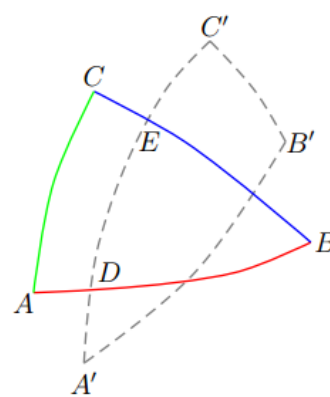
где је кориштена адациона формула (2.10) за претварање разлике косинуса у производ. Како је

$$\sin \frac{1}{2}(a-b-c) = -\sin \frac{1}{2}(-a+b+c) = -\sin \frac{1}{2}(b+c-a),$$

добивамо даље:

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \sin c} = \frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c},$$

а отуда прва тражена адациона формула, за синус половине угла.



Slika 2.16: Суплементи.

Полазећи од (2.9) за косинус, налазимо:

$$\begin{aligned} 2 \cos \frac{1}{2} \alpha &= 1 + \frac{\cos b \cos c - \cos \alpha}{\sin b \sin c} = \frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos \alpha}{\sin b \sin c} = \\ &= \frac{\cos(b-c) - \cos \alpha}{\sin b \sin c} = \frac{-2 \sin \frac{1}{2}(a+b-c) \sin \frac{1}{2}(b-c-a)}{\sin b \sin c} \\ &= \frac{\sin(s-c) \sin(s-b)}{\sin b \sin c}, \end{aligned}$$

а отуда друга тражена адициона формула, за косинус половине угла.

Из претходне две формуле следи:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha}{\cos \frac{1}{2} \alpha} = \frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin(s-b) \sin(s-c)},$$

а отуда трећа тражена формула, за тангенс половине угла. □

Задатак 2.3.28. *Слично као у претходном примеру, доказати идентитете:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin c \sin a}}, \quad \sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}}, \\ \cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-c) \sin(s-a)}{\sin c \sin a}}, \quad \cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b)}{\sin a \sin b}}, \\ \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin(s-c) \sin(s-a)}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin(s-a) \sin(s-b)}}. \end{array} \right. \quad (2.42)$$

Проширимо ли горњи тангенс половине угла алфа, са $\sin(s-a)$, добијамо:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha &= \sqrt{\frac{\sin s \sin^2(s-a)}{\sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}} = \\ &= \sin(s-a) \sqrt{\frac{\sin s}{\sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}}. \end{aligned}$$

Задатак 2.3.29. *Користећи смену $\operatorname{tg} \frac{1}{2} d$, показати да су тачни идентитети:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{1}{2} d = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s}}, \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sin(s-a)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} d}, \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta = \frac{\sin(s-b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} d}, \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma = \frac{\sin(s-c)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} d}. \end{array} \right. \quad (2.43)$$

Може се показати да је d пречник кружнице уписане у сферни троугао.

Уведемо ли ознаку за полузбир вањских углова, који су редом суплементни унутрашњим:

$$\sigma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A + 180^\circ - \angle B + 180^\circ - \angle C),$$

$$\sigma = 270^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C), \quad (2.44)$$

и ознаку δ за суплемент пречника описане кружнице сферног троугла, односно смену:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \sqrt{\frac{\sin(\sigma - \alpha) \sin(\sigma - \beta) \sin(\sigma - \gamma)}{\sin \sigma}}, \quad (2.45)$$

можемо поједноставити следеће изразе.

Задатак 2.3.30. Доказати идентитете:

$$\begin{cases} \sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\sin \sigma \sin(\sigma - \alpha)}{\sin \beta \sin \gamma}}, \\ \cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\sin(\sigma - \beta) \sin(\sigma - \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma}}, \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\sin \sigma \sin(\sigma - \alpha)}{\sin(\sigma - \beta) \sin(\sigma - \gamma)}}, \end{cases} \quad (2.46)$$

Формирајте и докажете и симетричне формуле за странице b и c .

Задатак 2.3.31. Доказати идентитете за тангенсе половине страница:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{1}{2} a = \frac{\sin(\sigma - \alpha)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta}, \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} b = \frac{\sin(\sigma - \beta)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta}, \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \frac{\sin(\sigma - \gamma)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta}, \end{cases} \quad (2.47)$$

где је σ и $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta$ дато релацијама (2.68) и (2.69).

Делећи тангенсе половине (вањских) углова, даље налазимо:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha : \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s - a)}{\sin(s - b) \sin(s - c)}} : \sqrt{\frac{\sin s \sin(s - b)}{\sin(s - c) \sin(s - a)}},$$

$$\sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta : \cos \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta = \sin(s - a) : \sin(s - b).$$

Из ове пропорције следи:

$$\frac{\sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta + \cos \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta}{\sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta - \cos \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta} = \frac{\sin(s - a) + \sin(s - b)}{\sin(s - a) - \sin(s - b)},$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}[(s - a) + (s - b)]}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}[(s - a) - (s - b)]}.$$

Због $s - a + s - b = 2s - a - b = a + b + c - a - b = c$ и $s - a - s + b = b - a$ имамо даље:

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = -\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} c}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a - b)},$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a - b) = -\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} c. \quad (2.48)$$

Слично се добијају и одговарајуће формуле за $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(b - c)$ и $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(c - a)$. То смо добили делећи тангенсе.

Множећи горње тангенсе, добијамо:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin(s-b) \sin(s-c)}} \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin(s-c) \sin(s-a)}},$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta}{\cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta} = \frac{s}{\sin(s-c)}.$$

Из ове пропорција следи:

$$\frac{\cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta - \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta}{\cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta + \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta} = \frac{\sin(s-c) - \sin s}{\sin(s-c) + \sin s},$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(s-c-s)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(s-c+s)},$$

а зато што је тангенсна функција непарна, добијамо

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b) = -\frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}c. \quad (2.49)$$

На сличан начин добијамо одговарајуће формуле за $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(b+c)$ и $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(c+a)$.

Из (2.72) и (2.73) из принципа дуалности добијамо формуле:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = -\frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma, \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = -\frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma. \end{cases} \quad (2.50)$$

Цикличном заменом слова добијамо и остале формуле за $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\beta-\gamma)$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\beta+\gamma)$ и $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$. Ове релације се називају *Неперове аналогије*.

Како су $\cos \frac{1}{2}(a-b)$ и $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A)$ увек позитивни, из последње формуле следи да $\cos \frac{1}{2}(a+b)$ и $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ увек имају супротан знак, а са друге стране $\cos \frac{1}{2}(a+b)$ и $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$ увек имају исти знак. Отуда следеће тврђење.

Теорема 2.3.32. У произвољном сферном троуглу је збир било које две стране мањи, већи или једнак 180° , заједно са збиром одговарајућих супротних углова који је мањи, већи или једнак 180° .

Са претходним формулама сферне тригонометрије имамо више него довољно алата за решање сферних троуглова. Као и у равној геометрији, решити сферни троугао значи на основу датих (три од шест страница и углова) наћи остале елементе. Први случај је када су дате три стране, или су дата три угла. Други случај је када су дате две стране и њима захваћен угао, или дуално дата су два угла на једној страни. Трећи случај је када су дате две стране и угао наспрам једне од њих, односно два угла и страна насупротив једног. Следе примери.

Пример 2.3.33. Дато је $a = 60^\circ$, $b = 137^\circ 20'$, $c = 116^\circ$. Наћи унутрашње углове $\angle A, \angle B, \angle C$.

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Решење. Обим троугла је $2s = a + b + c = 313^{\circ}20'$, а полуобим $s = 156^{\circ}40'$, па имамо:

$$s - a = 96^{\circ}40', \quad s - b = 19^{\circ}20', \quad s - c = 40^{\circ}40'.$$

Да нађемо унутрашњи угао у темену A прво тражимо вањски угао $\alpha = 180^{\circ} - \angle A$ помоћу (2.67):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2}d &= \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}, & \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha &= \frac{\sin(s-a)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}d}, \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}d &= \sqrt{\frac{\sin(96^{\circ}40')\sin(19^{\circ}20')\sin(40^{\circ}40')}{\sin 156^{\circ}40'}}, & \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha &= \frac{\sin(96^{\circ}40')}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}d}, \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}d &= 0,73553, & \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha &= \frac{0,993238}{0,73553}, \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha &= 1,35037 \\ \alpha &= 106^{\circ}57' \\ \angle A &= 180^{\circ} - \alpha = 73^{\circ}03'. \end{aligned}$$

На сличан начин налазимо и остала два унутрашња угла:

$$\angle B = 131^{\circ}32', \quad \angle C = 96^{\circ}55'.$$

□

Пример 2.3.34. Дато је $\angle A = 70^{\circ}$, $\angle B = 131^{\circ}10'$, $\angle C = 94^{\circ}50'$. Наћи странице a, b, c сферног троугла.

Решење. Користимо суплементе $\alpha = 180^{\circ} - \angle A$, $\beta = 180^{\circ} - \angle B$, $\gamma = 180^{\circ} - \angle C$, вањске углове:

$$\alpha = 110^{\circ}, \quad \beta = 48^{\circ}50', \quad \gamma = 85^{\circ}10'.$$

Полузбир (2.68) вањских углова је $\sigma = 122^{\circ}$, па налазимо:

$$\sigma - \alpha = 12^{\circ}, \quad \sigma - \beta = 73^{\circ}10', \quad \sigma - \gamma = 36^{\circ}50'.$$

Затим налазимо тангенс (2.69):

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta = \sqrt{\frac{\sin(\sigma - \alpha)\sin(\sigma - \beta)\sin(\sigma - \gamma)}{\sin \sigma}} = 0,375068.$$

Из (2.71) добијамо:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2}a &= \frac{\sin(\sigma - \alpha)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta} = 0,55433 \\ a &= 58^{\circ}. \end{aligned}$$

Слично налазимо:

$$b = 137^{\circ}12', \quad c = 115^{\circ}56'.$$

□

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Када решавамо сферни троугао у другом случају, када су дате две стране и њима захваћен угао, тада користимо формуле (2.74) и (2.72).

Пример 2.3.35. Дато је $a = 64^\circ 24'$, $b = 42^\circ 30'$, $\angle C = 58^\circ 40'$. Наћи $\angle A$, $\angle B$, c .

Решење. Налазимо $\gamma = 180^\circ - \angle C = 121^\circ 20'$, па је $\frac{1}{2}\gamma = 60^\circ 40'$. Затим, израчунавамо:

$$\frac{1}{2}(a+b) = 53^\circ 27', \quad \frac{1}{2}(a-b) = 10^\circ 57',$$

па помоћу (2.74) добијамо:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = -\frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = -0,420782 \Rightarrow \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = -22^\circ 49',$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = -\frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = 2,93381$$

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 180^\circ - 71^\circ 11' = 108^\circ 49'.$$

Отуда:

$$\alpha = 86^\circ, \quad \beta = 131^\circ 38',$$

$$\angle A = 180^\circ - \alpha = 94^\circ, \quad \angle B = 180^\circ - \beta = 48^\circ 22'.$$

Из (2.72) добијамо:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}c = -\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = 0,47226$$

$$\frac{1}{2}c = 25^\circ 17' \Rightarrow c = 50^\circ 34'.$$

□

Само c , из претходног примера, можемо наћи и из косинусне теореме (2.62), без претходног одређивања углова у теменима A и B . При томе можемо користити и другачију формулу, подешену према слици 2.17 лево. BD је нормала на страницу AC , тако да је:

$$BD = p, \quad CD = m, \quad AD = n.$$

Тада прво Неперово правила, уз слику 2.9, за сферни троугао BCD даје:

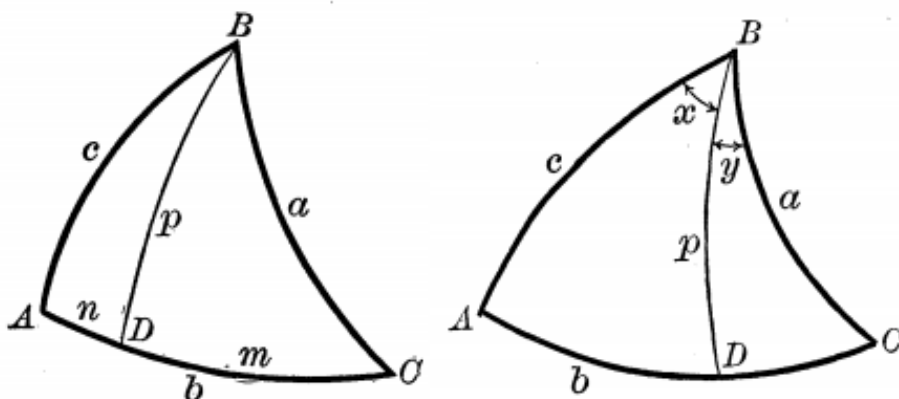
$$\cos \angle C = \operatorname{tg} m \operatorname{ctg} \alpha, \quad \vee \quad \operatorname{tg} m = \operatorname{tg} a \cos \angle C.$$

Друго Неперово правило даје:

$$\cos a = \cos m \cos p \quad \vee \quad \cos p = \cos a / \cos m.$$

Иста правила на троуглу ABD дају $\cos c = \cos n \cos p$, па са претходним добијамо

$$\cos c / \cos n = \cos a / \cos m, \quad n = b - m.$$



Slika 2.17: Разлагање троугла ABC на правоугле троуглове.

Дакле, према слици 2.17 лево, важе и идентитети:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} m = \operatorname{tg} a \cos \angle C, \\ \cos c = \frac{\cos a \cos(b-m)}{\cos m}. \end{cases} \quad (2.51)$$

Према слици 2.17 десно, из Неперовог првог правила и троугла ABD , где је $\angle x = \angle ABD$, добијамо:

$$\cos c = \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} \angle A \vee \operatorname{ctg} \angle x = \operatorname{tg} \angle A \cos c.$$

Из другог правила и истог троугла, имамо:

$$\cos \angle A = \cos p \sin \angle x \vee \cos p = \cos \angle A / \sin \angle x.$$

Исто правило на троуглу CBD , $\angle y = \angle DBC$, даје

$$\cos \angle C = \cos p \sin \angle y \vee \cos p = \cos \angle C / \sin \angle y.$$

Комбиновањем претходних једнакости, добијамо:

$$\cos \angle C / \sin \angle y = \cos \angle A / \sin \angle x \vee \cos \angle C = \cos \angle A \sin \angle y / \sin \angle x.$$

На крају, због $\angle y = \angle B - \angle x$, налазимо:

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} \angle A \cos c, \\ \cos \angle C = \frac{\cos \angle A \sin(\angle B - \angle x)}{\sin \angle x}. \end{cases} \quad (2.52)$$

Пример 2.3.36. Дато је $c = 116^\circ$, $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 131^\circ 20'$, а треба наћи $a, b, \angle C$.

Решење. Када су дата два унутрашња угла на датој страници, као овде $\angle A, \angle B, c$, тада користимо формулу (2.72) и (2.73), а затим прву од (2.74). Добијамо, редом:

$$\alpha = 180^\circ - \angle A = 110^\circ, \quad \beta = 180^\circ - \angle B = 48^\circ 40',$$

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 79^\circ 20', \quad \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 30^\circ 40', \quad \frac{1}{2}c = 58^\circ,$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a - b) = -\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}c, \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a + b) = -\frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}c, \end{cases}$$

ТРИГОНОМЕТРИЈА

$$\frac{1}{2}(a-b) = -39^{\circ}42', \quad \frac{1}{2}(a+b) = 97^{\circ}39',$$

$$a = 57^{\circ}56', \quad b = 137^{\circ}22'.$$

Да нађемо $\angle B$ користимо (2.74):

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = -\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin \frac{1}{2}(a-b)},$$

$$\frac{1}{2}\gamma = 42^{\circ}36',$$

$$\angle C = 180^{\circ} - \gamma = 94^{\circ}48'.$$

□

Ако је у горњем примеру потребно наћи само $\angle C$, без претходног израчунавања a и b , тада можемо користити (2.76).

У трећем случају, када су дате две стране и угао насупрот једне од њих сферног троугла, рецимо $a, b, \angle B$, за налажење $\angle A$ користимо синусну теорему 2.3.18, за налажење $\angle C$ користимо прву формулу (2.74), а за налажење странице c формулу (2.72). Зависно од датих података, задатак може имати два, једно или ниједно решење.

Пример 2.3.37. Дато је $a = 58^{\circ}$, $b = 137^{\circ}20'$, $\angle B = 131^{\circ}20'$, налазимо $\angle A, \angle C, c$.

Решење. Из синусне теореме 2.3.18 израчунавамо:

$$\sin \angle A = \frac{\sin a \sin \angle B}{\sin b} = 0,939578$$

а отуда два могућа угла:

$$\angle A_1 = 69^{\circ}58', \quad \angle A_2 = 110^{\circ}02'.$$

Како је $a < b$ то су оба угла A_1 и A_2 мања од угла B , па имамо два решења. Затим:

$$\frac{1}{2}(a+b) = 97^{\circ}40', \quad \frac{1}{2}(a-b) = -39^{\circ}40', \quad \beta = 180^{\circ} - \angle B = 48^{\circ}40',$$

$$\alpha_1 = 180^{\circ} - \angle A_1 = 110^{\circ}2', \quad \alpha_2 = 180^{\circ} - \angle A_2 = 69^{\circ}58',$$

$$\frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta) = 79^{\circ}21', \quad \frac{1}{2}(\alpha_1 - \beta) = 30^{\circ}41',$$

$$\frac{1}{2}(\alpha_2 + \beta) = 59^{\circ}19', \quad \frac{1}{2}(\alpha_2 - \beta) = 10^{\circ}39'.$$

Од формула (2.74) бирамо

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = -\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b) \operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\sin \frac{1}{2}(a-b)}$$

и израчунавамо

$$\gamma_1 = 85^{\circ}18', \quad \gamma_2 = 32^{\circ}34',$$

$$\angle C_1 = 180^{\circ} - \gamma_1 = 94^{\circ}42', \quad \angle C_2 = 180^{\circ} - \gamma_2 = 147^{\circ}26'.$$

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Помоћу формуле (2.72) налазимо c :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}c = -\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)},$$

$$c_1 = 115^\circ 54', \quad c_2 = 150^\circ 56'.$$

□

Ако је потребно израчунати страницу c без израчунавања угла A , можемо разложити дати троугао на два правоугла троугла и слично као на слици 2.17 применити два Неперова правила.

Када су у трећем случају дата два угла и страница наспрам једног од њих, нпр. $\angle A, \angle B, b$, за налажење странице a користимо синусну теорему 2.3.18, за налажење c користимо (2.72), а за налажење $\angle C$ користимо (2.74).

Пример 2.3.38. Дато је $\angle A = 110^\circ$, $\angle B = 131^\circ 20'$, $b = 137^\circ 20'$. Налазимо $a, b, \angle C$.

Решење. Пре свега, имамо:

$$\alpha = 180^\circ - \angle A = 70^\circ, \quad \beta = 180^\circ - \angle B = 48^\circ 40',$$

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 59^\circ 20', \quad \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 10^\circ 40'.$$

Страницу a налазимо из синусне теореме 2.3.18:

$$\sin a = \frac{\sin \angle A \sin b}{\sin \angle B} = 0,848151.$$

Отуда два решења:

$$a_1 = 58^\circ 1', \quad a_2 = 180^\circ - a_1 = 121^\circ 59',$$

$$\frac{1}{2}(a_1 + b) = 97^\circ 41', \quad \frac{1}{2}(a_1 - b) = -39^\circ 40'.$$

За налажење странице c из (2.72) бирамо формулу

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}c = -\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$$

и налазимо

$$c_1 = 150^\circ 54', \quad c_2 = 64^\circ 8'.$$

За налажење угла $\angle C = 180^\circ - \gamma$, прво налазимо вањски угао формулом (2.74):

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = -\frac{\sin \frac{1}{2}(a + b) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(a - b)},$$

$$\angle C_1 = 147^\circ 23'. \quad \angle C_2 = 85^\circ 18'.$$

□

Дужину лука кружнице ћемо размотрити на слици 2.18. Из геометрије знамо да се лук L кружнице односи према обиму кружнице $2R\pi$ као број степени лука N° према 360° .

Према томе

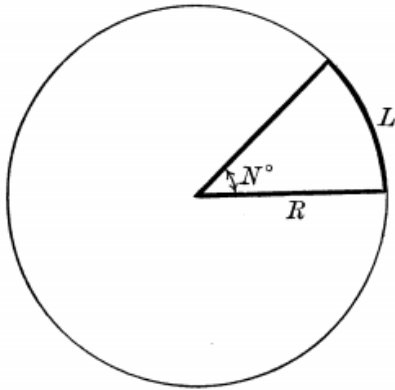
$$L : 2R\pi = N^\circ : 360^\circ,$$

односно

$$L = \frac{NR\pi}{180}, \quad (2.53)$$

где је L дужина лука, N број степени лука, R дужина полупречника кружнице и наравно $\pi = 3,14159265359$.

Екваторијални радијус (полупречник) Земље је 6378,1 km, поларни радијус је 6356,8 km. Земља је приближно сфера са радијусом око



Slika 2.18: Дужина лука кружнице.

$$R_\oplus = 6,371 \text{ km}. \quad (2.54)$$

Процењује се да је екваторијални обим Земље 40 075 km, да је поларни обим 40 008 km, а за просечан обим Земље узимамо $2R_\oplus\pi = 40 030 \text{ km}$.

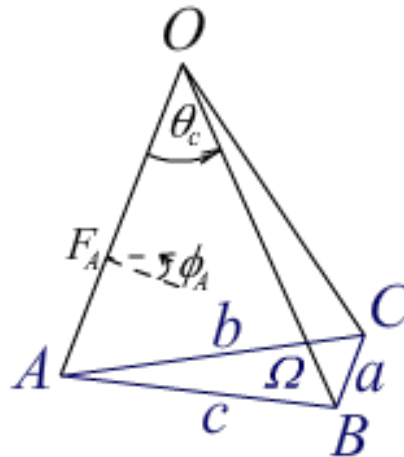
Лук од једне минуте на великој кружници Земљине сфере назива се географска или *наутичка миља*, која се опет у морепловству назива *чвор*. Наутичку миљу треба разликовати од обичне, стандардне *миље* која износи 1,609 километара, што је (у енглеском говорном подручју) једнако као 5 280 стопа (feet) или 1 760 јарда (yards). Има 60 наутичких миља у луку од 1 степена, а $360 \times 60 = 21 600$ наутичких миља у обиму велике кружнице Земље. Узима се да наутичка миља износи 1,852 km, а означава се М, NM или nmi.

Раније смо доказали Жирардову теорему (2.35), формулу за површину сферног троугла, на визуелан и готово тривијалан начин. Сада ћемо се са њом упознати са друге стране, путем сличне занимљиве теме углова.

Када су дате четири некомпланарне¹⁰ тачке $OABC$, оне формирају три полуправе OA , OB и OC , као на слици 2.19, односно тетраедар $OABC$ са базним троуглом ABC и врхом O . Ивице (странице) троугла $BC = a$, $CA = b$ и $AB = c$ са тачком O дефинишу бочне стране тетраедра Oa , Ob и Oc .

Равни у којима леже бочне стране тетраедра чине углове диедра $\phi_A = \angle(Ob, Oc)$, $\phi_B = \angle(Oa, Oc)$ и $\phi_C = \angle(Ob, Oa)$, а поменуте полуправе чине углове у врху тетраедра $\theta_a = \angle BOC$, $\theta_b = \angle COA$ и $\theta_c = \angle AOB$. Користићемо само позитивне углове.

Угао ϕ_A између две равни Ob и Oc , на слици 2.19, које се секу по правој OA назива се *угао диедра*. Он се мери тако



Slika 2.19: Тетраедар $OABC$.

¹⁰компланарне су четири или више тачака које леже у истој равни

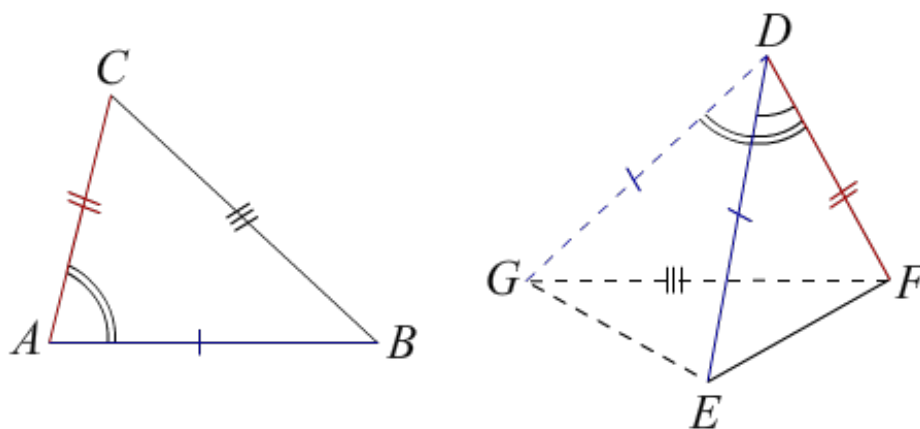
што се из (произвољне) тачке $F_A \in OA$

пресека равни повуку нормале, две праве од којих свака припада по једној равни, чинећи угао ϕ_A . Од два суплементна оваква угла подразумевамо онај мањи.

Када око темена O опишемо јединичну сферу, тада је површина Ω_O оног дела сфере који се налази унутар бочних страна тетраедра, евентуално продужених равнима на којима леже, назива *просторни угао* врха O тетраедра који се мери у стерадијанима. Јасно је да је $0 \leq \Omega_O \leq 4\pi$ јер просторни угао не може бити већи од површине сфере.

У наставку ће нам требати следећа, тзв. *зглобна* (енг. *hindge*) теорема Еуклида (1. књига Елемената, став 28.), односно “теорема отворених уста”.

Теорема 2.3.39. *Ако су две странице троугла подударне двома страницама другог троугла а њима захваћени угао првог је већи од одговарајућег угла другог троугла, онда је трећа страна првог троугла већа од треће стране другог троугла.*



Slika 2.20: Зглобна теорема.

Доказ. На слици 2.20 су дати троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$, где је $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$ и $\angle BAC > \angle EDF$. Конструисемо дуж DG тако да је $\angle GDF = \angle BAC$ и $\overline{DG} = \overline{AB}$. Троуглови DGF и ABC су подударни (сус), па је $\overline{GF} = \overline{BC}$.

Поред тога је $\overline{DG} = \overline{DE}$, па је $\angle DGE = \angle DEG$. Тако је $\angle FEG > \angle DEG = \angle DGE > \angle FGE$, а отуда $\overline{GF} > \overline{EF}$. Дакле, $\overline{BC} > \overline{EF}$, што је и требало доказати. \square

Вежбе ради, покушајте доказати и следећу, обрнуту зглобну теорему.

Теорема 2.3.40. *Ако су две странице троугла подударне двома страницама другог троугла, тада ће захваћени угао првог троугла бити већи од одговарајућег угла другог ако је трећа страна првог већа од треће стране другог троугла.*

Доказ. Користимо исту слику 2.20, али је дато $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$ и $\overline{BC} > \overline{EF}$.

Када би било $\angle BAC = \angle EDF$, тада би дати троуглови били подударни, што је у контрадикцији са претпоставком да им је трећа страна различита. Зато претпостављамо да су углови $\angle BAC$ и $\angle EDF$ различити. Ако је $\angle BAC < \angle EDF$, тада на основу претходне теореме 2.3.39 добијамо да је трећа страна првог троугла краћа, што је опет у контрадикцији са претпоставком да је дужа. Према томе, остаје само могућност $\angle BAC > \angle EDF$, што је и требало доказати. \square

Теорема 2.3.41. *За произвољан тетраедар, као на слици 2.19, важи релација*

$$\theta_b < \theta_a + \theta_c,$$

коју називамо неједнакост троугла.

Доказ. Ако је $\theta_b \leq \theta_a$ или $\theta_b \leq \theta_c$, тада је дата неједнакост очигледно тачна. Даље, претпоставимо да је угао θ_b већи од оба θ_a и θ_c . Нека су F_A и F_C тачке на полуправама OA и OC , и нека је D тачка на бочној страни Ob тетраедра, таква да је $\angle DOA = \angle AOB$ те је мање од $\angle AOC$. На слици 2.21 видимо да је тачка E пресек правих $F_A F_C$ и OD . Изаберимо тачку $F_B \in OB$, тако да су дужине $\overline{OF_B}$ и \overline{OE} једнаке.

Из неједнакости троугла у равни и $F_A - E - F_C$ следи

$$\overline{F_A F_B} + \overline{F_B F_C} > \overline{F_A F_C} = \overline{F_A E} + \overline{E F_C},$$

па због $\overline{F_A F_B} = \overline{F_A E}$ добијамо $\overline{F_B F_C} > \overline{E F_C}$.

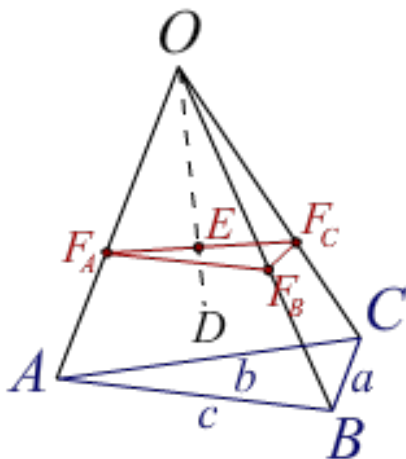
Према зглобној теореме 2.3.39, из $\overline{F_B O} = \overline{OE}$ и $\overline{F_B F_C} > \overline{E F_C}$ следи $\angle F_B O F_C > \angle E O F_C$. Отуда

$$\angle AOC = \angle AOE + \angle E O F_C < \angle AOE + \angle F_B O F_C.$$

Како је $\angle AOE = \angle DOA$ једнако са $\angle AOB$, и $\angle F_B O F_C = \angle BOC$, претходна неједнакост се своди на

$$\angle AOC < \angle AOB + \angle BOC,$$

а то је тражена неједнакост троугла. □



Slika 2.21: Неједнакост троугла.

Теорема 2.3.42. *За тетраедар на слици 2.19 важи*

$$\theta_a + \theta_b + \theta_c < 2\pi,$$

коју називамо неједнакост збира углова.

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Доказ. Из претходне, неједнакости троугла, за тетраедар $OABC$ имамо:

- (i) $\angle ABC < \angle ABO + \angle OBC$,
- (ii) $\angle BCA < \angle BCO + \angle ACO$,
- (iii) $\angle BAC < \angle BAO + \angle CAO$.

Како је збир углова (равног) троугла $\pi = 180^\circ$, важе и следеће једнакости:

- (iv) $\angle ABC + \angle BCA + \angle BAC = \pi$,
- (v) $\angle AOB = \pi - \angle OBA - \angle OAB$,
- (vi) $\angle AOC = \pi - \angle OCA - \angle OAC$,
- (vii) $\angle COB = \pi - \angle OBC - \angle OCB$.

Сабирањем (v), (vi) и (vii) добијамо

$$\begin{aligned} & \angle AOB + \angle AOC + \angle COB = \\ & = 3\pi - (\angle OBA + \angle OBC) - (\angle ACO + \angle BCO) - (\angle BAO + \angle CAO). \end{aligned}$$

Сменом (i), (ii) и (iii) излази

$$\angle AOB + \angle AOC + \angle COB < 3\pi - \angle ABC - \angle BAC - \angle ACB,$$

а због (iv) је десна страна једнака $3\pi - \pi = 2\pi$, што је и требало доказати. □

Поопштавајући, рецимо да је дата сфера са центром O на којој се налазе темена произвољног полигона $ABCDE \dots$ и поларног полигона $A'B'C'D'E' \dots$ одређеног конструкцијом полупречника OA' окомитог на OBC , B' на OCD , и тако даље. Ако су све ове окомице изван оригиналног полигона у односу на полиедарски угао $O-ABCDE \dots$, онда је лако доказати да је угао $A'OB'$ суплементаран углу диједра $B-OC-D$, $B'OC'$ суплементаран $C-OD-E$, и тако даље, око полигона. Ове ознаке помажу поопштавању претходног разматрања у полигон, или обратно дегенерацији полигона у троугао.

Други начин означавања полигона било би називање по његовим страницама $abcde \dots$, а поларног по његовим врховима $A'B'C'D'E' \dots$ подразумевајући да је радијус OA' окомит на раван лука a са врхом O .

На пример, троугао abc има поларни троугао $A'B'C'$ такав да је $OA' \perp a$, $OB' \perp b$ и $OC' \perp c$. Због прве две окомице је раван $OA'B'$ окомита на ивицу диедра aOB . Зато је пресек лукова a и b , тачка ab , пол лука $A'B'$, а троугао abc је поларни троугла $A'B'C'$.

Ради једноставности, унутрашњи угао полигона у темену означавамо кратко са A уместо $\angle A$. Поопштавајући пример 2.3.25 показаћемо да важи $A = \pi - a'$, где је $ABCDE \dots$ произвољан конвексни сферни полигон и $a'b'c'd'e' \dots$ његов поларни полигон. Видећемо и даље, шта се може рећи о збиру u унутрашњих углова у теменима A, B, C, D, E, \dots .

Формирајмо пирамиду са врхом O и базом сферним полигоном $a'b'c'd'e' \dots$, а на страни која садржи a' , не само да је тачно да је угао у $O = a'$, већ је и унутрашњи угао полигона у темену $A = \pi - a'$. Затим, ако означимо са u збир углова $A+B+C+D+E+\dots$, а са s' збир страница $a'+b'+c'+d'+e'+\dots$ важи једнакост

$$u = n\pi - s', \tag{2.55}$$

где је $n = 3, 4, 5, \dots$ број темена полигона.

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Са друге стране, гледајућу базу пирамиде, било који угао тог равнoг полигона је мањи од одговарајућег сферног угла полигона, па је збир свих равних углова мањи од збира свих сферних темених углова. Овај први збир износи $(n - 2)\pi$, а други смо означили са u . Њихову (позитивну) разлику E_n назовимо ексцесом сферног n -то угла. Тако долазимо до једнакости:

$$E_n = u - (n - 2)\pi. \quad (2.56)$$

Из (2.80) и (2.79) добијамо

$$E_n = 2\pi - s'. \quad (2.57)$$

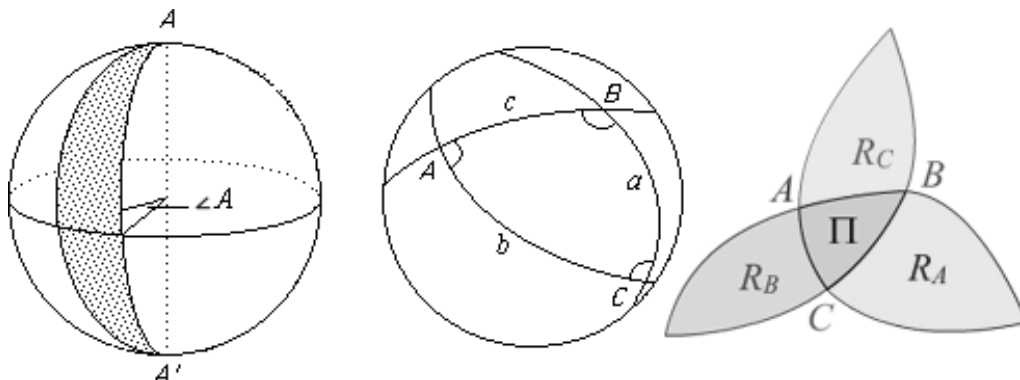
Једнакост (2.80) дефинише сферни ексцеса E_n сферног n -то угла:

Сферни ексцес конвексног сферног полигона је величина за коју збир његових углова премашује збир углова равнoг полигона са истим бројем страна.

Једнакост (2.81) се може узети за теорем:

Сферни ексцес конвексног сферног полигона једнак је разлици у радијанима између збира страница његовог поларног полигона и обима велике кружнице.

Даље, тражимо површину $\Pi = \Pi(ABC)$ сферног троугла ABC са угловима израженим у радијанима. На слици 2.22 лево, приказана је луна теменог угла $\angle A$ овог троугла чија површина на половини сфере износи $\Pi_A = 2 \cdot \angle A \cdot \rho^2$, где је ρ полупречник сфере. Ова луна садржи дати троугао површине Π и остатак полусфере површине R_A , тако да је $\Pi + R_A = \Pi_A$.



Slika 2.22: Površina sfernog trougla.

Сва три темена датог троугла имају по једну овакву луну, а свака луна садржи тај троугао. Отуда, редом:

$$\Pi + R_A = \Pi_A, \quad \Pi + R_B = \Pi_B, \quad \Pi + R_C = \Pi_C,$$

$$3\Pi + R_A + R_B + R_C = \Pi_A + \Pi_B + \Pi_C,$$

$$3\Pi + (2\pi\rho^2 - \Pi) = 2(\angle A + \angle B + \angle C)\rho^2,$$

$$2\Pi + 2\pi\rho^2 = 2(\angle A + \angle B + \angle C)\rho^2,$$

$$\Pi + \pi\rho^2 = (\angle A + \angle B + \angle C)\rho^2,$$

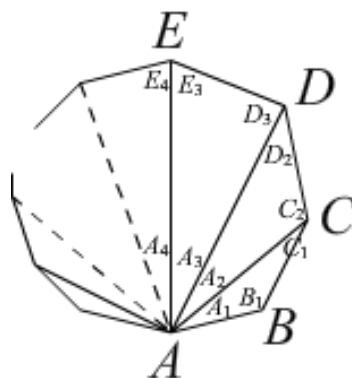
$$\Pi = (\angle A + \angle B + \angle C - \pi)\rho^2,$$

$$\Pi(ABC) = E_3\rho^2. \quad (2.58)$$

ТРИГОНОМЕТРИЈА

То је Жирардова теорема (2.35). Ексцес $E = E_3$ је дат једнакошћу (2.81) за $n = 3$.

Када посматрамо конвексни сферни n -тоугао $ABCDE\dots$ повлачимо све могуће дијагонале из темена A . Од укупно n темена датог полигона, три дијагонале не можемо повући, самом себи и у два суседна темена, што значи да имамо $n - 3$ дијагонале и $n - 2$ дисјунктна троугла ABC, ACD, ADE, \dots са заједничким теменом. Углове тих троуглова означимо редом као на слици 2.23, ознаком темена са индексом увећаним за један у сваком следећем троуглу. Ради краткоће пишемо A_1 уместо $\angle A_1$ и слично за све углове.



Slika 2.23: Троуглови полигона.

Површине ових троуглова означимо истим редом са $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$, а ексцесе троуглова са $E_{n1}, E_{n2}, E_{n3}, \dots$, па имамо једнакости:

$$\Pi_1 = (A_1 + B_1 + C_1 - \pi)\rho^2 = E_{n1}\rho^2,$$

$$\Pi_2 = (A_2 + C_2 + D_2 - \pi)\rho^2 = E_{n2}\rho^2,$$

$$\Pi_3 = (A_3 + D_3 + E_3 - \pi)\rho^2 = E_{n3}\rho^2,$$

и тако даље. Површина $\Pi = \Pi(ABCDE\dots)$ датог n -тоугла је збир:

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \dots = \\ &= [A + B + C + D + E + \dots - (n - 2)\pi]\rho^2, \end{aligned}$$

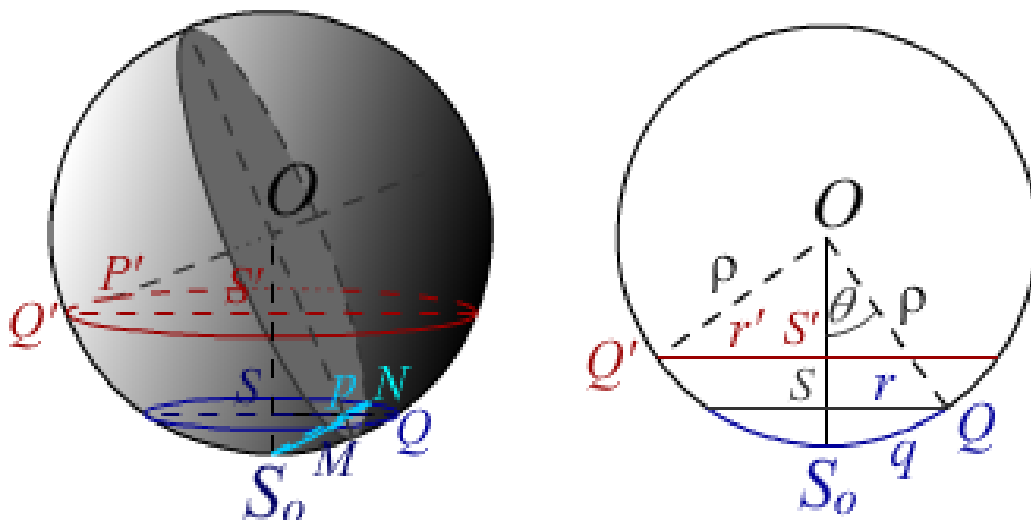
$$\Pi(ABCDE\dots) = E_n\rho^2, \tag{2.59}$$

где је E_n ексцес сферног полигона дат једнакошћу (2.80). Отуда теорем:

Површина произвољног сферног полигона једнака је сферном ексцесу, у радијанима, помноженим квадратом радијуса.

Површина малог круга на сфери може се добити и као гранични случај правилног сферног n -тоугла када $n \rightarrow \infty$. Да би на овај начин извели иначе познату површину *калоте*¹¹, користимо формулу (2.81) за ексцес примитивног (оригиналног) полигона помоћу обима њему поларног полинома.

За сваки од поменутих једнакостраничних полигона постоји поларни полигон, уписан у мали круг око пола ближег оригиналном кругу од центра O сфере. Означимо центар



Slika 2.24: Примитивна и поларна кружница

примитивног (оригиналног) полигона S_o а са M и N нека два његова суседна темена. Страници $p = MN$ одговара поларно теме P' , као што се види на слици 2.24.

База калоте у коју је уписан дати полигон је кружница са центром S , а темена поларног полигона се налазе на кружници чија база калоте има центар S' . Полупречници базе и поларне базе калоте су редом:

$$r = \rho \sin \theta, \quad r' = \rho \cos \theta, \quad (2.60)$$

где је ρ полупречник сфере, а θ угао из центра O сфере под којим се види полупречник дате мале кружнице. На слици 2.24 је $r = \overline{SQ}$ и $r' = \overline{S'Q'}$, па из $OQ \perp OQ'$ следи $\angle SOQ = \angle S'OQ' = \theta$, а отуда (2.84). Према томе

$$\sigma = 2\pi\rho \sin \theta, \quad \sigma' = 2\pi\rho \cos \theta, \quad (2.61)$$

су обим дате и поларне кружнице. Када обим изражавамо у радијанима тада узимамо $\rho = 1$.

Помоћу (2.81), где је обим поларног полигона s' изражен у радијанима, израчунавамо површину $\Pi(n) = (2\pi - s'_n)\rho^2$ било којег једнакостраничног n -то страног полигона уписаног у дати круг. При томе очекујемо да у граничном случају $n \rightarrow \infty$ буде $s'_n \rightarrow \sigma'$, тј. да добијемо обим поларне (мале) кружнице. Штавише, очекујемо да у том граничном случају имамо $\Pi(n) \rightarrow \Pi(\theta)$, где је $\Pi(\theta)$ површина малог круга сфере чији се полупречник из центра сфере види под углом θ .

Из примитивног троугла SMN и поларног троугла $S'M'N'$ добијамо, редом:

$$\begin{aligned} \frac{s_n}{2} &= nr \sin \frac{\pi}{n}, & \frac{s'_n}{2} &= nr' \sin \frac{\pi}{n}, \\ s_n &= \frac{2\rho \sin \theta \sin(\pi/n)}{\pi/n}, & s'_n &= \frac{2\rho \cos \theta \sin(\pi/n)}{\pi/n}, & \rho &= 1, \\ \sigma &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 2\pi \sin \theta, & \sigma' &= \lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = 2\pi \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.62)$$

¹¹Kalota je deo sfere ravno odsečen, površine $2\pi\rho h$, gde je ρ poluprečnik sfere a h visina kalote.

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Затим имамо:

$$\begin{aligned} \Pi(\theta) &= (2\pi - \sigma')\rho^2, \\ \Pi(\theta) &= (2\pi - 2\pi \cos \theta)\rho^2, \\ \Pi(\theta) &= 2\pi(1 - \cos \theta)\rho^2, \\ \pi(\theta) &= 4\pi\rho^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \end{aligned} \tag{2.63}$$

а то је позната формула за површину калоте изражена помоћу полупречника ρ сфере и централног угла θ над полупречником калоте.

Висина (овде дубина) калоте је $h = \rho - \rho \cos \theta$, тј.

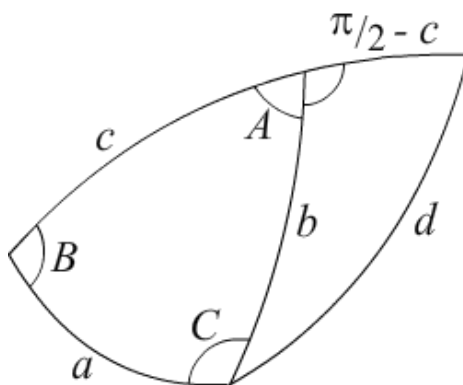
$$h = 2\rho \sin^2 \frac{\theta}{2}, \tag{2.64}$$

па за површину калоте важи

$$\Pi(\theta) = 2\pi\rho h, \tag{2.65}$$

а то нам је позната релација из средњошколске геометрије, али за коју се тамо само наводи да се добија интегралним рачуном.

Вратимо се поново на сферне троуглове¹². Радимо у радијанима, а када нема забуне унутрашњи угао у истоименом темену пишемо кратко A уместо $\angle A$.



Slika 2.25: Продужени троугао.

Пример 2.3.43. Користећи слику 2.25, доказати да за сферни троугао ABC са наспрамним странама abc важи једнакост:

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A.$$

Доказ. Као на слици 2.25, продужимо страну c за $\pi/2 - c$. Помоћу косинусне теореме за сферне троуглове (2.60) израчунавамо:

$$\begin{aligned} \cos d &= \cos a \cos \frac{\pi}{2} + \sin a \sin \frac{\pi}{2} \cos B = \sin a \cos B, \\ \cos d &= \cos b \cos \left(\frac{\pi}{2} - c \right) + \sin b \sin \left(\frac{\pi}{2} - c \right) \cos(\pi - A) = \\ &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A. \end{aligned}$$

Изједначавање даје тражену једнакост. □

¹²Rob Johnson, West Hills Institute of Mathematics: www.whim.org

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Троугао којем је један врх пол супротне стране назива се *семилунарни троугао*, или семилуна. То значи да угао у полу семилуне једнак супротној страници, а да су све друге стране и углови $\pi/2$.

Пример 2.3.44. *Ако било која два дела, страница или угао, сферног троугла износи $\pi/2$ радијана, троугао је семилунарни. Доказати.*

Доказ. Имамо четири случаја: 1. две праве стране, 2. два права угла, 3. насупротне права страна и прави угао, 4. налегла права страна и прави угао. Разматрамо их редом.

1. Нека су два праве стране $b = c = \pi/2$. Из косинусне теореме следи:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos c \cos b + \sin c \sin b \cos A = \\ &= \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} \cos A = \cos A. \end{aligned}$$

Према томе, $A = a$. Даље, налазимо:

$$\begin{aligned} \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B, \\ \cos \frac{\pi}{2} &= \cos \frac{\pi}{2} \cos a + \sin \frac{\pi}{2} \sin a \cos B, \\ 0 &= \sin a \cos B. \end{aligned}$$

Како је $a \in (0, \pi)$ то је $\sin a \neq 0$, па мора бити $\cos B = 0$, односно $B = \pi/2$. Слично, $C = \pi/2$.

2. Нека је $B = C = \pi/2$. Опет косинусна теорема, даје:

$$\begin{aligned} \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B = \\ &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \frac{\pi}{2} = \cos c \cos a. \end{aligned}$$

Слично, налазимо и $\cos c = \cos b \cos a$, а отуда $\cos b = \cos b \cos^2 a$. Одузимање на десној страни даје

$$\cos b \sin^2 a = 0.$$

Због $a \in (0, \pi)$ је $\sin a \neq 0$, па је $\cos b = 0$, односно $b = \pi/2$. Из истих разлога је $c = \pi/2$, а онда применимо 1. случај.

3. Нека је $B = b = \pi/2$. Тада из претходне једнакости имамо:

$$\begin{aligned} \cos b &= \cos c \cos a, \\ 0 &= \cos c \cos a. \end{aligned}$$

Према томе, једно од c, a је $\pi/2$, па имамо 1. случај.

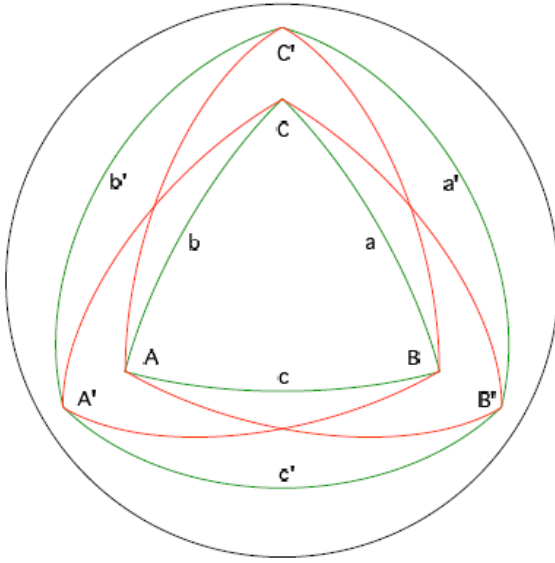
4. Нека је $B = c = \pi/2$. Косинусна теорема даје:

$$\begin{aligned} \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B = \\ \cos \frac{\pi}{2} \cos a &+ \sin \frac{\pi}{2} \sin a \cos \frac{\pi}{2} = 0. \end{aligned}$$

Дакле, $b = \pi/2$, па имамо 1. случај. □

Подсетимо се када је $A'B'C'$ дуал¹³ сферног троугла ABC .

¹³в. и слику 2.14, дуални елементи, уз (2.61).



Slika 2.26: Троугао и дуал.

Врхови дуала A', B', C' су полови страница редом a, b, c на истој полусфери са датим троуглом ABC .

На слици 2.26, странице a, b, c су у датом троуглу наспрам врхова редом A, B, C , а странице дуалног троугла a', b', c' су наспрамне његовим врховима A', B', C' . Како су врхови дуала полови страница оригинала, сви црвени лукови (су квадранти) износе $\pi/2$. По конструкцији, троуглови $ABC', AB'C$ и $A'BC$ су семилуне. Међутим, в. пример 2.3.43, такви су и троуглови $A'B'C, A'BC'$ и $AB'C'$. Тако су врхови $\triangle ABC$ полови страница $\triangle A'B'C'$, на ближим полусферама, па је и дати троугао дуал свог дуала.

Пример 2.3.45. Доказати да је угао сферног троугла суплементан одговарајућој страници дуала.

Доказ. На слици 2.26 посматрајмо C и c' .

Како су $ABC', AB'C$ и $A'BC$ семилуне, то је

$$\angle A'CB' = c' \quad \angle A'CB = \angle ACB' = \pi/2.$$

Према томе:

$$c' + \angle ACB = \angle A'CB' + \angle ACB = \angle A'CB + \angle ACB' = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Дакле, страница c' и угао $\angle ACB$ су суплементни. □

Косинусну теорему за углове смо већ доказивали (2.63), позивајући се на један претходни задатак без доказа. Међутим, у следећем примеру је комплетан доказ, помоћу сферне косинусне теореме.

Пример 2.3.46. Странаца c је између темења A и B сферног троугла ABC . Доказати да је

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c.$$

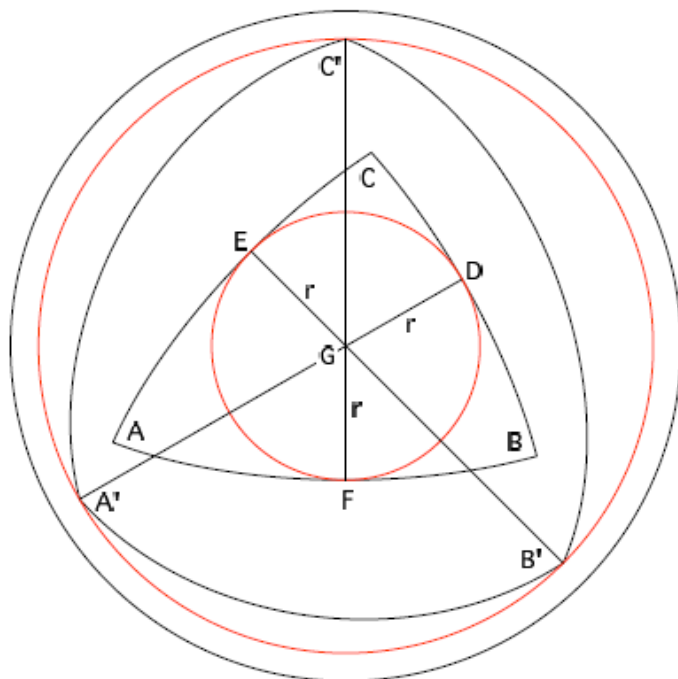
Доказ. Посматрајмо $\triangle A'B'C'$, дуал $\triangle ABC$, са страницама a', b', c' . Косинусна теорема (2.27) и претходни пример дају:

$$\cos c' = \cos a' \cos b' + \sin a' \sin b' \cos C',$$

$$\cos(\pi - C) = \cos(\pi - A) \cos(\pi - B) + \sin(\pi - A) \sin(\pi - B) \cos(\pi - c).$$

Како је $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$, добијамо тражену једнакост. □

Пример 2.3.47. Центар уписаног круга сферног троугла је центар описаног круга његовог дуала. Полупречник уписаног круга сферног троугла је комплемент полупречника описаног круга његовог дуала. Доказати.



Slika 2.27: Уписани и описани круг.

Доказ. На слици 2.27, дат је троугао ABC . Нека је G његов центар уписаног круга, а D, E, F тангентне тачке тог круга са страницама редом BC, AC, AB . Нека је троугао $A'B'C'$ дуал датог.

Радијус кружнице је окомит на кружницу, па је $GD \perp BC$. Ако продужимо DG преко A' , пол од BC од DA' имаће дужину $\pi/2$. Исто важи за остале тангентне тачке. Отуда, странице GA', GB', GC' су комплементне са r , полупречником уписане кружнице троугла ABC , и зато су једнаке. Закључујемо да је центар уписаног круга у ΔABC уједно центар описаног круга $\Delta A'B'C'$, и да је полупречник уписаног круга датог троугла комплементаран полупречнику описаног круга поларног троугла. \square

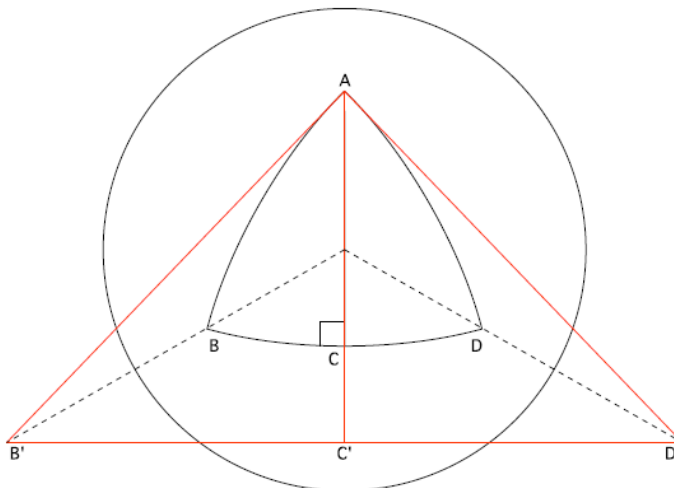
Већ смо се опширно бавили сферним правоуглим троугловима, али не и њиховим пројекцијама на тангентне равни сфере, као у следећем примеру.

Пример 2.3.48. Доказати да пројекција правоуглог сферног троугла на раван која тангира било који врх троугла, чува прави угао.

Доказ. У случају тангирања у правом углу, доказ је тривијалан. Према томе, разматрамо правоугли троугао ABC на слици 2.28, са $C = \pi/2$ и тангентном равни у темену A .

Конструишемо правоугли троугао ADC , подударан (конгруентан) ABC , само рефлектован преко странице AC . Чине га два права угла, $\angle BCD$ је испружен угао, па $C \in BD$. Нека су B', C', D' пројекције тачака B, C, D на тангентну раван, а тада је $C' \in B'D'$. Како је $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ то је $\Delta AD'C' \cong \Delta AB'C'$, што значи да је $\overline{AC'} = \overline{AC'}$, $\overline{AB'} = \overline{AD'} = \overline{AB} = \overline{AD}$ и $\angle B'AC' = \angle BAC = \angle DAC = \angle D'AC'$. Зато, $\angle AC'B' = \angle AC'D'$, јер $C' \in B'D'$, па су $\angle AC'B'$ и $\angle AC'D'$ суплементни. Сваки од њих је прави угао. \square

У прошлом и у следећем примеру пројектујемо сферни правоугли троугао ABC са правим углом у темену C на раван која тангира сферу у темену A у равни троугао



Slika 2.28: Правоугли троугао.

$AB'C'$. У претходном примеру смо доказали да је $\angle C' = \angle C$, а у овом израчунавамо пројектовани угао у темену B' .

Пример 2.3.49. За пројекцију са слике 2.28 доказати да важи

$$\operatorname{tg} \angle B' = \operatorname{tg} \angle B \cdot \cos \overline{AB}.$$

Доказ. Према доказу из примера 2.3.48 оба троугла, сферни $\triangle ABC$ и равни $\triangle AB'C'$ су правоугли, са правим углом у темену $C \rightarrow C'$. Према косинусној теореме, даље имамо:

$$\cos \angle ACB = -\cos \angle CAB \cos \angle B + \sin \angle CAB \sin \angle B \cos \overline{AB},$$

а због $\angle ACB = \pi/2$, биће $\cos \angle ACB = 0$ и добијамо

$$\operatorname{tg} \angle CAB \operatorname{tg} \angle B \cos \overline{AB} = 1.$$

У равни је $\angle CAB = \angle C'AB'$ комплементаран са $\angle B'$, па важи и

$$\operatorname{tg} \angle CAB \operatorname{tg} \angle B' = 1.$$

Комбиноване, последње две једнакости дају

$$\operatorname{tg} \angle B' = \operatorname{tg} \angle B \cos \overline{AB},$$

а то је оно што је требало доказати. □

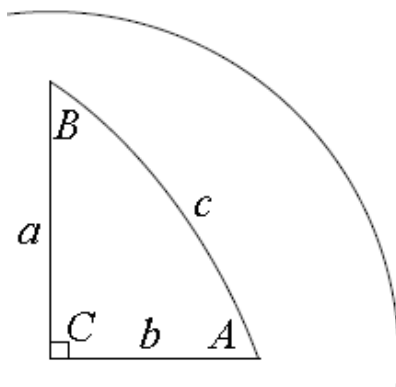
Пример 2.3.50. На слици 2.29 је правоугли сферни троугао ABC са странама a, b, c наспрам истоимених темена и са правим углом C . Доказати:

$$\cos a \cos b = \cos c.$$

Доказ. Према косинусној теореме је:

$$\begin{aligned} \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \sin C \\ &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \frac{\pi}{2} \\ &= \cos a \cos b. \end{aligned}$$

□



Slika 2.29: Правоугли сферни троугао.

То је било 5. Неперово правило (2.32), које се називмо сферном Питагорином теоремом. У наставку опет доказујемо иста правила, ред по ред 1, 2, 7, 10, 4. и 3, али сада помоћу пројекција сферног троугла на тангентну раван.

Пример 2.3.51. Дат је правоугли троугао ABC са катетама a, b насупрот темена редом A, B и хипотенузом c насупрот правог угла C . Доказати једнакости:

$$\begin{aligned} \sin A &= \frac{\sin a}{\sin c}, & \sin B &= \frac{\sin b}{\sin c}, \\ \cos A &= \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}, & \cos B &= \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}, \\ \operatorname{tg} A &= \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}, & \operatorname{tg} B &= \frac{\operatorname{tg} b}{\sin a}. \end{aligned}$$

Доказ. Користимо слику 2.29 и пројектујемо дати троугао на раван која тангира сферу у темену A , у равни троугао $AB'C'$. Из примера 2.3.48 знамо да је угао C' такође прав, а из примера 2.3.49 да је $\operatorname{tg} A' = \operatorname{tg} A \cos b$. Даље користимо тригонометријске формуле за равне троуглове. Лако налазимо, редом:

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}, & \cos B &= \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}, \\ \operatorname{tg} A &= \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}, & \operatorname{tg} B &= \frac{\operatorname{tg} b}{\sin a}. \end{aligned}$$

То су тражене четири последње формуле. Множећи ове леве једнакости, добијамо:

$$\sin A = \frac{\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}{\sin b \operatorname{tg} c} = \frac{\sin a \cos c}{\sin c \cos a \cos b} = \frac{\sin a}{\sin c},$$

где је употребљен резултат из примера 2.3.50. То је прва од тражених формула. Због симетрије имамо и

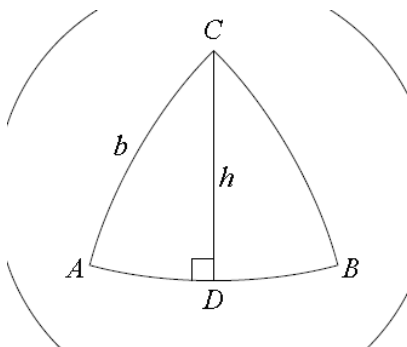
$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin c}.$$

То је друга од наведених формула и последња коју смо требали доказати. \square

Пример 2.3.52. Дат је произвољан сферни троугао ABC са страницама a, b наспрам темена A, B , на слици 2.30. Кодистећи прве две формуле из примера 2.3.51 доказати синусну теорему:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}.$$

ТРИГОНОМЕТРИЈА



Slika 2.30: Сферни троугао.

Доказ. Као на слици слици 2.30, повући нормалу $CD \perp AB$. Помоћу примера 2.3.51 налазимо:

$$\sin B \sin a = \sin h = \sin A \sin b,$$

делимо са $\sin A \sin B$ и добијамо тражену једнакост. □

Пример 2.3.53. Користећи пример 2.3.43, показати да за сферни троугао ABC са наспрамним странама abc важи:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} a \sec b \sin C}{\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a \cos C}.$$

Доказ. Имамо редом:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin a \sin C}{\sin c \cos A} = \frac{\sin a \sin C}{\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C} = \frac{\operatorname{tg} a \sec b \sin C}{\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a \cos C}.$$

□

Потсетимо се формула равне тригонометрије за трансформацију збира у производ тригонометријских функција и обрнуто, које ће нам бити потребне у даљњим примерима са сферним троугловима.

Пример 2.3.54. Доказати једнакости:

$$\begin{aligned} \sin(u+v) + \sin(u-v) &= 2 \sin u \cos v, & \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \\ \sin(u+v) - \sin(u-v) &= 2 \cos u \sin v, & \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}, \\ \cos(u+v) + \cos(u-v) &= 2 \cos u \cos v, & \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \\ \cos(u+v) - \cos(u-v) &= 2 \sin u \sin v, & \cos y - \cos x &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}. \end{aligned}$$

Упутство. Ови идентитети следе непосредно из основних адиционих формула (2.8) и релација $u = (x+y)/2$, $v = (x-y)/2$. □

Пример 2.3.55. Користећи претходни пример, доказати идентитет

$$\frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \operatorname{tg} \frac{x+y}{2}.$$

Упутство. Поделити прву једнакост са трећом, из претходног примера. □

ТРИГОНОМЕТРИЈА

У наставку изводимо формуле сферне тригонометрије за полууглове. Дат је сферни троугао ABC са наспрамним страницама abc . Из сферне косинусне теореме непосредно следи

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}. \quad (2.66)$$

Тиме и користећи полуобим $s = (a + b + c)/2$ налазимо:

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{A}{2} &= \frac{1 - \cos A}{2} = \frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{2 \sin b \sin c} = \frac{\cos(b - c) - \cos a}{2 \sin b \sin c}, \\ \sin^2 \frac{A}{2} &= \frac{\sin(s - b) \sin(s - c)}{\sin b \sin c}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Слично добијамо:

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{A}{2} &= \frac{1 + \cos A}{2} = \frac{\cos a - \cos b \cos c + \sin b \sin c}{2 \sin b \sin c} = \frac{\cos a - \cos(b + c)}{2 \sin a \sin c}, \\ \cos^2 \frac{A}{2} &= \frac{\sin s \sin(s - a)}{\sin b \sin c}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Из претходна два резултата и слично за углове B и C , следи:

$$\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} = \sin \frac{C}{2} \cdot \frac{\sin(s - c)}{\sin c}, \quad (2.69)$$

$$\sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} = \cos \frac{C}{2} \cdot \frac{\sin(s - b)}{\sin c}, \quad (2.70)$$

$$\cos \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} = \cos \frac{C}{2} \cdot \frac{\sin(s - a)}{\sin c}, \quad (2.71)$$

$$\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} = \sin \frac{C}{2} \cdot \frac{\sin s}{\sin c}. \quad (2.72)$$

Пример 2.3.56. Доказати идентитете:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} &= \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}, & \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} &= \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{c}{2}}, \\ \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} &= \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}, & \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} &= \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{c}{2}}. \end{aligned}$$

Доказ.

$$\begin{aligned} \cos \frac{A+B}{2} &= \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \sin \frac{C}{2} \cdot \frac{\sin s - \sin(s - c)}{\sin c} = \\ &= \sin \frac{C}{2} \cdot \frac{2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{c}{2}}{\sin c} = \sin \frac{C}{2} \cdot \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}. \\ \sin \frac{A+B}{2} &= \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \cos \frac{C}{2} \cdot \frac{\sin(s - b) + \sin(s - a)}{\sin c} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sin \frac{C}{2} \cdot \frac{2 \sin \frac{a+c}{2} \cos \frac{c}{2}}{\sin c} = \sin \frac{C}{2} \cdot \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{c}{2}}. \\
 \cos \frac{A-B}{2} &= \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \sin \frac{C}{2} \cdot \frac{\sin s + \sin(s-c)}{\sin c} = \\
 &= \sin \frac{C}{2} \cdot \frac{2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{c}{2}}{\sin c} = \sin \frac{C}{2} \cdot \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{c}{2}}. \\
 \sin \frac{A-B}{2} &= \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \cos \frac{C}{2} \cdot \frac{\sin(s-b) - \sin(s-a)}{\sin c} = \\
 &= \cos \frac{C}{2} \cdot \frac{2 \cos \frac{c}{2} \sin \frac{a-b}{2}}{\sin c} = \cos \frac{C}{2} \cdot \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{c}{2}}.
 \end{aligned}$$

□

Задатак 2.3.57. Доказати да за сферни троугао ABC са наспрамним страницама a, b, c важе следеће једнакости¹⁴

$$\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2}}, \quad (2.73)$$

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{a}{2} - \operatorname{tg} \frac{b}{2}}{\operatorname{tg} \frac{a}{2} + \operatorname{tg} \frac{b}{2}}. \quad (2.74)$$

Задатак 2.3.58. Доказати да за сферни троугао ABC са наспрамним страницама a, b, c важи једнакост¹⁵:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg} \frac{a+b}{2}}. \quad (2.75)$$

Ово је сферна тангенсна теорема. Помоћу ова два задатка, са $C = \pi/2$, за сферни ексцес E из (2.35) и из теореме 2.2.1, показати да је тачна формула:

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{A+B}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} - 1}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} + 1} = \operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2}. \quad (2.76)$$

¹⁴ Упутство: користити претходни и пример 2.3.56.

¹⁵ Упутство: поделити претходне две једнакости.

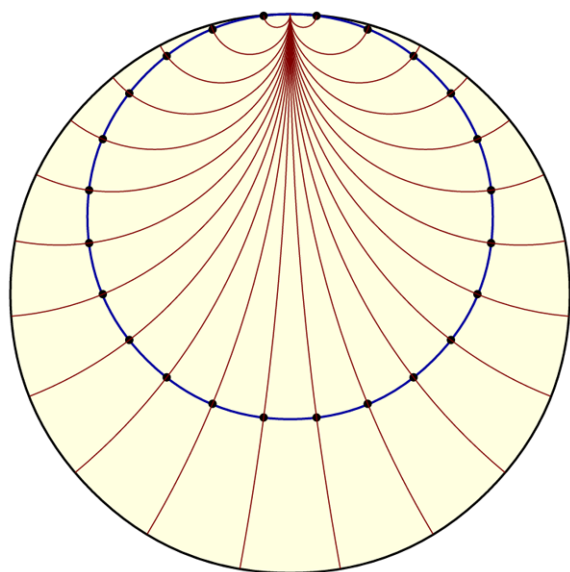
Glava 3

Хиперболна тригонометрија

Функције хиперболног синуса и косинуса, $\text{sh}(x)$ и $\text{ch}(x)$, у употребу је увео Винченцо Рикати¹, а ту теорију је даље развијао Ламберт², користећи ознаке $\sinh(x)$ $\cosh(x)$. Они су разматрали хиперболне функције:

$$\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad e = 2,71828\dots, \quad (3.1)$$

за потребе алгебре и анализе. Тангенс хиперболни $\tanh x$ је количник синуса и косинуса, као у равној тригонометрији.



Slika 3.1: Троугао и дуал.

Са друге стране, хиперболне функције су се развијале због не-Еуклидске геометрије. Тражећи еуклидску равну, Лобачевски³ је у својој нееуклидској геометрији пронашао орисферу (грч. *hóros* - граница).

Орисфера је површ у простору Лобачевског, ортогонална на паралелне праве, које полазе из неке тачке у бесконачности. У две димензије, као на слици 3.1, орисфера су кружница окомита на бесконачно много хипербола које извиру из неке тачке у бесконачности, а које су паралеле у равни Лобачевског.

Обратно, еуклидски простор има псеудосферу, површ на којој важи геометрија Лобачевског. Отривши једне геометрије у другима, он је доказао њихове једнаке непротивречности, али и пренос тригонометрија. Обична тригонометрија орисфере у простору Лобачевског постаје хиперболна тригонометрија и обратно.

¹ *Vincenzo Riccati*, 1707-1775, италијански математичар.

² *Johann Heinrich Lambert*, 1728-1777. *Histoire de l'académie Royale des sciences et des belles-lettres de Berlin*, том. XXIV, стр. 327 (1768)

³ *Лобачевский Николай Иванович*, 1793 - 1856, руски математичар.

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Веза између аналитичке и геометријске дефиниције хиперболних функција су пре свега параметарске једначине (једне гране) хиперболе:

$$x = a \operatorname{ch} t, \quad y = b \operatorname{sh} t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

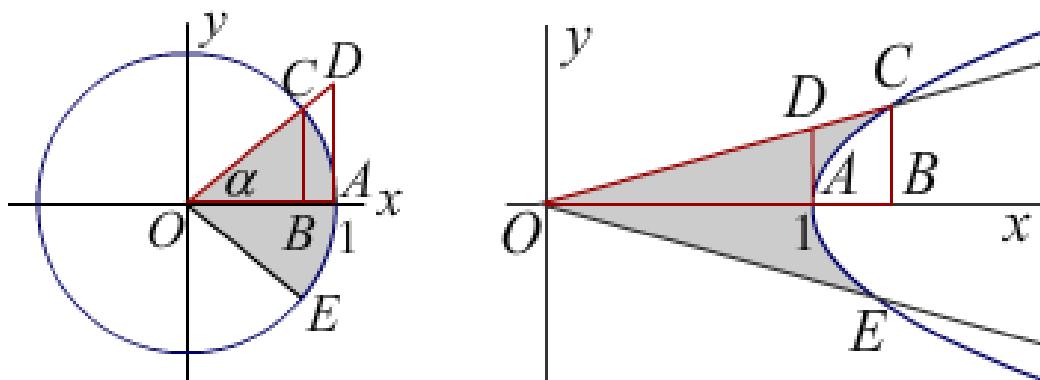
али су тек развојем комплексних бројева те везе постале значајније и комплексније.

3.1 Аналитичке дефиниције

Као што знамо из аналитичке геометрије, в. Конусне пресеке [12], елипсе и хиперболе су криве другог реда:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b \in \mathbb{R}^+, \quad (3.3)$$

где предзнак плус стоји за елипсу, а минус за хиперболу. Посебан случај елипсе је кружница ($a = b$), а посебан случај кружнице је тригонометријска, јединична кружница. Слично, имамо јединичну хиперболу ($a = b = 1$) која може послужити за геометријско дефинисање хиперболних функција.



Slika 3.2: Тригонометријска кружница и хипербола.

На слици 3.2 лево, је тригонометријска кружница $x^2 + y^2 = 1$ полупречника $r = 1$ са шрафираним централним углом $\angle EOC = 2\alpha$. Шрафирани исечак круга има површину $\Pi_k(EOC) = \frac{1}{2}r^2 \cdot 2\alpha = \alpha$ са којом дефинишемо функције:

$$\sin \alpha = \overline{BC}, \quad \cos \alpha = \overline{OB}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \overline{AD}. \quad (3.4)$$

То су функције синус, косинус и тангенс које смо детаљно разматрали.

На слици 3.2 десно је истострана јединична хипербола $x^2 - y^2 = 1$. Праве OC и OE имају аналитичке једначине $y = \pm kx$, $k > 0$, па су координате тачака $C(C_x, C_y)$ и $D(D_x, D_y)$, редом:

$$C_x = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}, \quad C_y = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}, \quad D_x = 1, \quad D_y = k. \quad (3.5)$$

Површина половине шрафираног дела EOC је:

$$\frac{1}{2}\Pi_h(EOC) = \int_0^A kx \, dx + \int_A^B (kx - \sqrt{x^2 - 1}) \, dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= kx^2 \Big|_0^1 + \left[kx^2 - x\sqrt{x^2 - 1} + \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \right]_1^{C_x} \\
 &= \frac{k}{1 - k^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} \sqrt{\frac{1}{1 - k^2} - 1} + \ln \left(\frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} + \sqrt{\frac{1}{1 - k^2} - 1} \right), \\
 &\quad \frac{1}{2} \Pi_h = \ln \sqrt{\frac{1 + k}{1 - k}}.
 \end{aligned}$$

Означимо ли и ову површину са $\frac{1}{2} \Pi_h = \alpha$, добијамо:

$$\alpha = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + k}{1 - k}, \quad k = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}}. \quad (3.6)$$

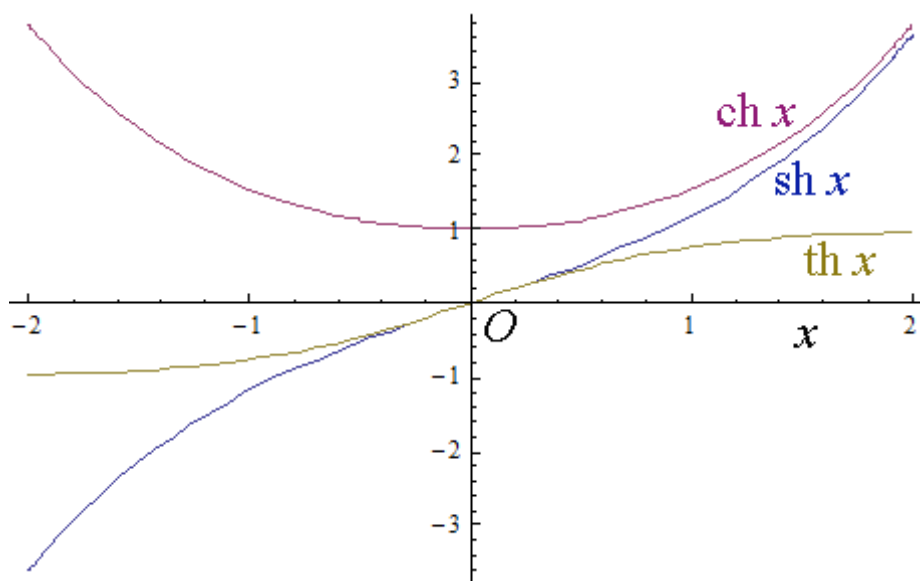
Сада лако налазимо дужине на датој слици десно:

$$\overline{BC} = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}, \quad \overline{OB} = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}, \quad \overline{AD} = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}}. \quad (3.7)$$

Називамо их аналогно (1.104) са

$$\operatorname{sh} \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}, \quad \operatorname{ch} \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}, \quad \operatorname{th} \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}}, \quad (3.8)$$

а то су синус, косинус и тангенс хиперболни. Њихови графови у Декартовом систему Oxy су на слици 3.3.

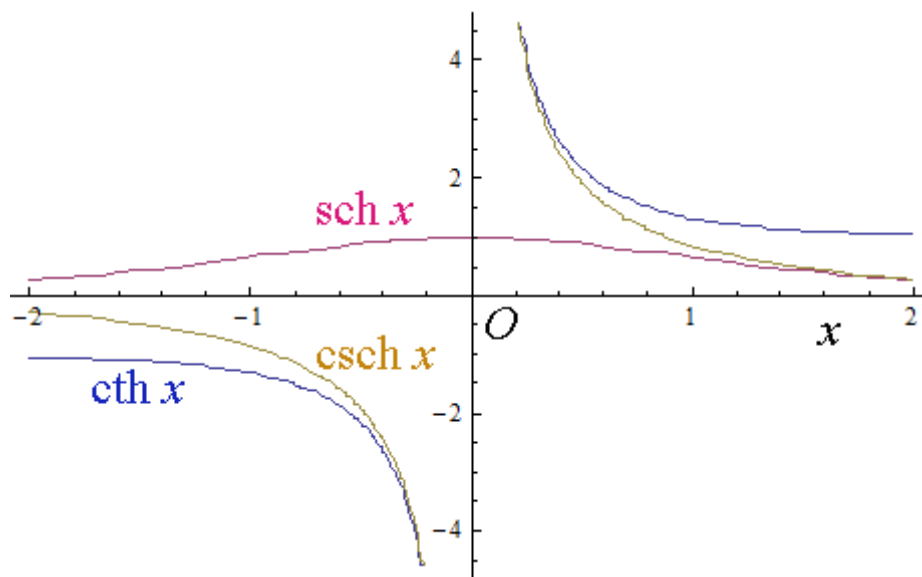


Slika 3.3: Синус, косинус и тангенс хиперболни.

Хиперболни котангенс, секанс и косеканс одређују се као реципрочне величине, редом:

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x}, \quad \operatorname{sch} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x}, \quad (3.9)$$

слично као у равној тригонометрији. Њихови графови су на слици 3.4.



Slika 3.4: Хиперболни котангенс, секанс и косеканс.

За хиперболне функције вреде основни тригонометријски идентитети

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1, & \operatorname{sch}^2 x + \operatorname{th}^2 x &= 1, \\ \operatorname{cth}^2 x - \operatorname{csch}^2 x &= 1, & \operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x &= 1, \\ \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} &= \operatorname{th} x, & \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} &= \operatorname{cth} x. \end{aligned} \quad (3.10)$$

који се лако доказују помоћу (1.108) и (1.109).

На западу се чешће користе ознаке:

$$\begin{cases} \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, & \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, & \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}, \\ \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, & \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}. \end{cases} \quad (3.11)$$

То су те исте хиперболне функције синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс и косеканс.

Пример 3.1.1. На слици 3.5 лево, показати да су означени синус и косинус хиперболни дубро дефинисани сенченом површином.

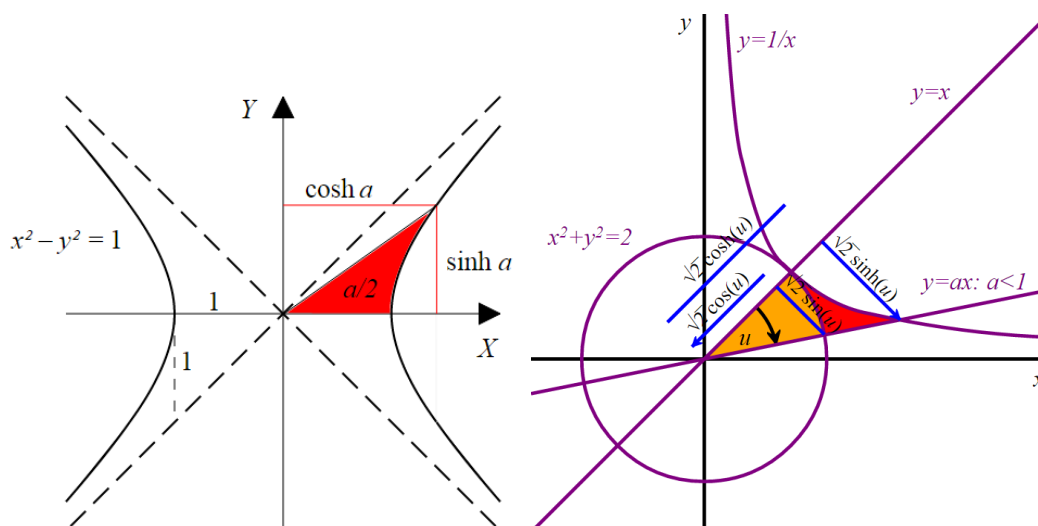
Решење. Површина хипербног угла је (1.106), односно:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \cdot 2\alpha = \frac{1}{2} \ln e^{2\alpha} = \frac{1}{2} \ln \frac{2e^\alpha}{2e^{-\alpha}} = \frac{1}{2} \ln \frac{e^\alpha + e^{-\alpha} + e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha} - (e^\alpha - e^{-\alpha})} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}}}{1 - \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+k}{1-k}, \quad k = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}}. \end{aligned}$$

Ту је $y = kx$ једначина праве, горње границе сенченог угла, а $y = \sqrt{x^2 - 1}$ део јединичне хиперболе који је у I квадранту.

Апсциса пресека праве и хиперболе је решење једначине $kx = \sqrt{x^2 - 1}$. Добијамо:

$$x = \sqrt{\frac{1}{1-k^2}} = \sqrt{\frac{(e^\alpha + e^{-\alpha})^2}{(e^\alpha + e^{-\alpha})^2 - (e^\alpha - e^{-\alpha})^2}} = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2},$$



Slika 3.5: Хиперболне функције.

а то је косинус хиперболни, као што је означено на датој слици.

Ордината пресека праве и хиперболе је:

$$y = kx = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}} \cdot \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}.$$

То је синус хиперболни, као што је и означено на слици 3.5 лево. □

На слици 3.5 десно упоредно су приказане⁴ тригонометријска, јединична кружница и хипербола $y = 1/x$.

Инверзним хиперболним функцијама, *area* функцијама, називамо величине одређене једнакостима:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{area синус:} & y = \text{Ar sh } x, \quad \text{ако је } x = \text{sh } y, \\ \text{area косинус:} & y = \text{Ar ch } x, \quad \text{ако је } x = \text{ch } y, \\ \text{area тангенс:} & y = \text{Ar th } x, \quad \text{ако је } x = \text{th } y, \\ \text{area котангенс:} & y = \text{Ar cth } x, \quad \text{ако је } x = \text{cth } y. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

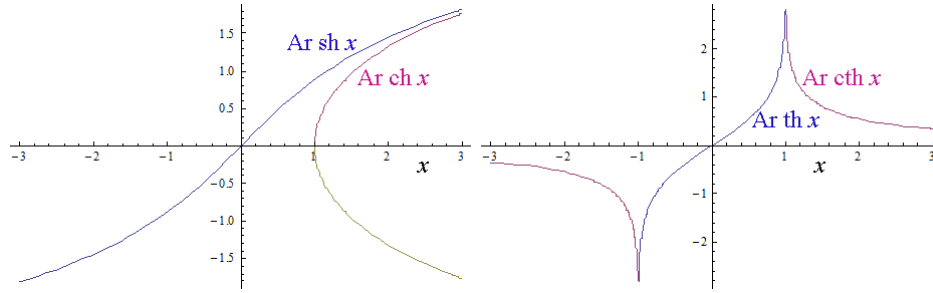
Назив долази од речи *area* (површина), јер представљају површине хиперболног сектора, као на слици 3.2 десно. Графови *area* функција су на слици 3.6

У складу са формулама (2.108), ове функције можемо изразити помоћу природних логаритама:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{area синус:} & \text{Ar sh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}, \\ \text{area косинус:} & \text{Ar ch } x = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1, \\ \text{area тангенс:} & \text{Ar th } x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1, \\ \text{area котангенс:} & \text{Ar cth } x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

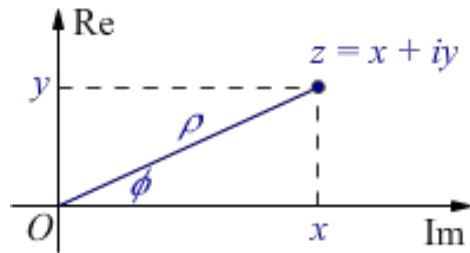
⁴Hyperbolic function: http://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_function

ТРИГОНОМЕТРИЈА



Slika 3.6: Ареа хиперболне функције.

Са реалне равни Oxy прелазимо на комплексну сменом $y \rightarrow iy$, где је $i = \sqrt{-1}$ имагинарна јединица. Тада се Декартове осе називају *реална* и *имагинарна* оса комплексне равни \mathbb{C} , у којој је комплексан број $z = x + iy$ представљен тачком са координатама $\Re(z) = x$, $\Im(z) = y$, као на слици 3.7.



Интензитет или *модул* $|z|$ комплексног броја, и *аргумент* $\arg(z)$ су реалани бројеви, редом:

Slika 3.7: Комплексна раван \mathbb{C} .

$$\begin{cases} |z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \arg(z) = \phi = \arctg \frac{y}{x}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Обратно је:

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi. \quad (3.15)$$

Према томе, произовљан комплексан број $z = x + iy$ можемо писати у облику

$$z = \rho(\cos \phi + i \sin \phi). \quad (3.16)$$

На јединичној, тригонометријској кружници је $|z| = 1$ и $z = \cos \phi + i \sin \phi$.

Као што знамо из математике, ротација Декартове равни Oxy за угао φ у раван $O\bar{x}\bar{y}$ око заједничког исходишта O , дата је трансформацијама:

$$\begin{cases} x = \bar{x} \cos \varphi - \bar{y} \sin \varphi, \\ y = \bar{x} \sin \varphi + \bar{y} \cos \varphi. \end{cases} \quad (3.17)$$

Које се могу писати и матрично:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Иста ротација се дешава са комплексним бројем z када га množимо комплексним бројем $z_1 = \cos \varphi + i \sin \varphi$ јединичног модула. Наиме, израчунавамо:

$$\begin{aligned} z \cdot z_1 &= [\rho(\cos \phi + i \sin \phi)] \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= \rho[(\cos \phi \cos \varphi - \sin \phi \sin \varphi) + i(\cos \phi \sin \varphi + \sin \phi \cos \varphi)] \\ &= \rho[\cos(\phi + \varphi) + i \sin(\phi + \varphi)]. \end{aligned}$$

То значи да множење тачке z у комплексној равни \mathbb{C} са јединичним комплексним бројем z_1 представља ротацију тачке z око исходишта у комплексној равни за угао $\varphi = \arg(z_1)$. Вишеструка, n -тострука, ротација истог јединичног вектора износи z_1^n , односно:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi. \quad (3.19)$$

То је познати Моавров⁵ образац.

Преласком на комплексну раван, јединична кружница $x^2 + y^2 = 1$ прелази у јединичну хиперболу $x^2 - y^2 = 1$. Отуда, сваку формулу која међусобно повезује хиперболне функције аргумената x или ax (али не и $ax + b$) можемо добити из одговарајуће формуле која повезује тригонометријске функције аргумента α , просто заменом $\sin \alpha$ са $i \operatorname{sh} x$ и $\cos \alpha$ са $\operatorname{ch} x$.

Тако добијамо трансформације:

$$\begin{cases} \sin z = -i \operatorname{sh} iz, & \operatorname{sh} z = -i \sin iz, \\ \cos z = \operatorname{ch} iz, & \operatorname{ch} z = \cos iz, \\ \operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} iz, & \operatorname{th} iz = -i \operatorname{tg} iz, \\ \operatorname{ctg} z = i \operatorname{cth} iz, & \operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz. \end{cases} \quad (3.20)$$

На исти начин, лако прелазимо са одговарајућих идентитета равне тригонометрије на идентитете (2.110) хиперболних функција, и обратно.

3.2 Простор-време

Када имамо два инерцијална система координата K и K' у узајамном кретању брзином v дуж њихових апсциса Ox односно $O'x'$, тада им можемо придружити временску осу $O\tau$, где је $\tau = ict$, а $c = 3 \cdot 10^8$ m/s је брзина светлости у вакууму. Тако се дефинише простор-време Минковског⁶.

Даље посматрамо апстраховано, само линије кретања система и временске осе као посебне системе $Ox\tau$ и $O'x'\tau'$, односно S и S' . У књизи [14] показано је да ротација равни $Ox\tau \rightarrow O'x'\tau'$ за φ , односно:

$$\begin{pmatrix} x \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ \tau' \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

представља заправо Лоренцове трансформације:

$$\begin{pmatrix} x \\ \tau \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ \tau' \end{pmatrix}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3.22)$$

Овде је брзина v виђена из система S . Обратно, брзина система S виђена из система S' је $-v$, па обратне трансформације налазимо заменом β са $-\beta$.

Наиме, ставимо $\varphi = i\psi$ па у складу са (2.120), из (2.121) добијамо:

$$\begin{pmatrix} x \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \psi & i \operatorname{sh} \psi \\ -i \operatorname{sh} \psi & \operatorname{ch} \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ \tau' \end{pmatrix},$$

⁵ *Abraham de Moivre*, 1667 - 1754, француски математичар.

⁶ *Hermann Minkowski*, 1864 - 1909, њемачки математичар, рођени Рус

односно:

$$\begin{cases} x = x' \operatorname{ch} \psi + i\tau' \operatorname{sh} \psi, \\ \tau = -ix' \operatorname{sh} \psi + \tau' \operatorname{ch} \psi. \end{cases}$$

Због $\tau = ict$ и $\tau' = ict'$ имамо даље:

$$\begin{cases} x = x' \operatorname{ch} \psi - ct\tau' \operatorname{sh} \psi, \\ ct = -x' \operatorname{sh} \psi + ct' \operatorname{ch} \psi. \end{cases}$$

односно, у матричном облику:

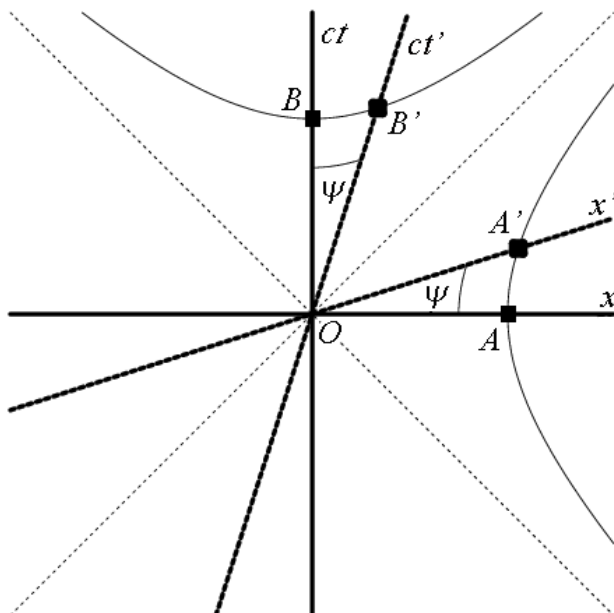
$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \psi & -\operatorname{sh} \psi \\ -\operatorname{sh} \psi & \operatorname{ch} \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

где је $\operatorname{th} \psi = v/c = -i\beta = \sqrt{1/\gamma^2 - 1}$. Обратне трансформације овима су:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \psi & \operatorname{sh} \psi \\ \operatorname{sh} \psi & \operatorname{ch} \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}, \quad \operatorname{th} \psi = \frac{v}{c}, \quad (3.24)$$

или краће $\vec{r}' = \hat{H}\vec{r}$, где је \hat{H} матрица хиперболне ротације, а $\vec{r} \rightarrow \vec{r}'$ вектор положаја дате тачке пре и након ротације. У обратним трансформацијама се брзина посматра из система S' , па због $v \rightarrow -v$ имамо $\psi \rightarrow -\psi$, а вектори положаја дате тачке замењују места у једначини.

Пример 3.2.1. На слици 3.8 је приказана хиперболичка ротација за угао ψ . На координатним осама система S дате су тачке $A(r, 0)$ и $B(0, r)$ једнако удаљене од исходишта. Наћи њихове координате након ротације.



Slika 3.8: Хиперболна ротација.

Решење. Из (1.124) следи:

$$\vec{A}' = \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch } \psi & \text{sh } \psi \\ \text{sh } \psi & \text{ch } \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \text{ch } \psi \\ r \text{sh } \psi \end{pmatrix},$$

$$\vec{B}' = \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch } \psi & \text{sh } \psi \\ \text{sh } \psi & \text{ch } \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \text{sh } \psi \\ r \text{ch } \psi \end{pmatrix},$$

односно $A'(r \text{ch } \psi, r \text{sh } \psi)$ и $B'(r \text{sh } \psi, r \text{ch } \psi)$. □

Пример 3.2.2. Показати да је

$$x^2 - c^2 t^2 = (x')^2 - c^2 (t')^2,$$

за произвољну тачку након ротације (1.123). То је релативистичка инваријантност интервала $s = \sqrt{x^2 - c^2 t^2}$ инерцијалних система који се узајамно крећу константном брзином.

Решење. Израчунавамо редом:

$$\begin{aligned} x^2 - (ct)^2 &= (x' \text{ch } \psi - ct' \text{sh } \psi)^2 - (-x' \text{sh } \psi + ct' \text{ch } \psi)^2 = \\ &= (x')^2 (\text{ch}^2 \psi - \text{sh}^2 \psi) + (ct')^2 (\text{sh}^2 \psi - \text{ch}^2 \psi) = (x')^2 - (ct')^2. \end{aligned}$$

□

Исто као у наведеном примеру, за инфинитезималне интервале $ds^2 = dx^2 + d\tau^2$ добијамо

$$dx^2 + (icdt)^2 = (dx')^2 + (icdt')^2, \quad (3.25)$$

односно $ds = ds'$. Наиме, системи S и S' су хомогени и инерцијални, крећу се узајамно једноликом брзином, па су $\text{ch } \psi$ и $\text{sh } \psi$ константе. Након диференцирања трансформација (2.123) добијамо трансформације диференцијала

$$\begin{pmatrix} dx \\ cdt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch } \psi & -\text{sh } \psi \\ -\text{sh } \psi & \text{ch } \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx' \\ cdt' \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

а отуда (2.125).

Међутим, за разлику од равних ротација (2.118), када се не мењају јединице дужина, овде имамо контракцију дужине и дилатацију времена. На страни 28. књиге [?], изведене су формуле (2.52) и (2.53):

$$\Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3.27)$$

где су Δx_0 и Δt_0 дужина и протекло време у мировању, виђени као Δx и Δt при кретању брзином v .

У гравитационом пољу имамо системе у слободном паду које се у (бесконечно) малим деловима простор-времена понашају као инерцијални. Зато што су силе, убрзања и брзине, вектори, у свакој тачки простор-времена је могуће дефинисати правац силе (ξ -осу) која са временском осом ($\tau = ict$) дефинише “ротацију” система $O\xi\tau$ а која представља силу у тој тачки.

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Са том идејом су у књизи [?] на страни 78. и 79. израчунате трансформације координата за произвољан део простора, такве да за инфинитезималне интервале опет важи (2.125), мада се ψ мења од тачке до тачке. Постављајући услов

$$\frac{d\bar{\xi}^2}{1-\beta^2} + (1-\beta^2)d\bar{\tau}^2 = d\xi^2 + d\tau^2, \quad (3.28)$$

добиају се трансформације координата

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\xi}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\kappa}{\sqrt{1-\beta^2}}d\xi + \frac{\sqrt{1-\beta^2-\kappa^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}d\tau, & \kappa \in \mathbb{R} \\ \sqrt{1-\beta^2}d\bar{\tau} = -\frac{\sqrt{1-\beta^2-\kappa^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}d\xi + \frac{\kappa}{\sqrt{1-\beta^2}}d\tau. \end{cases} \quad (3.29)$$

Означимо са S_0 систем који се креће инерцијално али је у датом тренутку у мировању у односу на S . Аналогно (2.127) налазимо:

$$d\bar{\xi} = d\bar{\xi}_0\sqrt{1-\beta^2}, \quad d\bar{\tau} = \frac{d\bar{\tau}_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (3.30)$$

То су контракција инфинитезималне дужине $d\xi$ у правцу гравитационе силе и дилатација инфинитезималног времена $d\tau$ зависна од гравитационог поља. Са овим променама, дефинишемо нове координате:

$$\begin{cases} d\bar{\xi}_0 = \frac{\kappa}{\sqrt{1-\beta^2}}d\xi + \frac{\sqrt{1-\beta^2-\kappa^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}d\tau, \\ d\bar{\tau}_0 = -\frac{\sqrt{1-\beta^2-\kappa^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}d\xi + \frac{\kappa}{\sqrt{1-\beta^2}}d\tau. \end{cases} \quad (3.31)$$

за које више не важи (1.128), већ:

$$\begin{cases} d\bar{\xi}_0 = \cos\phi d\xi + \sin\phi d\tau, \\ d\bar{\tau}_0 = -\sin\phi d\xi + \cos\phi d\tau, \end{cases} \quad (3.32)$$

при чему је

$$\cos\phi = \frac{\kappa}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \sin\phi = \frac{\sqrt{1-\beta^2-\kappa^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Трансформације (2.132) јесу неке ротације (равни простор-времена), али оне више нису једноставне Лоренцове трансформације.

Пре свега, угао ротације $\phi = \phi(x, y, z, ict)$ је функција положаја у датом гравитационом пољу, која се мења зависно од гравитационог потенцијала, дефинисаног функцијом β , и још једним непознатим параметром κ . На странама 51. до 53. исте књиге, примећено је да се у физичком простору који ротира не могу синхронизовати сатови, те је помоћу Урисонове дефиниције димензије доказано да он мора имати више од четири димензије. За разлику од нових димензија простора (рецимо у теорији струна), овде се мисли на нове димензије времена. Тај параметар κ могао би дефинисати “бочни отклон” простор-времена са четири димензије унутар виших димензија.

3.2.1 Вежбе

Задатак 3.2.3. Проверите идентитете за хиперболни синус и косинус:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}, & \operatorname{ch} x &= \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}, \\ \operatorname{sh} x &= \frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}, & \operatorname{ch} x &= \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}, \\ \operatorname{sh} x &= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}}, & \operatorname{ch} x &= \frac{\operatorname{cth} x}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}}, \\ \operatorname{sh} x &= \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sch}^2 x}}{\operatorname{sch} x}, & \operatorname{ch} x &= \frac{1}{\operatorname{sch} x}, \\ \operatorname{sh} x &= \frac{1}{\operatorname{csch} x}, & \operatorname{ch} x &= \frac{\sqrt{1 + \operatorname{csch}^2 x}}{\operatorname{csch} x}. \end{aligned}$$

Задатак 3.2.4. Проверити идентитете за хиперболни тангенс и котангенс:

$$\begin{aligned} \operatorname{th} x &= \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}}, & \operatorname{cth} x &= \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}}{\operatorname{sh} x}, \\ \operatorname{th} x &= \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}{\operatorname{ch} x}, & \operatorname{cth} x &= \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}, \\ \operatorname{th} x &= \frac{1}{\operatorname{cth} x}, & \operatorname{cth} x &= \frac{1}{\operatorname{th} x}, \\ \operatorname{th} x &= \sqrt{1 - \operatorname{sch}^2 x}, & \operatorname{cth} x &= \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sch}^2 x}}, \\ \operatorname{th} x &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{csch}^2 x}}, & \operatorname{cth} x &= \sqrt{1 + \operatorname{csch}^2 x}. \end{aligned}$$

Задатак 3.2.5. Множењем проверити идентитете:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(x \pm y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, & \operatorname{ch}(x \pm y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \\ \operatorname{th} x &= \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}, & \operatorname{cth} x &= \frac{1 \pm \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y}. \end{aligned}$$

Задатак 3.2.6. Доказати формуле за двоструке аргументе:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} 2x &= 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, & \operatorname{ch} 2x &= \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x, \\ \operatorname{th} 2x &= \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}, & \operatorname{cth} 2x &= \frac{1 + \operatorname{cth}^2 x}{2 \operatorname{cth} x}. \end{aligned}$$

Задатак 3.2.7. Индукцијом доказати Моајрову формулу:

$$(\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx \pm \operatorname{sh} nx.$$

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Задатак 3.2.8. Доказати идентитете за половичне аргументе:

$$\operatorname{sh} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}, \quad \operatorname{ch} x = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}.$$

Знак синуса је плус за $x > 0$, а минус за $x < 0$.

Задатак 3.2.9. Доказати идентитете тангенса и котангенса половина:

$$\operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1},$$

$$\operatorname{cth} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{sh} x}.$$

Задатак 3.2.10. Доказати идентитете за претварање збира у производ:

$$\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x \pm y}{2} \operatorname{ch} \frac{x \mp y}{2},$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x + y}{2} \operatorname{ch} \frac{x - y}{2},$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x + y}{2} \operatorname{sh} \frac{x - y}{2}.$$

Задатак 3.2.11. Доказати идентитет:

$$\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y}.$$

Задатак 3.2.12. Проверити тачност једнакости за арка функције (на месту \pm узети плус за $x > 0$, а минус за $x < 0$):

$$\operatorname{Ar} \operatorname{sh} x = \pm \operatorname{Ar} \operatorname{ch} \sqrt{x^2 + 1} = \operatorname{Ar} \operatorname{th} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \operatorname{Ar} \operatorname{cth} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x},$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{ch} x = \pm \operatorname{Ar} \operatorname{sh} \sqrt{x^2 - 1} = \pm \operatorname{Ar} \operatorname{th} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \pm \operatorname{Ar} \operatorname{cth} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{th} x = \operatorname{Ar} \operatorname{sh} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \pm \operatorname{Ar} \operatorname{ch} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{Ar} \operatorname{cth} \frac{1}{x},$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{cth} x = \operatorname{Ar} \operatorname{sh} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \pm \operatorname{Ar} \operatorname{ch} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{Ar} \operatorname{th} \frac{1}{x}.$$

Задатак 3.2.13. Проверити следеће релације међу инверзним хиперболним функцијама:

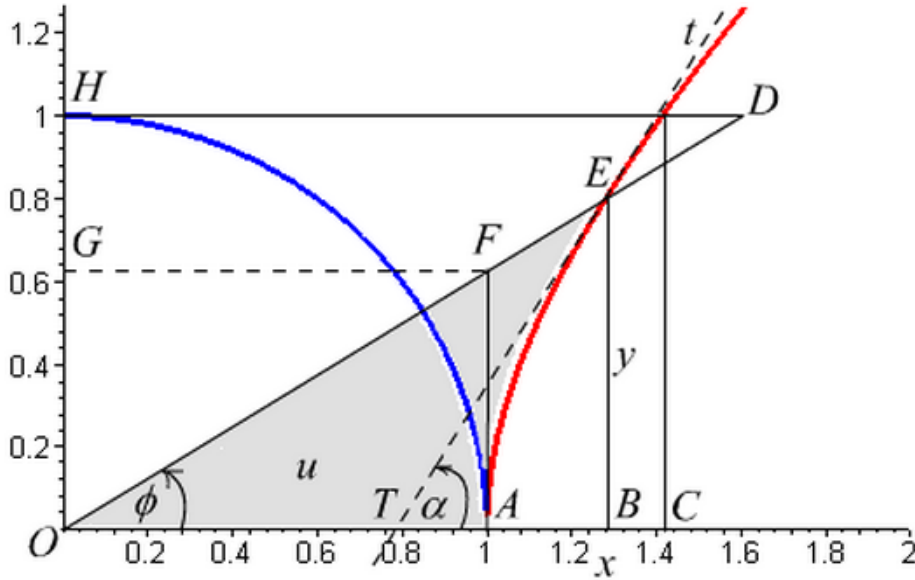
$$\operatorname{Ar} \operatorname{sh} x \pm \operatorname{Ar} \operatorname{sh} y = \operatorname{Ar} \operatorname{sh} (x\sqrt{1 + y^2} \pm y\sqrt{1 + x^2}),$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{ch} x \pm \operatorname{Ar} \operatorname{ch} y = \operatorname{Ar} \operatorname{ch} (xy \pm \sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)}),$$

$$\operatorname{Ar} \operatorname{th} x \pm \operatorname{Ar} \operatorname{th} y = \operatorname{Ar} \operatorname{th} \frac{x \pm y}{1 \pm xy}.$$

Задатак 3.2.14. На слици 3.9 види се тригонометријска кружница и хипербола $x^2 \pm y^2 = 1$. Тачка $E(x, y)$ се налази на пресеку хиперболе и праве OE . Сенчена површина износи $u/2$. Доказати⁷:

1. $2 \times \widehat{OAE} = u = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$,
2. $\text{ch } u = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u})$,
3. $\text{sh } u = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$.



Slika 3.9: Тригонометријска хипербола.

⁷в. Хиперболичне функције у //sr.wikipedia.org/wiki/

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Bibliografija

- [1] Каган, Вениамин Фёдорович: *Лобачевский*, Изд-во Академии наук СССР, Москва, 1944.
- [2] J.L. Heiberg (1883-1885): *Euclid's Elements of Geometry*, 13 books with English translation, by Richard Fitzpatrick⁸, First edition 2007.]
- [3] Victor Andreevich Toponogov: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, A Concise Guide, Department of Analysis and Geometry Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk-90, 630090, Russia, Birkhauser Boston, 2006.
- [4] The College Mathematical Journal, MAA, Washington, DC 20036, Vol. 43-45, y. 2012-2014.
- [5] Mathematics Magazine, MAA, Washington, D.C. 20036, Vol. 85-87, y. 2012-2014.
- [6] Joel Silverberg: *Napier's Rules of Circular Parts*, Dept of Mathematics, Roger Williams University Bristol, Rhode Island, USA, Presented⁹ on June 2, 2008.
- [7] Nathaniel Bowditch: *Application of Napier's Rules*, Solving the Cases of Right-Angled Spheric Trigonometry to Several Cases of Oblique-Angled Spheric Trigonometry, Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences, Vol. 3, No. 1 (1809), pp. 33-37
- [8] J. L. W. V. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inegalits entre les valeurs moyennes, Acta Mathematica 30 (1906), 175–193.
- [9] I. Todhunter: *Spherical Trigonometry*, For the use of colleges and schools, Fifth Edition, London, 1886.
- [10] George W. Evans: *Steradians and spherical excess*, Charleston High School, Boston, November 7, 1922.
- [11] Растко Вуковић: *Математика II*, скрипта за други разред Гимназије Бања Лука, 2011-14. Academia¹⁰
- [12] Rastko Vuković: *Konusni preseci*¹¹, Arhimed Banja Luka, 2014.

⁸Elements: <http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf>

⁹Napier's Rules: www.academia.edu/5870432/

¹⁰Математика II: www.academia.edu/8253676/

¹¹Konusni preseci: www.academia.edu/11163833/

ТРИГОНОМЕТРИЈА

- [13] Растко Вуковић: *ИНФОРМАЦИЈА ПЕРЦЕПЦИЈЕ* - слобода, демократија и физика¹², Економски институт Бања Лука, 2016.
- [14] Растко Вуковић: *ПРИРОДА ВРЕМЕНА* - информација материје¹³, Економски институт Бања Лука, 2017.
- [15] Mr Vene T. Bogoslavov: *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 2*, Dvadeset i treće izdanje, Zavod za udžbenike, Beograd 1998.

¹²Информација перцепције: <https://www.scribd.com/doc/315602275/>

¹³Природа времена: <https://www.scribd.com/document/330148833/>

Indeks

- Ахмесов папирус, 7
- Анасимандар, 11
- Аристарх, 77
- Еуклид, 7
- Гаус, 7
- Гринич меридијан, 85
- Херонов образац, 40
- Холдерова неједнакост, 66
- Јенсен, 59
- Јенсенова неједнакост, 59
- Јорданова неједнакост, 78
 - Коберово побољшање, 79
- Јулијерова формула, 90
- Јунгова неједнакост, 66
- Коши-Шварцова неједнакост, 65
- Ламберт, 131
- Лобачевски, 7, 131
- Лоренцове трансформације, 137
- Маклорен, 70
- Минковски, 137
- Минковскијева неједнакост, 68
- Моавров образац, 53, 137
- Непер, 83, 97
 - 10 сферних правила, 84
 - аналогије, 109
- Ојлер, 70
- Оросфера, 131
- Пашова аксиома, 15
- Питагорина теорема, 19, 37, 41, 100
- Прајсова неједнакост, 73
- Птоломеј, 77
- Птоломејева теорема, 36, 47
- Рикати, 131
- Риман, 7
- Талес, 11
- Тејлор, 70
- Теодосије из Битиније, 7
- Земља
 - полупречник, 115
- Жирард, 90
 - теорема, 115
- адиционе формуле, 44, 47
 - сферне, 106
- адитивност
 - синуса, 43
- апсолутна геометрија, 8
- ареа функције, 135
- азимут, 87
- диедар, 116
- дилатација времена, 139
- египатски троугао, 26
- елипса, 74
- функција
 - конвексна, 58
- геометријска конструкција, 27
- хексагон, 25
- хептагон, 27
- хиперболна ротација, 138
- хиперболне функције, 132
- хомотетија, 13, 19
- идентитет, 41
- инваријантност интервала, 139
- калота, 120
- кардијални синус, 69
- кардинални синус, 78
- комплементни углови, 20, 59
- контракција дужине, 139
- косеканс, 41
- косинус, 20
- косинус збира, 37
- косинусна теорема, 35, 100
 - сферна, 82, 99
- косинусоида, 58
- котангенс, 20, 41
- котангенсна теорема, 39
- круг, 12

ТРИГОНОМЕТРИЈА

- кружница, 12
- латитуда, 85
- линеарност, 17
- лонгитуда, 85
- миља, 87, 115
- невзис конструкција, 27
- октагон, 27
- ортови, 17
- основни углови, 21
- паралелност, 8
- парност-непарност, 44
- пентагон, 24
- пентаграм, 24
- пети постулат, 8
- поларни троугао, 92
- потенција тачке, 32
- површина, 15
- права, 7
- примитивни троугао, 93
- принцип дуалности, 104
- простор-време, 137
- просторни угао, 92, 116
- радијан, 30
- ректангуларна функција, 71
- решавање троугла, 34
- сагита, 25
- секанс, 41
- семилуна, 123
- сферни ексцес, 90, 119, 130
- сферни угао, 82
- синус, 20
- синусна теорема, 34
 - сферна, 83, 98, 101
- синусоида, 58
- сличност, 13, 19
- сребрени пресек, 28
- срдине низова, 60
- средња линија, 56
- стерадијан, 116
- суплементан, 18
- суплементан угао, 93, 105
- тангенс, 20
- тангенсна теорема, 39
- тангентан четвороугао, 18
- теорема
 - о сличности, 17
 - основна о сличности, 16
 - раздвајања, 15
- тетива, 12
- тетиван четвороугао, 18
- тетиве кружнице, 73
- тежинске средине, 62
- тежишница, 56
 - дужина, 57
- тежиште, 56
- тригонометрија кружница, 29
- троугао, 39, 47, 51
 - дуал, 124
 - површина, 40, 43, 55
 - семилунарни, 123
- угао, 12
- вектор положаја, 17
- верижни разломци, 28
- зглобна теорема, 116
- златни број, 25
- златни пресек, 25