ПРИЛОЗИ ТЕОРИЈИ ИНФОРМАЦИЈЕ II
Од фербруара до маја 2021.

Растко Вуковић
Економски институт Бања Лука (у припреми)
мај 2021.

Растко Вуковић:
Прилози теорији информације II – Од фебруара до маја 2021.
(Економски институт Бања Лука, у припреми, 2021)
https://www.scribd.com/document/493741600/Prilozi-II

First English translation:

Rastko Vuković:
Notes to Information Theory II – From February to May 2021.
(Economic Institute Banja Luka, in prepraration, 2021)
https://archive.org/details/notes-ii

Предговор

Куварице кувају по најбољим рецептима, суде нам факултетски образовани правници, професори математике држе наставу по програма написаним од најбољих, на начин који су прописали неки трећи. Шта може бити лоше у тежњи ка једном тако савршено уређеном свету – нису ме људи једном питали.

У том смислу теорија информације је разочаравајућа. Слобода коју желимо резултат је вишкова које имамо у односу на скуп неживих твари од које смо састављени, а сигурност којој се надамо ехо је њиховог начелног минимализма. Ми тежимо смирају бежећи од животности, приклањамо се сигурности против неизвесности, предајемо своје личне слободе организацији. То је закон инерције, принцип најмањег дејства, или ако хоћете начелна штедљивост информације. Они су само другачији изрази за вероватније догађање вероватнијих исхода.

Ето шта је лоше у тој горњој реченици – рекао бих са становишта теорије информације – што предобро уређен систем нужно застарева. Свет се неумољиво мења и одмиче му. Ако се све физичке појаве васионе састоје само од информација, а суштина ове је неизвесност, онда бежање у извесност на крају постаје лош посао.

Међутим, основна теза ове филозофије још увек само је хипотеза. Зато пишем локално а надам се глобално, па је и ова збирка прилога приватно-јавна. Захваљујем свима који су ми указивали на грешке, нарочито онима чије примедбе су ме инспирисале.

Аутор, фебруара 2021.

Садржај

Предговор 3
1. Репрезентативан узорак 7
2. Реалност физике 13
3. Специјална унитарна група 16
4. Велики прасак 21
5. Патуљасте галаксије 24
6. Таласи 28
7. Величина Космоса 37
8. Метрике Космоса 42
9. Метрике Космоса II 47
10. Количина опција 51
11. Количина опција II 56
12. Количина опција III 62
13. Препознавање облика 67
14. Еволуција демократије 71
15. Варијантни вектори 76
16. Варијантни вектори II 84
17. Квадратна форма 91
18. Варијантни вектори III 96
19. Природно право 103
20. Рефлексија простора 107
21. Коњугован простор 112
22. Ротације 117
23. Пројекције вектора 124
24. Разна питања 129
Поговор 132
Литература 133

1. Репрезентативан узорак

Растко вуковић[1], 30. јануар 2021.

За дати скуп случајних догађаја објашњавам најмањи подскуп који би му могао бити довољно репрезентативан. Расправљам укратко о вези између Проблема секретарице, Нормалне расподеле вероватноћа и Златног пресека, све троје у оквиру Теорије информације.

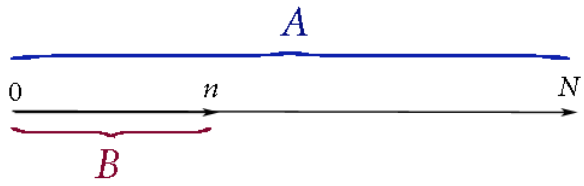
Избор секретарице

Крајем 1950-их и почетком 1960-их појавио се једноставан, делимично рекреативни задатак теорије вероватноће познат као проблем секретарице, или избора партнера, или мираза, који се пробијао око математичке заједнице. Он има одређену привлачност, лако се наводи и има упечатљиво решење[2].

Одмах су га преузели и развили одређени угледни пробабилисти и статистичари, међу њима Линдлеј (Lindley, 1961), Дикин (Dynkin, 1963), па Чов, Моригути, Робинс и Самуелс (Chow, Moriguti, Robbins, Samuels, 1964), затим Гилберт и Мостеллер (Gilbert, Mosteller, 1966). Од тада је проблем секретарице проширен и уопштен у много различитих праваца тако да се сада може рећи да је он област проучавања у оквиру математике-вероватноће-оптимизације. Из рада Фримана (Freeman, 1983) може се видети колико је то подручје постало опсежно и пространо; штавише, оно је наставило експоненцијални раст у године од када се његов текст појавио.

Проблем секретарице у свом најједноставнијем облику има следеће карактеристике. На располагању је једно радно место за секретара/секретарицу. Комисија зна број N подносилаца захтева и интервјуише их случајним редоследом, једног по једног, не знајући ко је следећи. Рангирање заинтересованих довољно је детаљно да не буде значајног дуплирања скора најбољих, а одлука о избору заснива се само на претходним резултатима. Након одбијања текућег кандидата касније га није могуће позивати, а након прихватања даља претрага се обуставља.

На слици лево је област A са редом у којем чекају испитаници испред просторије са комисијом



која их појединачно интервјуише, прегледа им пријаве и додељује бодове. У области B су прегледани кандидати све до n-тог, после којег се, претпостављамо, појавио један од најбољих, са победничким скором, који би од свих N могао имати највећи број бодова (приближно) и бити примљен на посао секретара/секретарице. Ово је идеализована ситуација где је B таман довољно велики део случајног низа A ($B \subset A$ и $n < N$) да може бити репрезентативан узорак.

[1] Гимназија Бања Лука, проф. математике
[2] в. [10]

Дакле, претпостављамо да на слици имамо приказано једно математичко очекивање[3]. У датом низу једнолико распоређених (иначе случајних) кандидата отприлике сваки n-ти је прихватљив за посао, тако да је $p = 1/n$ вероватноћа налажења „правог“. То значи да је $q = 1 - p$, односно

$$q = 1 - \frac{1}{n} \tag{1}$$

вероватноћа „погрешног“. У низу од n кандидата (област B слике) сви до следећег су „погрешни“, а вероватноћа таквог догађаја је q^n. Међутим

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}, \tag{2}$$

где је $e = 2{,}71828\ldots$ Ојлеров број, база природног логаритма. У случају великих низова ($N \to \infty$), када је бодовање кандидата веома детаљно ($n \to \infty$), тада $q^n \to 1/e \approx 0{,}37$, па подниз B чини око 37 одсто низа A.

Закључучак је да проблем избора најбоље секретарице можемо решити пропуштајући првих око 37 одсто кандидаткиња, просто да бисмо баждарили топ листу најбољих, уздајући се да је то довољно добар узорак. Затим ћемо прогласити најбољим избором прву следећу која има успостављени највећи број бодова, или више од тог (а ако се не појави ни једна таква, остаје нам последња).

Девијације

Теоретишемо са претпостављеним „универзумом неизвесности“ чије количине називамо информацијама. За њих важе закони одржања и штедљивости, па закључак да су слободне информације еквивалентне физичким дејствима, а затим да су жива бића физички системими који информација имају у вишку у односу на неживу супстанцу од које се састоје.

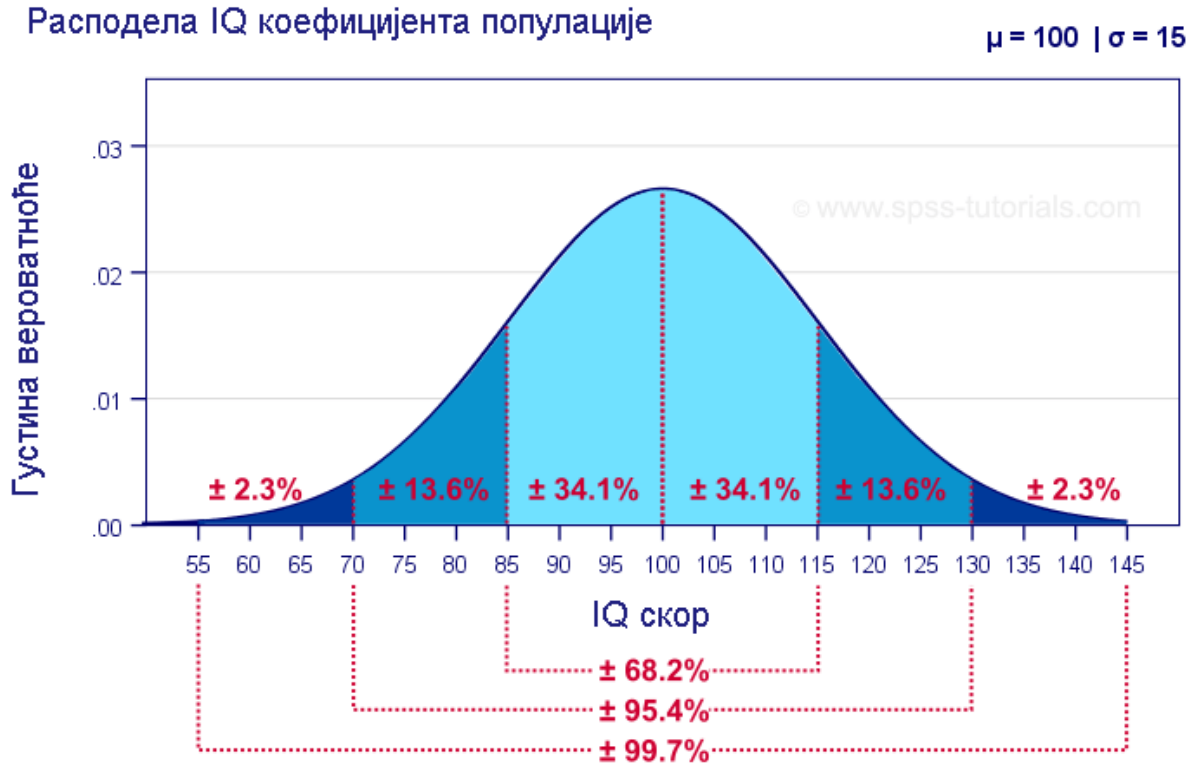
Сагласно принципима најмањег дејства и информације, жива бића својих вишкова настоје отарасити се, било непосредно у неживу околину, иначе већ попуњену и такође склону минимализму, било уграђујући их у организацију колектива којем припадају. У том смислу је друштво физичка појава негде између живих и неживих система. Отуда, на пример, сазнање да мрављa колонија може имати интелигентније деловање од својих појединих мрава постаје тема теорије информације.

Непредвидљивост је у основи света уопште тако да са ње више друштву расте способност деловања и бирања, при чему количина неизвесности коју меримо информацијом не расте само са повећањем броја опција већ и са њиховом неочекиваношћу. То води до питања оптималне мере уређености и виталности једне „заједнице живих“. Наиме, уређивање, дакле организовање и ограничавање, супротност је виталности, односно слободи и количини опција. У понашању самих јединки заједнице нагласак прелази на послушности и непослушности, уобичајености и неуобичајености, или пасивности и агресивности као супротним тенденцијама.

[3] Иначе се овај задатак у литератури другачије решава.

Што је веће расипање (девијација) у понашањима појединаца то су они мање организована заједница, а са друге стране, са порастом компактности опада њена способност бирања и друштво се у реченом смислу умртвљује. Из оваквог промишљања следи закључак да постоји неки оптимум виталности и ефикасности, ризика и сигурности. То је место где претходна „приближна трећина“ (2) опет постаје важна.

На следећој слици[4] видимо „Нормалну“ (Гаусову) расподелу коефицијента интелигенције (IQ) иначе произвољно узете популације. Тест интелигенције (IQ скор) подешава се тако да просечан резултат појединаца буде 100 бодова и да око трећине (34,1 одсто) свих имају „просечну интелигенцију“, од 85 до 115 бодова. Математичко очекивање (тзв. нормалне) расподеле бодова тако је $\mu = 100$, а стандардна девијација $\sigma = 15$. Две девијације (2σ) онда обухватају интервал бодова од 70 до 130, а три (3σ) скоро целокупну популацију. У томе видим сличност са решењем претходног проблема „избора секретарице“.



Када на првој слици (избор секретарице) област A сматрамо виталношћу неког живог бића или њихове организације, тада је подобласт B довољно репрезентативна да у њој очекујемо (статистички) представнике свих (од рутинских до екстремних) квалитета дате области. Друга слика (нормалне) расподеле интелигенције приближна је потврда (2), да ће се и девијације јављати у том обиму. При томе не улазимо у расправу око тога шта поједино друштво сматра „нормалним“ а шта „девијантним“ понашањем.

[4] Узета је са Фејсбука „SPSS tutorials“, али могла је бити и од многих других.

Исто можемо рећи и овако. Када пресложимо оне пожељне неочекиваности система A, које више подстичу његову виталност, онда ћемо добити да такви чине подсистем аналоган B и око трећину свих. Другим речима, оптимум „непослушних“ јединки „живог система“ је око трећине, а разлике су само у дефиницији „послушности“ у врсти и интензитету њихове агресивности. Отуда толика разноликост живих бића на Земљи.

Потврде (примене) ове процене можемо тражити у историјама најуспешнијих цивилизација, од око 30-ак познатих. Живот друштва као и цивилизације прекида се и насилно, ненадано, али ако посматрамо само оне које су имале среће да трају приметићемо да се свака састоји од неког успона, врхунца и пада. Њихови токови слични су животу кроз младост, зрелост и старост, са првим делом склонијем ризику, а другим у рутинама.

У случају цивилизација, пад почиње са већим само-ограничавањем. Тако су комунизми заостајали због превише регулисања, као и диктатуре, а на врхунцу Отоманске империје био је Сулејман Величанствени кога су називали „законодавцем“. Тешко је „на терену“ мерити „количине ограничења“ које је неко друштво себи наметало рецимо путем законодавства, религијских, обичајних или моралних норми, у односу на потенцијалне „количине слобода“, али из претходног можемо претпоставити да је у периду пада тај однос био већи од 2:1 у корист ограничавања.

Тачније, када однос укупне виталности неког „живог бића“ тежи да буде већи од стандардног, око 2:1 у корист „обичних“ против „необичних“, онда се тај однос поново успоставља у стандардном облику али са промењеном укупном виталношћу колектива и новом дефиницијом нормалности. У случају када заједница постаје уређенија, рецимо сигурнија и ефикаснија, њена виталност се смањује. Таква је у већем ризику да заостаје наспрам околине која би се наставила развијати.

У случају појаве екстремног лидера за којег кажемо да својом способношћу „покреће многе“, са становишта ове математичке извесности ради се такође о „подешавању заједнице“ којим се успоставља претходни стандард (приближно 2:1). Организација тада иде у већу или мању виталност зависно од лидерства. Није свака промена, била она еуфорична или спонтана, пут у бољитак или пропаст, као што то није ни сваки пут којем следбеници верују.

Наизглед сасвим другачију врсту примера можемо тражити у данас живим организмима на нашој планети. Грамзивости насупрот емпатије унутар појединих врста, такође стоје у отприлике истом односу 1:2. Са превише агресивних јединки разбила би се њихова организација, а са превише увиђавних они би постали лакши плен других. Разноврсност њихових хијерархија само потврђује тезе ове расправе.

Златни пресек

Целина наспрам дела односи се као тај део наспрам остатка. То је дефиниција „златног пресека“. Означимо ли величину целине са 1 а датог дела са φ имамо пропорцију $1:\varphi=\varphi:(1-\varphi)$, а отуда квадратна једначина

$$\varphi^2+\varphi-1=0, \tag{3}$$

чије решење

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}62 \tag{4}$$

називамо златним бројем. Друго решење $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}62$ је већи златни број и он је реципрочан са првим, $\varphi\Phi = 1$. Оно што нас овде такође занима је остатак, разлика целине и златне вредности која износи $1 - \varphi \approx 0{,}38$ што је приближно (2).

Леонардо да Винчи је цртао свог Витрувија[5] (1487) као човека са идеалним пропорцијама, о којима се касније спекулисало (Luca Pacioli, Divina proportione, 1509) са златним пресеком. Јохан Кеплер је написао да „слика мушкарца и жене потиче из божанске пропорције (златног пресека). По мом мишљењу, размножавање биљака и потомство животиња је у истом односу“.

Ерно Лендваји анализира музичка дела Беле Барток као да су заснована на два супротстављена система, оном златног пресека и акустичкој скали, иако други научници музике одбацују ту анализу. Француски композитор Ерик Сатие користио је златни пресек у неколико својих дела. Златни пресек је очигледан и у организацији одељака у музици Клода Дебисија (Reflets dans l'eau, 1905).

Геометријска анализа ранијих истраживања Велике џамије из Кајруана из 2004. године (670) открива примену златног пресека у већем делу дизајна. Претпоставља се да су златни пресек користили дизајнери трга Неше-Џахан (1629) и суседне џамије Лотфолах.

Швајцарски архитекта Ле Корбусиер, познат по доприносу модерном међународном стилу, своју филозофију дизајна усредсредио је на системе хармоније и пропорције. Његова вера у математички поредак универзума била је уско везана за златни пресек и Фибоначијев низ, које је описао као „очима очигледне и јасне у међусобним односима. А ти ритмови су у самом корену људске активности. Оне одзвањају у човеку органском неизбежношћу, оном фином неизбежношћу која узрокује трагање за Златним пресеком од стране деце, стараца, дивљака и учених“.

Психолог Адолф Зајсинг приметио је да се златни пресек појавио у филотаксији (распоред листова) и на основу тих образаца тврдио да је златни пресек универзални закон. Он је 1854. написао универзални ортогенетски закон „тежње за лепотом и целовитошћу у доменима природе и уметности“. Часопис Сајенс је 2010. објавио да је златни пресек присутан на атомској скали у магнетној резонанци спинова у кристалима кобалт ниобата. Међутим, неки тврде да су многе очигледне манифестације златног пресека у природи, посебно у погледу животињских димензија, измишљене.

Откуд толика „лепота у златном пресеку“? Са становишта наших претходних разматрања можемо тврдити да је стандардни однос (репрезентативног узорка и целине) уграђиван у наше емоције током еволуције ради лакшег препознавања система око нас и предвиђања њиховог понашања.

[5]Vitruvian Man, https://en.wikipedia.org/wiki/Vitruvian_Man

Отуда нешто што је у (приближном) односу златног пресека интуитивно осећамо као лепо, или складно. У поређењу са претходним (нормалном расподелом и проблемом секретарице) налазимо да је тај „склад“ заправо стање оптимума, равнотеже у којој се систем не нагиње, не тежи за неким револуцијама.

Закључак

Путем теорије информације налазимо да теорија вероватноће која стоји иза нормалне расподеле има своје још неке додатне (поред већ познатих) дубље корене у друштвеним и биолошким појавама, као што је у прилозима [2] то примећивано у свету физике. Она је и у позадини „лепоте“ коју виђамо у „златном пресеку“.

2. Реалност физике

3. фебруар 2021.

Лагани разговор о реалности и тачности тумачења физичке реалности. Пар њих ме пита приватно, а ја сам био слободан да саму тему изнесем јавно и одговоре пресложим.

Питање: Шта је то физичка реалност?

Одговор: Оно што наука сматра „реалношћу“ заправо је један променљиви скуп фикција, које се стално мењају, допуњавају и проглашавају ненаучним.

П: Озбиљно те питам. Читао сам да дефинишеш „реалним“ оно што може бити у физичкој интеракцији са нечим реалним. Важи ли опет да је то „фикција“?

О: Да, наравно, наше истине о физичкој реалности увек су непотпуне, а зато и лажне. У математичом смислу ако је нешто „мало нетачно“ оно „није тачно“.

П: Пишеш наводно тачни и нетачни, наглашавајући да је и то сумњиво?

О: Да, али да наставим. Узми на пример беспрекорну геометрију древних Грка и њихово тумачење наше галаксије „Млечни пут“ божицом Хером која је просула млеко. Прво је била математика, друго је физика. Човечанство се кроз историју увек трудило и труди да то двоје не споји, ма како се нама чинило да је физика (не само данас) математизована.

П: Како мислиш ово између геометрије и просипања млека?

О: Узајамну непокретност делова „Млечног пута“ геометрија би објаснила огромним удаљеностима, а онда и огромним величинама „капљица“ млека. Међутим, од древних дана до недавно чак и најпаметнији међу нама, али и многи сјајни познаваоци геометрије и математике која се даље развијала, предност су једнако давали физичкој лажи. Мрскима и отпадницима су сматрали своје (ретке) колеге који би им покушали срушити веру у неистине.

П: Има ли тога данас?

О: Па управо ти причам да је то једна непрестана прича. До почетка 20. века физика није веровала у молекуле, а онда одјеном прихватила је термодинамику, Болцмана (након његове смрти 1906), затим Први закон термодинамике (о одржању енергије), па Други закон термодинамике (о спонтаном преласку топлоте са тела више на околину ниже температуре), да би полако сва хемија, биологија, па и медицина постајале ,,научне'' тек када би појаве успевале расчланити на молекуле и атоме и тако их објашњавати.

П: И шта је ту запело сада?

О: Када се појам „супстанце“ постави са становишта „енергије“, па „дејства“ (производа енергије и времена), затим „информације“ – молекуле и атоми ће изгледати веома чудни. Толико ће одударати од нових „истина“ да ће се сматрати заблудом науке 20. века. Они ће бити попут некадашњег флогистрона, или алхмије, или „четири елемента“ од којих се свет наводно састоји (ваздух, вода, земља, ватра).

П: Зашто би молекули и атоми били „ненаучни“?

О: Биће, јер физика је одавно усвојила Де Бројеву тезу (1924) о таласима супстанце. Сва материја се може дефинисати само помоћу таласа и све њене последице могу се изводити из таласних једначина (Шредингер, 1926). Зато имамо честично-таласну структуру материје, при чему ће се и онај „честични“ део (прочитај моје тумачење Комптоновог ефекта[6]) полако занемаривати.

П: Прочитао сам (Неоштећена круна краља Сиракузе[7]), али у чему је поента?

О: Комптонов ефекат је својевремено био доказ и корпускуларне природе светлости (знало се да је она талас). Честице (фотони) одбијају се на начин како је Комптон описао (1922) да, на основу одржања импулса и енергије, одбијеном фотону расте таласна дужина (дакле, Комптон је помоћу таласне природе доказивао корпускуларну). Међутим, из теорије информације (моје) даље следи да то повећање таласне дужине одбијеног фотона говори о већој размазаности фотона на путу, тј. о већој неодређености његовог положаја. Он скреће на мање вероватне путање (мање густине вероватноће) само под дејством неке силе, или као у овом случају због судара са другим телом (електроном).

П: И, шта хоћеш рећи?

О: Из претходних заблуда (механицистичког и материјалистичког схватања света) физика је прешла на атомистику, па на кванту физику. Верујем да ће временом прећи и на „информатички универзум“, који ће као и сваки претходни модел бити са неком фалинком. При томе је реалност увек била погрешна, иако све шира. Постала је и оно што је премалено за наша чула (молекуле, атоми, кванти), или оно што нам је предалеко као дубоки свемир, који узгред речено видимо само као светло стигло нам из неке далеке прошлости.

Усвајајући да је „реално оно што интерагује са реалним“ усвојићемо и „паралелне реалности“ са којима је могуће само посредно интераговати, а усвајајући да је „интеракција“ еквивалент „комуникацији“ постајаће „реално“ иако то можемо перципирати само логиком. А, питање је онда, зар и молекуле нису производ наше логике више него ствар непосредних чулних опажања?

П: Како ћеш „без молекула“ објашњавати свет?

О: Помоћу закона одржања, помоћу принципа најмањег дејства и комуникације. На пример, посматраћу израз $S = ax + by + cz + \cdots$, који представља „информацију перцепције“ када низови

[6] Compton Effect, https://www.academia.edu/40105675/Compton_Effect
[7] http://izvor.ba/rastko-vukovic-neostecena-kruna-kralja-sirakuze/

$(a, b, c, \dots)$ и $(x, y, z, \dots)$ представљају две супротстављене информатичке величине. Оне су компоненте вектора; њихов производ је већи када су множене већа компонента са већом, а производ је мањи када су веће компоненте једног низа множене мањима другога и мање већима.

У теорији игара S би била „виталност“ (жестина игре) која је већа када на јаку игру противник одговара јаком а на слабију слабом. У економији било би то динамичније друштво са добром конкуренцијом, а слично и у политици. У физици имали бисмо мање S, тачније минимално, због закона најмањег дејства; тада се јачој препреци субјект слабије супротставља.

П: Већа „информација перцепције“ значи већу живахност, а мања пасивност?

О: Да, веће S припада „живим бићима“, а мање неживој твари. Али, нећемо сада о томе, то је широка тема теорије информације, још увек са пуно тога спекулативног.

П: На шта циљаш са оваквим ,,објашњењима''?

О: На претпоставку да ће свака математичка истина, свака њена апстракција, временом постајати врстом физичке реалности. Осврћем се на оно што сам већ више пута писао, на различите начине (в. [1] и [2]).

3. Специјална унитарна група

7. фебруар 2021.

У математици, специјална унитарна група (Special Unitary Group) степена n, ознаке $\mathrm{SU}(n)$, је Лијева група[8] типа $n \times n$ унитарних матрица детерминанте један. Група $\mathrm{SU}(2)$ уско је везана за групу $\mathrm{SU}(3)$ и има важну улогу у квантној физици.

SU(2)

У линеарној алгебри, комплексна квадратна матрица $\mathbf{U}$ реда $n \in \mathbb{N}$ је „унитарна“ ако је њена коњуговано транспонована матрица $\mathbf{U}^\dagger$ њој уједно инверзна. Другим речима, ако је

$$\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{I}, \tag{1}$$

где је $\mathbf{I}$ јединична матрица истог реда.

Произвољан комплексан број $z = x + iy \in \mathbb{C}$ има реалне параметре $x, y \in \mathbb{R}$, од којих се први назива његовим „реалним делом“, ознаке $\mathrm{Re}(z)$, а други „имагинарним делом“, ознаке $\mathrm{Im}(z)$. За имагинарну јединицу важи $i^2 = -1$. Коњугован броју z је комплексан број $z^* = x - iy$, тако да је њихов производ реалан, $z^*z = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$. Придружена (адјунгована) матрици $\mathbf{U}$ је матрица $\mathbf{U}^\dagger$, њој транспонована и са коњугованим одговарајућим елементима.

Називамо „групом“ структуру $(G,*)$ коју чине скуп G и бинарна операција $*$ која задовољава следеће четири аксиоме:

1. (затвореност) за свако $a, b \in G$ резултат $a * b$ такође је у G;
2. (асоцијативност) за свако $a, b, c \in G$ биће $(a * b) * c = a * (b * c)$;
3. (неутрал) постоји $e \in G$ такав да за свако $a \in G$ важи $e * a = a * e = a$;
4. (инверз) за свако $a \in G$ постоји $b \in G$ такав да је $a * b = b * a = e$, где је e неутрал.

Може се показати да група има тачно један неутрал, да је инверз датог елемента јединствен и да су леви и десни инверз исти елементи. Када је за сваки пар елемената $a, b \in G$ њихов производ комутативан, $a * b = b * a$, група се назива комутативном или Абеловом.

Ако је $\det \mathbf{U} = 1$, квадратну матрицу $\mathbf{U}$ реда n називамо „унимодуларном“. Скуп свих комплексних матрица n-тог реда које су истовремено унимодуларне и унитарне образује групу ако се множење матрица узме за групну операцију. Та група назива се групом унитарних унимодуларних матрица n-тог реда и означава се $\mathrm{SU}(n)$. Другим речима, то је специјална унитарна група реда n.

За кванту физику најинтересантнија група $\mathrm{SU}(2)$ има матрицу

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Lie_group

за коју важи $\det \mathbf{U} = 1$ и $\mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{U} = \mathbf{I}$ из чега следи: $u_{11}u_{22} - u_{21}u_{12} = 1$ и

$$\begin{pmatrix} u_{11}^{*} & u_{21}^{*} \\ u_{12}^{*} & u_{22}^{*} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где матрична једнакост (3) замењује четири линеарне једначине, од којих су три независне:

$$\begin{cases} u_{11}^{*}u_{11} + u_{21}^{*}u_{21} = 1 \\ u_{12}^{*}u_{12} + u_{22}^{*}u_{22} = 1. \\ u_{11}^{*}u_{12} + u_{21}^{*}u_{22} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Отуда:

$$u_{21}^{*} = u_{21}^{*} \cdot 1 = u_{21}^{*}(u_{11}u_{22} - u_{21}u_{12}) = u_{11}(u_{21}^{*}u_{22}) - (u_{21}^{*}u_{21})u_{12},$$

$$u_{21}^{*} = -(u_{11}u_{11}^{*} + u_{21}^{*}u_{21})u_{12} = -1 \cdot u_{12} = -u_{12},$$

$$u_{21}^{*} = -u_{12}. \tag{5}$$

Такође:

$$u_{22} = 1 \cdot u_{22} = (u_{22}^{*}u_{11}^{*} - u_{12}^{*}u_{21}^{*})u_{22} = (u_{22}^{*}u_{22})u_{11}^{*} - u_{12}^{*}(u_{21}^{*}u_{22}),$$

$$u_{22} = (u_{22}^{*}u_{22})u_{11}^{*} + u_{12}^{*}(u_{11}^{*}u_{12}) = (u_{22}^{*}u_{22} + u_{12}^{*}u_{12})u_{11}^{*} = 1 \cdot u_{11}^{*},$$

$$u_{22} = u_{11}^{*}. \tag{6}$$

Према томе, свака матрица $\mathbf{U} \in \mathrm{SU}(2)$ има облик

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} v & w \\ -w^{*} & v^{*} \end{pmatrix}, \quad |v|^2 + |w|^2 = 1, \tag{7}$$

тј. задата је са два комплексна параметра, овде $v, w \in \mathbb{C}$.

Посебно, када су коефицијенти матрице (7) реални бројеви она је класична ротација

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \tag{8}$$

за угао φ. Као што је познато из елементарне геометрије, све симетрије, тачније изометријске трансформације попут транслације, рефлексије (централне, осне, огледалске) и ротације, могу се свести на саме ротације. У томе је универзалност матрице (8) и уопште групе $\mathrm{SU}(2)$.

Посебне матрице

Матрице другог реда су врста векторског простора чију базу чинеје јединична матрица (3) и три кватерниона[9], линеарна оператора чије су матрице:

$$\hat{q}_x = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \hat{q}_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \hat{q}_z = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Релација $\hat{\sigma}_\xi = -i\hat{q}_\xi$ $(\xi = x, y, z)$ дефинише Паулијеве матрице (операторе), које такође чине (нову) базу истог простора матрица (оператора) другог реда. Оакве су уједно и базе групе $\mathrm{SU}(2)$.

Приметимо да за Паулијеве операторе (матрице) вреде једнакости:

$$\hat{\sigma}_\xi\hat{\sigma}_\eta + \hat{\sigma}_\eta\hat{\sigma}_\xi = 2\hat{I}\delta_{\xi\eta}\,, \tag{10}$$

где је $\hat{I}$ јединични оператор (матричне репрезентације $\hat{\mathbf{I}}$), а

$$\delta_{\xi\eta} = \begin{cases} 1 & \xi = \eta \\ 0 & \xi \neq \eta \end{cases} \tag{11}$$

је Кронекеров делта симбол. Такође важе једнакости

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y - \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x = 2i\hat{\sigma}_z \\ \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z - \hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_y = 2i\hat{\sigma}_x \\ \hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x - \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_z = 2i\hat{\sigma}_y \end{cases} \tag{12}$$

које је лако проверити непосредним множењем одговарајућих матрица.

Закон одржања

Из потреба физике за SU(2) и уопште квантних еволуција које су репрезентације реверзибилних оператора због којих се све претпоставке могу добијати из последица квантних трансформација, што слободније речено значи да квантни порцеси памте. Отуда један од доказа закона одржања информације.

Наиме, инвертибилност (реверзибилност) квантних оператора је врста симетрије о којој говори Нетерова теорема[10]. Матрицом $\mathbf{A} = (a_{\mu\nu})$ писан систем линеарних једначина

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \tag{13}$$

је регуларан (инвертибилан) ако помоћу вредности копија, елемената вектора $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, можемо сазнати вредности оригинала, копмпненти вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тада постоји инверзна матрица $\mathbf{A}^{-1}$ таква да је

[9] в. [3], 2.4.6 Поопштавање
[10] в. [2], 1.14 Еми Нетер

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}, \tag{14}$$

где је $\mathbf{I}$ јединична матрица. Упоређујући са (1) видимо да су такве све унитарне матрице, а онда и да су такви сви квантни процеси.

Маса и време

Став да порастом ентропије (термодинамике) опада њена информација није у супротности са спонтаним растом ентропије, ако га поопштимо највише на супстанцу. Изгубљена информација твари тада постаје информација простор-времена. То је у складу са претпоставком да простор, време и материју чине информације.

Тада простор памти, а сећање као врста информације такође делује на нешто. Пример деловања прошлости простора на садашњост је гравитација, односно тела која имају (велику) масу. О томе сам више пута писао[11], а сада ћу то упоредити са „механизмом“ недавно потврђеног Хигсовог бозона (2012) и његовог поља. Да би разумели са чиме упоређујем погледајте прилог[12], или бар део, цитат који сам издвојио на на крају.

Фотони и све честице које се крећу брзином светлости немају сопствено време. Оне немају масу мировања, властито време им стоји и време оне „позајмљују“ од посматрача. Честице које путују брзином светлости заробљене су у садашњости посматрача и у том смислу имају само три димензије (две припадају информацији, а време посматрачу). Оне зато нису у стању самостално продирати кроз слојеве времена, било ког (из прошлости ка садашњости, или кроз паралелне реалности), па комуницирајући са таквима сви остали њихови релативни субјекти (посматрачи) дефинишу своју садашњост.

Начелна штедљивост информације односи се посебно на оне друге честице које имају сопствено време, утолико више што више продиру кроз слојеве времена. За такве време не стоји и оне имају масу мировања. Принцип најмањег дејства, односно најмање информације (дејство и информација су еквиваленти), успорава их, тај принцип (штедљивост) чини их инертним на начин који је еквивалентан са „имати масу“.

Тај део теорије информације[13] појаснићe егзистенцију Хигсовог бозона, који је забавно називан и божијом честицом (Leon Lederman, 1993). Коначно ево и обећаног цитата.

,, ... У то време (1964) физичари су покушавали да разумеју зашто неке честице имају већу масу од других (да сумирамо проблем на други начин: не разумемо зашто одређене честице имају масу; верује се да све честице које носе силу НЕ СМЕЈУ да имају масу. Супротно томе, научили смо да честице које носе слабу силу имају масу). Морали смо знати шта је покретачка снага овог механизма.

[11] в. [1], 11. Сила и информација
[12] https://futurism.com/what-is-the-higgs-field-and-higgs-boson
[13] Наглашавам, он за сада нема никакве везе са званичном физиком!

Овде је ускочио Петар Хигс.

Успео је да изнесе теорију која сугерише да постоји енергетско поље са којим су све честице у Универзуму имале интеракцију. У суштини, што је честица масивнија, то је више интеракција са овим пољем. Супротно томе, мање масивне честице су мање интераговале са овим пољем...

Хиггсов бозон је баждарни бозон (носач силе) Хигсовог поља, баш као што је фотон одговоран за електромагнетно поље, W и Z бозони одговорни за слабу нуклеарну силу, а глуон за јаку нуклеарну силу. Хигсово поље је област деловања његових бозона, као што је електромагнетно поље област деловања фотона. ..''

Хермитска матрица

Себи придружена матрица (self-adjoint matrix), или „хермитска матрица“, је комплексна квадратна матрица $\mathbf{A} = (a_{\xi\eta})$ која је једнака себи коњуговано-транспонованој, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\dagger}$**.** Другим речима, комплексан број који је елеменат ξ-тог ретка и η-те колоне дате хермитске матрице, једнак је коњугованом елементу η-тог ретка и ξ-те колоне, $a_{\xi\eta} = a^{*}_{\eta\xi}$.

Већ због тога дијагонални елементи ових матрица морају бити реални бројеви, јер такви су једини себи коњуговани. Квадратна матрица са реалним коефицијентима је хермитска само ако је симетрична. Свака хермитска матрица је нормална[14], јер је очигледно $\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}$.

Познато је да за коначно димензионалне векторске просторе важи „спектрална теорема“ која каже да свака хермитска матрица може бити дијагонализована (преведена у дијагоналну) помоћу унитарне матрице и да та дијагонална матрица има само реалне коефицијенте. Отуда су све сопствене вредности n-димензионалне хермитске матрице реалне и она има n линеарно независних сопствених вектора.

Како само реалне сопствене вредности у квантној механици могу представљати обзервабле (мерљиве физичке величине) то су хермитске матрице, заједно са унитарнима, основа квантне физике. Квантна стања (честице-таласи) су репрезентације вектора, а процеси над тим векторима су репрезентације ових оператора. Вектори су суперпозиције исхода мерења, рећи ћемо и расподеле вероватноћа, па унитарност оператора чува јединичну норму суперпозиције, а хермитски оператори помажу у предвиђању обзервабли.

Епилог

Овај кратки преглед ми је, надам се, само референца на коју се могу позивати у даљем тумачењу „Хигсовог механизма“ и примена „инертности због времена“ на масу уопште. Много више, опширније и детаљније о унитарним и хермитским операторима писао сам раније, али и концизност има своју вредност.

[14] нормална матрица – комутира са себи коњуговано-транспонованом

4. Велики прасак

О развоју васионе са становишта теорије информације

9. фебруар 2021.

Ово је изгледнија верзија развоја васионе обзиром на досадашњу теорију информације.

Увод

Простор, време и материја састоје се од информација а њена суштина је неизвесност. Информација је еквивалент дејству[15] (производу енергије и времена), за обоје важи закон одржања, а због претпостављене неизвесности честице комуницирају (интерагују) јер немају све. Доследно, подразумевамо да су многострукост и селективност својства реалног света. Сваки субјект око нас нека је информација, а таква је то и сама васиона.

Оно што можемо доказати да се не може десити – не дешава се, па је и истина информација. Зато и свевременске истине попут математичких исказа сматрамо неком информацијом. Ако им је трајање бесконачно, енергија им је нулта. Посебно, будућност није „записана“ на неки нама недоступан начин, већ је „објективно неизвесна“, она непредвидљиво настаје из бесконачности[16], чиме коначност света перцепција постаје повезива са бесконачним.

Ширење

Слипхер[17] је 1912. године приметио црвени помак удаљених галаксија који је касније протумачен њиховим удаљавањем од Земље. Фридман[18] је 1922. први употребио Ајнштајнове једначине поља да теоријски докаже ширење свемира, а сматра се да је независно од њега до истог дошао Леметр[19] 1927. који је израчунао и брзине удаљавања галаксија. Лематрове процене потврдио је Хабл[20] посматрањем две године касније.

Затим је претпостављен „космолошки принцип“ који каже да се све галаксије удаљавају једна од друге. Замишљени 2-димензионални модел простора је површина балона којег надувавамо са тачкама које представљају галаксије које се на тај начин удаљавају. Отприлике о оваквим званичним позицијама космологије разговарао сам са колегама да би ме они на крају питали за став „теорије информације“ (моје) о томе свему. Ево мог одговора.

Оно што могу испричати саме су спекулације, али међу њима постоје изгледније. На пример, у поменутом тексту „Токови догађаја“ могли сте приметити да разликујем две групе елементарних честица, можда фермионе и бозоне, од којих се прве макар мало вероватније претварају у друге.

[15] в. [1], 23. Дејство и информација
[16] в. [2], 3.19 Токови догађаја
[17] Vesto Slipher (1875-1969), амерички астроном.
[18] Alexander Friedmann (1888-1925), руски физичар и математичар.
[19] Georges Lemaître (1894-1966), белгијски свештеник и професор физике.
[20] Edwin Hubble (1889-1953), амерички астроном.

Зато треба размотрити васиону већинских првих честица која се стално помало мења у васиону честица друге врсте. Васиону материје која постаје васиона простора.

У том смислу се спонтани раст ентропије односи на супстанцу, а информација која се при томе губи прелази у простор. Овом необичном преласку може се додати и идеја о простору који памти о чему сам раније писао на различите наизглед независне начине. Простор расте на уштрб супстанце, али расте и са „биографијама честица“ које се њиме крећу и при томе не расту.

Теорија информације коју заступам може изгледати чудно, јер нуди један необичан поглед на свет око нас, али она није нелогична. Таква је да захтева неку информацију у свакој слободној честици, а у свом екстремном облику и у свакој појави, укључујући сећања. Да би при томе опстао закон одржања, за садашњост и укупну историју затвореног физичког система који посматрамо, потребно је утицаје све старије прошлости на садашњост пригушити и укупно учинити таман једнаким губитку текуће информације. То је лак рачун.

Да постоји губитак текуће супстанце, рекао сам, произилази из раста ентропије и одговарајућег опадања информације. Са друге стране, он је и последица начелне штедљивости емисије информације, односно вероватнијег догађања вероватнијих догађаја, који су иначе мање информативни. Другим речима, садашњост се развија у смеру вероватнијих исхода.

Посебно је питање откуд толике садашњости? Са становишта Хајзенбергових релација неодређености и затим егзистенције некомутативних оператора из којих следи одговарајући принцип неодређености, није довољно замишљати будућност васионе као неки статични магацин догађаја из којих насумице бирамо исходе. То би значило да извесност постоји али нам није доступна. Значило би да можемо преварити некомутативност оператора и Хајзенбергове релације неодређености. Можда је овакво разматрање било управо оно због чега сам са умереног облика теорије информације прешао на екстремни.

Закон одржања важи зато што су перцепције (нас, субјеката васионе, честица) коначне. За бесконачне скупове такво нешто није могуће, јер они по дефиницији су такви да могу бити своји прави потскупови. Од бесконачности се неограничено могу „откидати“ коначни делови а да она увек остаје као што је била. Према томе, можемо замишљати да садашњост настаје из делова тамо неке бесконачности на додатно неизвесне начине, па чак и да су те бесконачности управо на почетку поменуте свевременске истине, а онда и посебне врсте информација.

Обзиром да је слободна информација (која може да путује као посебна честица) еквивалентна дејству (производу промењене енергије и трајања), свевременска информација имаће нулту енергију. На тај начин налазимо да је и сами почетак васионе, дакле „велики прасак“ заправо недостижни тренутак када је време у односу на наше текло бесконачном брзином.

Тиме улазимо у други део ове приче о васиони, који може изгледати као посебна верзија њеног постанка и ширења, али коју ја бар за сада не бих раздвајао од претходне.

Релативност

Са становишта било којег (просечног) тренутка прошлости, можемо сматрати да време наше садашњости протиче све спорије, рецимо као да пропадамо[21] у неко све јаче гравитационо поље. Обрнуто, са садашњег становишта, протицање времена све старије прошлости изгледало би нам све брже.

У том смислу, путнику који би времепловом ишао уназад у прошлост, могло би требати бесконачно много (сопственог) времена да стигне на почетак свега, у време „великог праска“. Уједно би релативни посматрач из наше (текуће) садашњости трајање његовог путовања могао проценити на свега 13,8 милијарди година, односно онолико колико васиону сматрамо старом.

Зато што релативно време наше садашњости тече све спорије, а радијално од нас на већим удаљеностима дужине нам изгледају све веће, ми опажамо удаљавање галаксија. На тај начин ми бисмо удаљавање галаксија могли опажати чак и ако су оне статичне. Свеједно, урачунавајући релативистичке ефекте могли бисмо добити да се оне таман толико брзо удаљавају колико је потребно за поништавање релативно бржег тока њиховог времена у односу на наш и релативно већих јединица дужине.

Епилог

Невероватно је колико је ова наизглед безазлена верзија васионе била инспиративна за саговорнике, за надовезивање и измишљање разних сценарија научно фантастичних прича, али верујте ми, она има и математички занимљиве наставке. Али отом потом.

[21] кажем да приметимо да закони физике и посебно закони одржања могу остати на снази

5. Патуљасте галаксије

14. фебруар 2021.

Какво је ваше мишљење о патуљастим галаксијама које би можда могле бити без „тамне материје“ у својој пратњи? – Једно је од питања које добијам од колега поводом нових космолошким истраживањима. Она о „гравитрацији кроз време“ која новим сазнањима добијају на значају и мој ранији спекулатива одговор на тежини, тема су ове приче.

Мала и велика маса

О налажењу слабијих маса у свемиру[22] које не би биле у пратњи тамне материје имам позитивно очекивање. Оно теорији информације дође као једна од додатних хипотеза коју вреди разматрати, а која следи из три следеће поставке. Четврта је објашњење.

Прво, конике (елипсе, параболе, хиперболе) су трајекторије кретања узрокованог константном централном силом ако и само ако та сила опада са квадратом удаљености. То је теорема коју сам и ја доказивао (в. [1]). На њу се надовезује став да се поље силе шири брзином светлости само ако централна сила опада са квадратом удаљености. Познато је да обе особине има Кулонова сила (електромагнетна).

Друго, то су планете сунчевог система које се крећу по елипсама, све осим Меркура. Меркур своју елипсу као да повлачи за собом, њен перихел ротира у правцу ротације Меркура, што значи да његова тачна путања и није баш елипса. Ову „девијацију“ предвиђа општа теорија релативности и тумачимо је близином Сунца, односно торзијама јаким гравитационим пољем.

Треће, наш информатички универзум има три просторне димензије и три временске. Када узмемо четири од тих шест (можда било којих) и три прогласимо просторним (x_1, x_2, x_3) а четврту временском ($x_4 = ict$) – важиће исте[23] Ајнштајнове[24] једначине опште релативности, као и Клајн-Гордонове (релативистичке) квантне механике. Из тога извлачимо закључак да би сила која делује кроз простор могла деловати и кроз време (рецимо из прошлости на садашњост, а можда и обрнуто) када би носиоци те силе (у овом случају гравитациони таласи, затим и њихове елементарне честице – гравитони) имали сопствено трајање.

Четврто, светлост (фотони – честице електромагнетног зрачења) немају масу мировања, време им стоји. Они зато постоје само у три димензије, рецимо у равнима своје информације и времену посматрача. Из горњег (првог) гравитони се такође крећу брзином светлости, осим у околини јаког гравитационог поља. Отуда, јако гравитационо поље делује и кроз сопствено време, а слабо не.

Патуљасте галаксије, према томе, неће имати своју „тамну материју“ као свог пратиоца из прошлости, ако им је маса недовољна дуже време. Масивне галаксије, напротив, остављаће траг у прошлости који ће их привлачити (деловање прошлости на садашњост), као што Меркура више

[22] Попут: https://phys.org/news/2020-09-physicists-mysterious-dark-deficiency-galaxy.html
[23] в. [2], 3.30 Одложена гравитација
[24] Albert Einstein (1879-1955), немачки рођен теоријски физичар.

привлаче његови млађи положаји које он затиче испред себе за разлику од старијих иза (јаче деловање ближе прошлости на садашњост), и учинити је (тамну материју) да орбитира око садашњости тих галаксија попут других тела (не искључујем ни могућност деловања садашњости на прошлост).

Продирање кроз време

Где могу прочитати о деловању гравитације кроз време? – Друго је занимљиво питање постављено ми недавно, не од истог колеге али на сличну тему. Оно се такође односи на хипотезу од раније, извођену из старије и још увек неутврђене „теорије информације“, у различитим облицима и са различитим последицама.

Прочитај на пример прилог „3.30 Одложена гравитација“ из популарних прича о информацији [2], рекох. Ако се чини добро, погледај и сложеније приказе (у формулама опште релативности и квантне механике). У кратком препричавању, да се види вреди ли ствар читања, разговор је текао отприлике овако.

Поента је на Ајнштановим једначинама поља

$$G_{jk} + \Lambda g_{jk} = \kappa T_{jk} \tag{1}$$

где три просторне координате могу бити $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, а четврта временска је $x_4 = ict$ са имагинарном јединицом ($i^2 = -1$), брзином светлости (приближно $c = 300\,000$ km/s) и трајањем t, заправо дужина коју светлост пређе за дато време. Друго важно је Клајн-Гордонива једначина

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \mu^2\right)\phi = 0 \tag{2}$$

квантне механике. Ту је $\phi = \phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ нека (псеудо) скаларна функција, у општем случају комплексна. Када је m маса мировања честице, а $h = 6{,}626 \times 10^{-34}$ Js Планкова константа, онда ову једначину можемо писати са $\mu = 2\pi mc/h$. Ако је ϕ реална функција, Клајн-Гордонова једначина описује неутралне (псеудо) скаларне честице, а ако је ϕ комплексна она (2) описује честице са набојем.

За дубље разумевање симетрије просторних и временских координата потребна је теорија информације. Као полазно штиво предлажем да прочиташ краћи популаран текст „2.13 Простор и време“ из „Прича о информацији“ [2]. Не треба ту 6Д васиону простор-времена гледати баш као ,,три просторне и три временске'' координате, ако је могуће бирати било које четири од њих шест и три прогласити „просторним“, а преосталу „временском“.

Када неку од дужина сматрамо производом имагинарне јединице, брзине светлости и трајања ($x_4 = ict$), она тиме постаје временска. Због првог од својих фактора „временска дужина“ квадрирањем добија другу реалност и јавља се у називнику гравитационе силе (која опада са квадратом удаљености). Због другог, у реалном времену (нашег реда величина) тај квадрат у називнику чини разломак страшно малим (веома малим бројем), који брзо и пребрзо тежи нули

сваком секундом. Зато је тај аспект гравитационе силе тешко регистровати, а затим још теже јер се она уопште јавља само у веома јаким пољима (у непосредној близини Сунца и јачим), у каквом се једва налази Меркур.

На питање зашто Меркур, кажем да његова путања није тачна елипса, јер перихел те „елипсе“ повлачи се за планетом, што се сада може тумачити као јаче деловање ближе сопствене прошлости. Остала небеска тела даља од Сунца немају то повлачење, а све то заједно иде у прилог тезама о не-деловању слабе гравитације кроз време.

За одговор на питање откуда то (не)деловање, рекох да је потребно још теорије информације. Прецизније речено, потребан нам је „принцип минимализма“ информације, или слободније речено „принцип најмањег дјества“ (информацију и дејство сматрам формалним еквивалентима) познатог у физици.

Овај начелни минимализам узрок је инертности. Маса има сопствено време (за разлику од светлости), што значи да и лично продире кроз слојеве времена, па онда и „запиње“ због поменутог принципа. Да би такво продирање могли имати и гравитациони таласи (гравитони) они се морају кретати (макар мало) спорије од светлости, а то би се могло догађати само унутар веома јаког гравитационог поља.

Наиме, ако таласи поља (константне централне) силе путују брзином светлости тада и само тада сила опада са квадратом удаљености, а ако сила опада са квадратом удаљености онда и само онда трајекторије су присиљене да буду конике. Међутим, одступање од коника (елипсе) имамо у случају јаке гравитације, али не и у случају слабе, што значи да само гравитони јаких поља путују спорије од светлости и имају масу.

Напомињем, ово су и даље само (моје) хипотезе од раније, без обзира што им новија открића космологије додају на значају.

Гравитациони таласи

Гравитациони таласи су поремећаји закривљености простор-времена генерисани убрзаним масама. Предлагао их је Жил Анри Поенкаре[25] 1905. године, а касније 1916. предвидео их је Алберт Ајнштајн на основу своје опште теорије релативности. Они преносе енергију као гравитационо зрачење које Њутнов закон универзалне гравитације не предвиђа, јер је у класичној механици такав заснован на претпоставци да се физичке интеракције шире тренутно, бесконачном брзином. Они су експериментално први пут директно мерени 14. септембра 2015. године у склопу пројекта ЛИГО (Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory).

Док гравитациони талас (брзином светлости) пролази поред посматача, простор-време се напреже и изобличује. Удаљеност између објеката се ритмично повећава и смањује како талас пролази, а тај ефекат опада са удаљеношћу. То је признато објашњење ове појаве.

[25] Jules Henri Poincaré (1954-1912), француски математичар и теоријски физичар.

Предвиђа се да бинарне неутронске звезде док се спајају, због веома великог убрзања њихових маса, могу бити моћан извор гравитационих таласа. Због астрономске удаљености од ових извора, ефекти мерени на Земљи постају врло мали, са наборима мањим од 1 према 10^{20}, али мерени су са још осетљивијим детекторима (тачности до 5×10^{22} делова).

Они омогућавају посматрање спајања црних рупа и других егзотичних објеката дубоког свемира недоступних традиционалним средствима, оптичким или радио телескопима. Могли би бити корисни космолозима за осматрања врло ране васионе, пре рекомбинације (епоха када су наелектрисани електрони и протони први пут постали везани за електро-неутралне атоме водоника) када је простор био непрозиран за електромагнетно зрачење. Прецизна мерења гравитационих таласа помажу и у додатном тестирању опште теорије релативности.

То су познате ствари. Али у нашем претходном контексту, када се гравитациони таласи крећу брзином светлости само у областима „слабе гравитације“ (сунчев систем), док се у областима „јаке гравитације“ крећу (мало, незнатно) спорије, они подсећају на обрнуто кретање морских таласа који путујући површином изнад великих дубина стижу до обале. Доњи део морског таласа који улази у плићак почиње да запиње о дно и талас успорава. Унатрашке гледано то потсећа на процес гравитационог таласа који напуштајући јако поље где „запиње о време“ убрзава до брзине светлости.

Напомињем да често употребљаван „доказ“ да се гравитациони таласи крећу брзином светлости држим наивним. Онај који каже да је брзина тих таласа једнака брзини светлости, јер би у случају изненадног нестанка Сунца гравитација ове звезде још увек деловала све док видимо њену светлост – јер информација путује брзином светлости. То би онда важило и за изненадни нестанак извора звука, јер (наводна) информација путује брзином звука! Јасно је, ваљда, зашто ову „методу доказивања“ сматрам погрешном.

Уместо тога, поновићу, гравитациони таласи се крећу брзином светлости тамо где узрокују кретања небеских тела по трајекторијама које су конике и обрнуто, а тамо где те трајекторије не би биле конике ни њихова брзина не би била та. Ово отвара неколико веома занимљивих могућности, али које више нису ствар популарног препричавања (за сада), па ћемо о томе други пут када формуле проверим, разумем и посложим.

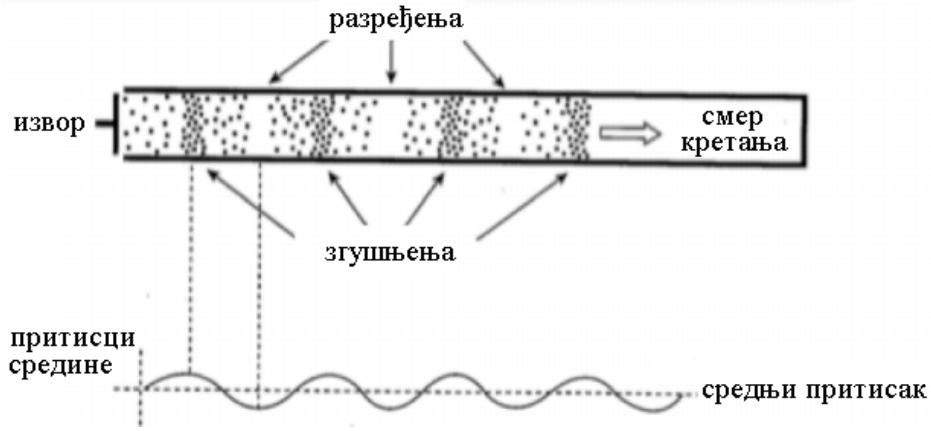
6. Таласи

18. фебруар 2021.

Резиме о таласима звука, воде и бозона, са новим спекулацијама о утицају таласа поља сила, посебно електромагнетних и гравитационих.

Звук

Периодично стискање и ширење супстанце по неком правцу дефинише лонгитудинални звучни талас. Смер му је од извора ка срединама настанка осцилација, као што се види на слици лево. Та енергија титрања се иначе преноси кроз простор брзином



$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

где су λ и T редом таласна дужина и период локалних осцилација, разређења и згушњења (на слици). Фреквенција $f = 1/T$ је реципрочна вредност периода. Ови локални притисци приказани су на доњој линији у облику синусоиде.

Из Хуковог[26] закона еластичне силе ($F = -kx$) и Њутновог[27] другог закона ($F = m\ddot{x}$), а обзиром на убрзање $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ масе m, добијамо диференцијалну једначину

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0, \tag{1}$$

кретања апсцисом x током времена t. Решење ове једначине (1) је синусоида

$$x(t) = A\sin(\omega t), \tag{2}$$

где су A амплитуда (осцилација) и $\omega = f/2\pi$ тзв. кружна фреквенција.

Кружна фреквенција дефинише број циклуса разређења и згушњења у јединици времена, а амплитуда оваквих таласа једнака је таласној дужини ($A = \lambda$), па за кинетичку енергију осциловања делића масе m можемо писати

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}. \tag{3}$$

[26] Robert Hooke (1635-1703), енглески научник.
[27] Isaac Newton (1642-1727), енглески математичар и физичар.

Извор звука сабијањем врши рад $W = \frac{1}{2}Fx = -\frac{1}{2}kx^2 = -\frac{1}{2}kA^2$, а то еластично стање затим прелази у истезање и преноси енергију (3) из чега добијамо $\omega^2 = k/m$. Звук траје док извор радећи троши енергију и пренешена енергија осцилација добија допуну.

Амплитуда звучног таласа одређује оно што опажамо као гласноћу. Интензитет звука I је просечна брзина преноса енергије по јединици површине окомита на правац ширења таласа, а отуда

$$I = \frac{A^2}{2\rho v}, \tag{4}$$

где је ρ густина ваздуха (килограм по кубном метру), а v је брзина звука. Јачина звука је количина енергије коју исијава извор звука у једној секунди кроз површину једног метра квадратног окомито на смер ширења и мери се у ватима по квадратном метру.

Због аналогије са дејством, односно информацијом, можемо писати да је јачина звука које осећа људско ухо пропорционална $L = \log\frac{I}{I_0}$, где у бројнику (нумеруса логаритма) стоји интензитет (4), а називник је праг чујности. Јачина звука расте са густином ρ средства којим се звук преноси и са амплитудом A. Међутим, у ширењу у свим правцима, сферно, густина енергије звука опада са квадратом полупречника, удаљености од извора, па на тај начин опада и јачина звука.

Водени талас

Таласи се шире површином воде због њене напетости, гравитације и сила рестаурације (које вуку тело у равнотежно стање). На слици десно је поремећај површине који се у концентричним круговима шири осцилујући трансферзално (окомито) на смерове таласа са приметно све мањим амплитудама и незнатно промењеним таласним дужинама.

Опет је угловна фреквенција $\omega = 2\pi/T$, где је T период осцилације, таласни број $k = 2\pi/\lambda$, где је λ таласна дужина, па стављајући $\theta = kx - \omega t$, значи угао у радијанима, где је x пређени пут таласа за време t, имамо

$$\eta = A\sin\theta, \tag{5}$$

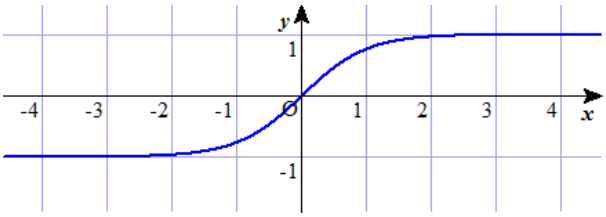
синусоиду која представља ширење таласа. Амплитуда A сада је окомита на смер ширења таласа, а (фазна) брзина таласа је $v = \omega/k$.

Даља извођења особина водених таласа можете наћи на разним местима[28], а овде ћу само препричати неке резултате. Овако[29] или онако, за квадрат брзине v таласа на водама разних дубина h и гравитационог убрзања $g = 9{,}8\text{m/s}^2$ најчешће налазимо приближно

$$v^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\tanh\frac{2\pi h}{\lambda}. \tag{6}$$

За тангенс хиперболни[30] важе изрази:

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{12} - \frac{17x^7}{315} + \cdots, \quad \text{за } |x| < \frac{\pi}{2}, \tag{7}$$

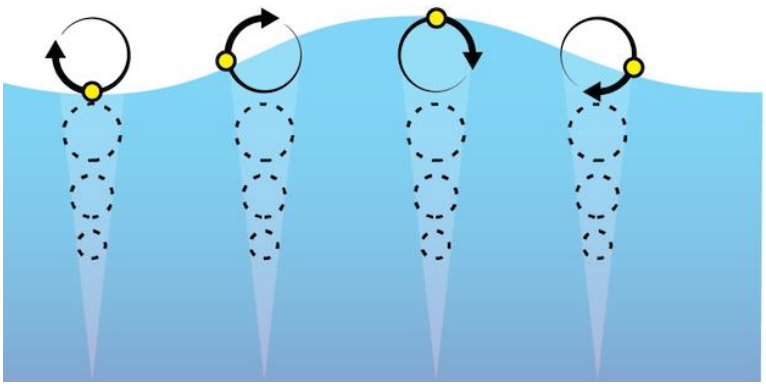


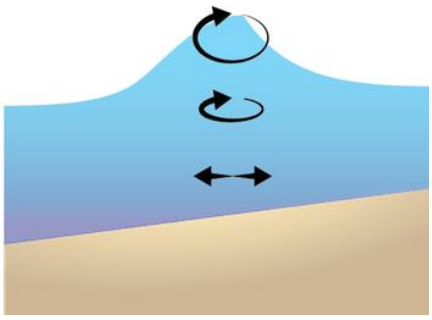
а граф те функције је на слици лево. Као што се види, хиперболни тангенс је растућа функција, од -1 до +1, па стоји као коефицијент разломка у формули (6) где он постиже смањивање првог фактора, главног израза брзине.

У водама велике дубине у односу на таласну дужину λ, за квадрат брзине таласа може се добити и

$$v^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\lambda\rho}, \tag{8}$$

где је γ површинска напетост, а ρ је густина воде. Ове разлике (приближних) израза за брзину таласа настају због различитих утицаја које можемо игнорисати и механике таласа воде у различитим дубинама. На обе следеће слике ток таласа је са лева у десно и обе приказују кружење честица воде. Лево је талас у дубоким водама, а десно у плитким где се види деструкција тог кружења.





[28] Coastal Wiki, http://www.coastalwiki.org/wiki/Main_Page
[29] Wawes in Water, http://web.mit.edu/1.138j/www/material/chap-4.pdf
[30] Српски израз је и $\operatorname{th} x$.

Формула (8) нам је интересантнија у следећа три случаја брзина таласа: када је у питању мрешкање воде у плићацима, када имамо дуге таласе у дубокој води и када дуги таласе стижу на обалу. Тада су корисне додатне апроксимације.

Први је случај ситних водених таласа чија брзина зависи од таласне дужине λ а доминирају силе површинског напона које померају ове таласе дуж себе. На тим малим грбинама воде такође постоје гравитационе силе, али оне су занемарљиве. Таквима је брзина приближно

$$v = \sqrt{\frac{2\pi\gamma}{\lambda\rho}}. \tag{9}$$

Дакле, код мрешкања, воде краћих таласних дужина, други сабирак (8) доминира.

У другом случају, за дуге таласе у дубокој води важнији је први члан (8) и брзина је приближно

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \tag{10}$$

У дубокој води површински напон γ премален је да би био важан. Небитна је и густина ρ, јер када се она повећа – сила која делује и маса која помера талас расту заједно, без утицаја на време одзива воде испред фронта таласа.

У плићацима, када је таласна дужина много већа од дубине воде, а ова много већа од амплитуде ($\lambda \gg h \gg A$) брзина таласа је приближно

$$v = \sqrt{gh}. \tag{11}$$

Вртаче[31] (енг. bores) посебан су случај плитких водених таласа. Проврт се лако може направити у дугачком уском кориту воде пометајући воду равномерном брзином користећи широко весло.

Енергију воденим таласима даје кинетичка енергија ветра, углавном. Према (6), са већом уложеном енергијом настају веће брзине и веће таласне дужине, а даље на већу брзину таласа утиче већа дубина, јер је кинетичка енергија

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mg\lambda}{4\pi}\tanh\frac{2\pi h}{\lambda}, \tag{12}$$

где је m маса воде у таласу.

Таласи веће енергије потискиваће оне са мање енергије, у просеку, па се може десити да морске струје иду својим токовима, а да површински таласи из већих дубина иду ка мањим, успоравајући. Ово се нарочито дешава тамо где дубина h није превелика (в. граф хиперболног тангенса) а вода нагло постаје плића.

[31] Tricker, R. A. R. (1964), Bores, Breakers, Waves and Wakes or Barber, N. F. & Whey, G. (1969), Water Waves.

Преламање таласа

Да таласи скрећу из средина већих брзина ка срединама у којима се крећу спорије општа је појава. У случају воде разумели смо да таласи веће енергије потискују оне са мање енергије[32] и да са већих дубина теже ка мањим, па и због тога можемо очекивати њихово скретање ка срединама где би им брзина била мања.

У општијем случају могли бисмо се позвати на познати „принцип најмањег дејства“ и успут потврдити горњи „енергетски разлог“. Физичко дејство је производ енергије и времена, па ће ситуације једнаких времена спонтано водити расплетима мањих енергија и, када су у питању кинетичке енергије – мањих брзина.

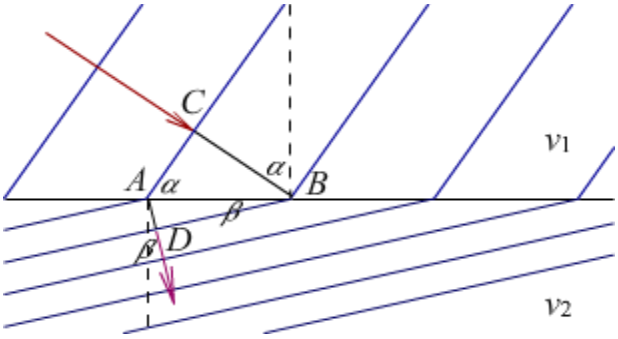
Међутим, класични начини утврђивања преламања таласа на граници средина различитих њихових брзина, v_1 и v_2, углавном се своде на геометријске и уобичајене аналитичке методе доказивања Снеловог закона:

$$v_1 : v_2 = \sin\alpha : \sin\beta\,. \tag{13}$$

Углови α и β су нагибни праваца кретања таласа према нормали на границу средина пре и после скретања. Сличним доказима сам се и ја бавио[33] и нешто слично ћу овде демонстрирати.

На слици десно претпостављене брзине таласа су $v_1 > v_2$, па из (13) следи $\sin\alpha > \sin\beta$, а отуда $\alpha > \beta$. Тако каже Снелов закон који ћемо сада доказати.

У случају светлости, када је као на датој слици $v_1 > v_2$, где је у доњој средини, коју називамо „оптички гушћом“, њено кретање спорије.



Из горње средине, из смера $\overrightarrow{CB}$, брзином v_1 стиже талас на граничну линију AB и наставља кретање у доњој средини смером $\overrightarrow{AD}$ брзином v_2. Нормале на хоризонталну границу две су испрекидане вертикалне (узајамно паралелне) линије, са којима правци кретања, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{AD}$, граде углове редом α и β.

Дуге паралелне линије, попут AC или BD, представљају фронтове таласа, са размацима између паралела који одговарају таласним дужинама. Како слика приказује, преламање таласа из веће у крађу таласну дужину и исту фреквенцију, то према формули $v = \lambda f$ талас прелази у средину где има мању брзину.

[32] незванично тумачење

[33] Р. Вуковић: Преламање таласа (20. januar 2017), https://www.academia.edu/31013581/

Оштар угао у темену A правоуглог троугла ABC такође је α, а оштар угао у темену B правоуглог троугла BAD је β – јер су углови са окомитим крацима једнаки (или су суплементни, што овде очигледно нису). Међутим, исти талас пребрише исти пут AB и као горњи и као доњи, за исто време t, при чему када је горњи пређе пут $\overline{CB}$ брзином v_1 а када је доњи $\overline{AD}$ брзином v_2. Отуда:

$$\overline{CB} = \overline{AB} \cdot \sin\alpha, \quad \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \sin\beta,$$

$$\overline{CB} : \overline{AD} = \sin\alpha : \sin\beta,$$

$$v_1 t : v_2 t = \sin\alpha : \sin\beta,$$

а након скраћивања времена t добијамо Снелов закон (13).

Да се Снелов закон може добити и на основу принципа најмањег утрошка времена, таласа који прелази из горње у доњу средину, можете видети у истом мом поменутом прилогу. Тај доказ треба разликовати од, овде само напоменутог, помоћу принципа најмањег дејства, али и тај треба разликовати од „енергетског разлога“ са којим је започет поднаслов.

Таласи бозона

За разлику од фермиона (нпр. електрона, протона, неутрона, миона), бозони (нпр. фотони, глуони, W и Z, гравитони) имају целобројан спин. За њих не важи ни Паулијев принцип[34], који каже да се два идентична фермиона не могу симултано наћи у истом квантном стању. Бозони се зато не гурају као молекуле које преносе звук и уопште су пробирљивији у интеракцијама.

Попут светлости, бозони интерферирају али не комуницирају непосредно. Интерференцијом бозони могу повећати видљивост (обзервабилност), али они се не потискују узајамно нити директно размењују енергију на начин таласа супстанце.

На пример, електрично поље електрона индукује магнетно и обрнуто дефинишући концентричне сфере око електрона и титрања која називамо виртуалним фотонима. Са повећањем полупречника сфере опада њена амплитуда и вероватноћа деловања одговарајућег виртуелног фотона на евентуални други набој када таласна дужина и импулс остају непромењени.

Ако је спин датог елекрона $+\frac{1}{2}$, спин виртуелног фотона $+1$, а евентуалног другог електрона $-\frac{1}{2}$, онда може доћи до интеракције чиме настају промене спинова, импулса и енергија. Разменом виртуелни фотон постаје реалан, а дати и други електрон примају спин редом $-\frac{1}{2}$ и $+\frac{1}{2}$. Они се одбијају због предаје импулса, као два чамца на води када из једног бацимо врећу песка у други. Кулоновом закону боље одговара сферни облик виртуелних фотона него линијски Фајнманових дијаграма.

[34] [2], 3.11 Паулијев принцип

У наставку дати електрон, сада спина $-\frac{1}{2}$, може емитовати као реалне само фотоне спина -1 који би могли реаговати само са електроном спина $+\frac{1}{2}$ мењајући му спин у $-\frac{1}{2}$, а спин датог електрона у $+\frac{1}{2}$. Овим се ситуација са спином враћа на претходну, са додатним одбијањем електрона са сваком новом разменом импулса. Нејасно је да ли сви виртуелни фотони једног електрона имају исти спин, исту таласну дужину и импулс, или су њихове емисије такође насумичне са утолико више ограниченим могућностима интеракције.

Обрнут ток времена неких честица озбиљно су разматрали неки оснивачи квантне механике, рецимо Дирак са позитроном (1928), а ту идеју многи још увек сматрају отвореном. Оно што можемо додати, према теорији информације, је да се налазимо у 6Д васиони паралелних реалности. Могућности је континуум много, али њихових реализација не може бити више од пребројиво бесконачно много. Сходно том чудном заплету, идеја инверзије времена постаје још чуднија.

Потсећам да због претпоставке универзалности информације, а неизвесности као њене суштине, универзум могућности није статичан магацин 6Д догађаја кроз који на случајан начин путујемо у 4Д свету реалности. Да то „путовање“ има и додатне дубоке непредвидљивости налаже нам, поред осталог, Белова теорема[35] (1964) према којој је сама идеја каузалиста о „скривеним параметрима“ квантне механике контрадикторна, чак и ако би такви „недовољно каузални“ узроци нама у сваком случају били недоступни.

У толиком мноштву[36] случајности стара идеја о обрнутом току времена мање је рањива него иначе. Честице супротног тока времена које виђамо постоје у безбројним реалностима около и куда год кренемо наилазимо на њихове реализације. Другим речима, позитрон нашег света део је непрекидног низа позитрона на које наилазимо којој год будућности се окренули.

Додатно, вероватноћа да на случајан начин два пута изаберемо исту честицу из континуума равна је нули. Штавише, нулта је вероватноћа и да из пребројиво бесконачно много покушаја поново изаберемо исту честицу – из континуум могућности. Толико је много пута континуум већи од пребројиве бесконачности, да би и „враћање“ у дати догађај прошлости био невероватан догађај. Са друге стране, ако се већ бира нешто се мора изабрати.

Подлога ове приче је у теорији скупова. Пребројиво бесконачни скупови су природни, цели и рационални бројеви. Скуп реалних бројева је непребројиво бесконачан – континуум бесконачан. Шанса да унапред речени рационални број на случајан начин извучемо из континуума реалних бројева је нула, а нула је и вероватноћа да га трефимо макар једном у (пребројиво) бесконачно много поновљених покушаја. Али са сваким покушајем извући ћемо неки број.

[35] [2], 2.23 АПР парадокс
[36] [2], 2.15 Димензије времена

Позитрони, као и друге елементарне честице, управо су тако неми (безлични) да ми и не примећујемо њихове различитости из тамо неких будућности, или паралелних реалности. Зато је ова идеја (супротних токова времена) толико отпорна на критике колико је и фантастична.

Елем, размишљајући доследно даље, на пример о електромагнетном пољу и његовим фотонима, на претпостављени начин се упуштамо у спекулације о будућности и прошлости. Два електрона имају исти ток времена и фотони који су посредници у њиховој комуникацији дефинишу њихове упоредне садашњости. Напротив, електрон са елементарном честицом супротног набоја (позитроном) има супротан ток времена и претходни разлог одбијања два електрона постаје објашњење привлачења електрона и позитрона.

Другачија једна спекулација[37] довешће нас до сличних резултата. Рецимо да је заснована на претпоставци да брзина светлости постаје таман толико мања колико свемир постаје већи. Због ограничене брзине светлости, електрони се виде увек са временским кашњењем, гледајући у прошлост један другога то старију што су даље, па настојећи се удаљавати заправо скрећу у оптички гушћу средину. За сада не могу засигурно тврдити да таква идеја неће са претходном постати део неке шире теорије па је не издвајам у посебну причу, као што јој за сада не желим посветити више пажње.

Следећа и последња од данашњих спекулација о таласима бозона једнако је чудна као и претходне две и, бар на први поглед, једнако независна од њих. Она је нарочито интересантна у случају гравитона[38] који би требали имати спин $+2$ и због тога бити потпуно неупотребљиви за интеракције са рецимо електронима (и уопште фермионима спина $\frac{1}{2}$). Спајањем таквих не би настајало ни једно од њих, јер резултирајућа честица морала би имати спин 1,5 или 2,5 због закона одржања спина, што гравитацију чини макро појавом.

Позната поука теорије релативности је да маса дефинише геометрију простора и обрнуто. То што је гравитација универзална појава (у макро свету) само замагљује једну чињеницу коју сада откривамо, да би се сваком поједином пољу баждарних бозона (оних које дефинишу неко поље сила) могла приписати посебна метрика која би важила за честице набоја који реагује на дате.

Метрика „простор-времена“ електромагнетног поља које чини Кулонова сила била би таква да геодезици електро набоја буду трајекторије које одговарају кретањима због те силе, а у случају спреге различитих сила израчунавали бисмо резултанте.

Ова идеја има упориште у познатим ставовима више алгебре и функционалне анализе. Отуда нам је познато да се на (истом) векторском простору могу дефинисати различите норме, а на овима различите одговарајуће метрике и добијати различити метрички простори, као што је могуће и обрнуто. Такав додатак теорији сила појаснио би нам реалност бар онолико колико би у почетку закомпликовао од раније позната израчунавања кретања. Али он не би са тачним теоријама био у контрадикцији јер то ни алгебра или анализа нису.

[37] Big Bang, https://www.academia.edu/45088060/Big_Bang
[38] [2], 3.27 Гравитон

На крају приметимо како друга од овде поменутих спекулација важи (можда) и за гравитацију. Наиме, ако је брзина гравитационих таласа у јаком гравитационом пољу макар мало мања него у слабијем[39], онда би масе могле бити „заваране“ и скретане ка „оптички гушћој“ средини, јер су и саме таласи, а гравитација је универзална макро појава.

[39] као што је расправљано у [1], или Dwarf Galaxies, https://www.academia.edu/45118779/Dwarf_Galaxies

7. Величина Космоса

25. фебруар 2021.

О савременој космологији и са становишта будуће теорије информације.

Увод

Космос је неограничено[40] пространство око нас. Остали називи су му свемир, васиона или универзум. Сматра се да је грађен од простора, времена и материје, можда од идеја попут математике [11], или од информација чија суштина је неизвесност [1].

Голим оком можемо видети око 5000 звезда, ужарених небеских тела сличних Сунцу. Удаљености међу звездама су огромне и мере се светлосним годинама (енг. ly – light year), путевима дугим приближно 9,6 милијарди километара који светлост пређе за годину дана брзином $c = 300$ хиљада километара у секунди. Иначе, астрономска јединица (au – astronomical unit) је просечна удаљеност Земље од Сунца (око 149 600 хиљада km). Парсек (pc – parsec, око 206 хиљада au) је удаљеност са које се једна au види под углом од једне лучне секунде, а мега парсек (Mpc) је милион парсека.

На небу видимо 88 сазвежђа (Велики и Мали Медвед, Шкорпион, Стрелац и друга), али звезде природније групишемо у јата (констелације) које су делови галаксија, а ове опет чине своја јата.

Сунце је на рубу једног од рукаваца наше Галаксије која се назива Млечни пут. Ми смо на око 26 хиљада светлосних година од центра Млечног пута чији пречник се процењује на 100 до 180 хиљада ly са 100 до 400 милијарди звезда и бар толико планета. Материја Галаксије у њеном ширем обиму орбитира брзином око 220 km/s са уједначеношћу која није у складу са Кеплеровим[41] законима. Са звездама око нас старим близу 13,8 милијарди година, колико има и сам свемир, крећемо се брзином 600 km/s у односу на вангалактичке референце.

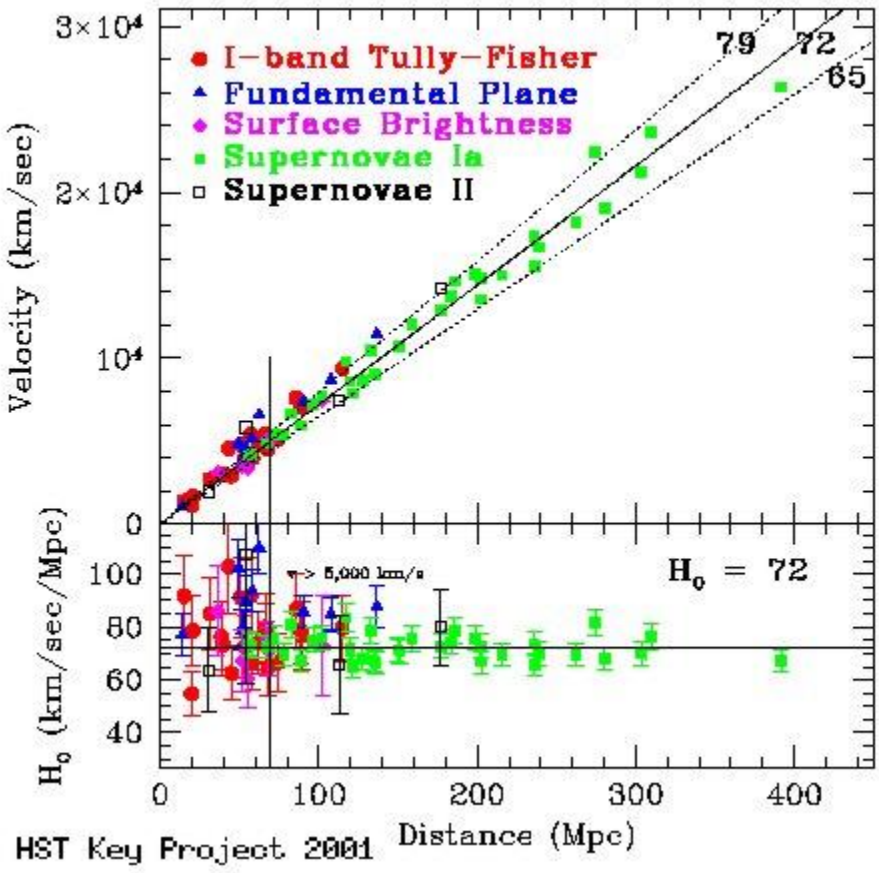
Ајнштајн[42] је 1916. са општом теоријом релативности предвидео ширење васионе, а Хабл[43] је (1924) приметио да постоје и друге галаксије осим наше и са Леметром[44] (1929) учествовао је у опажању и дефинисању ширења свемира, онога што се назива „Хабловим законом“[45]

$$v = H_0 r. \tag{1}$$

То v је просечна брзина удаљавања галаксија од нас изражена у km/s, r је удаљеност од нас у километрима, а $H_0 = 67{,}4$ km/s/Mpc (километара у секунди по мега парсеку) је Хаблова константа изведена из недавних мерења[46] космичког микроталасног зрачења. Када се Хаблова константа

[40] Zeilik & Gregory 1998.
[41] Johannes Kepler (1571-1630), немачки астроном и математичар.
[42] Albert Einstein (1879-1955), немачки-рођен теоријски физичар.
[43] Edwin Hubble (1889-1953), амерички астроном.
[44] Georges Lemaître (1894-1966), белгијски католички свештеник, математичар и астроном.
[45] https://en.wikipedia.org/wiki/Hubble's_law
[46] https://www.space.com/hubble-constant-measurement-universe-expansion-mystery.html

процењује на основу црвеног помака добијају се мало већи бројеви[47] приказани на следећем графу. Те разлике збуњују савремену космологију.



Цвики[48] је 1933. први открио „тамну материју“ приметивши да саме звезде не дају довољно привлачне гравитационе силе за круто ротирање галаксија. Разлике између теорије и опажања које су затим примећене и у другим галаксијама допуњаване су прашином и уопште познатим тамним небеским телима које телескопима не видимо, да је све бољом технологијом и астрономијом било схваћено да је и то недовољно.

Растојања

Због ограничене брзине светлости два лика који разговарају преко стола никада нису у тачно истој садашњости. Још старију прошлост далеких галаксија гледамо телескопом. Те опажене псеудо-реалности могу бити представљене неким системом K_o „опажених координата“, јер фикције такође припадају свету информација[49].

[47] https://www.cfa.harvard.edu/~dfabricant/huchra/hubble/
[48] Fritz Zwicky (1898-1974), бугарско-швајцарско-амерички астроном.
[49] [2], 3.21 Фикција

Додатно, ми сматрамо да са садашњошћу астронома упоредо теку и времена далеких небеских тела које он посматра и да сви догађаји, које не може видети, јер су му измакли у будућност других, припадају једном другачијем систему K_u „упоредних координата“. Овај додатни систем такође је нека псеудо-реалност, недоступна непосредном опажању.

Трећа претпоставка која нам је потребна је „космолошки принцип“, такође званична хипотеза, да се на сваком месту у васиони може замишљати посматрач коме је универзум изотропан[50] и хомоген[51]. Њих називамо „упореднима“ (енг. comoving). Уз то космологија дефинише и „упоредни систем координата“ (K_u) у коме ови посматрачи мирују. Сваком упоредном посматрачу придружује се и космолошко време. Имајући ово на уму, дефинишемо две врсте растојања[52].

„Опажено“ или сопствено (енг. proper) растојање R_0 је удаљеност између две регије простора коју дати астроном опажа. Како се свемир шири, обзервабилна дистанца између два упоредна посматрача расте током времена, а оно што они виде је све старија прошлост другога. За званичну космологију овакав третман такође[53] је теоријски, јер не познајемо „тренутно“, дакле упоредно, стање објеката. Светлости треба времена да однекуда допутује, током којег се свемир ширио, а на основу опажања израчунавамо одговарајуће упоредно растојање R_u.

„Упоредно“ (comoving) растојање је удаљеност изражена упоредним координатама. Упоредна дистанца између две регије свемира остаје стално иста $R_u = \text{const}$, док се опажена мења временом t. Отуда једначина

$$R_0(t) = a(t)R_u \tag{2}$$

где је временска функција $a(t)$ фактор раста (scale factor). У тренутку „Велике експлозије“ (Big Bang) било је $a = 0$, а подразумева се да је у текућем космолошком времену $a = 1$. Другим речима, у садашњости обе удаљености имају исту вредност.

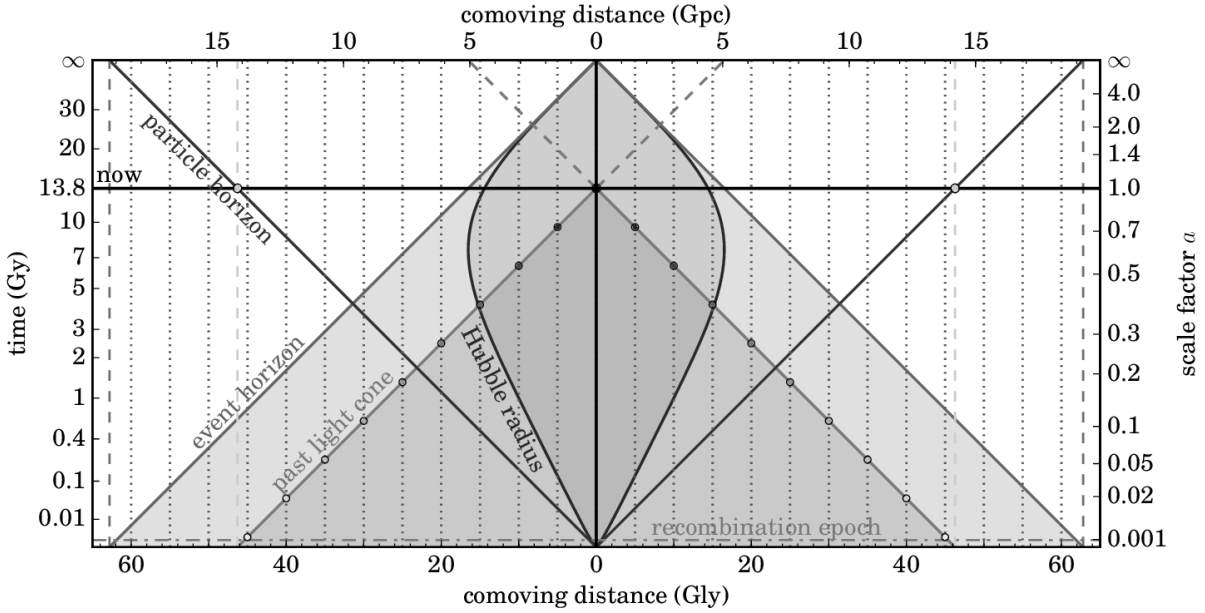
Промена опажене удаљености током времена назива се брзина рецесије v, за коју налазимо:

$$v(t) = \dot{a}(t)R_u = H(t)R_0(t) \tag{3}$$

где је стављено $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$. То је Хаблов закон (1), сада мање статичан.

На следећој слици[54] приказана су, на доњој линији (comoving distance) растојања у гига светлосним годинама (Gly) и на горњој у гига парсецима (Gpc). Космолошка времена приказана су на левој вертикалној оси, а одговарајући фактори раста на десној. Косе линије под углом 45° представљају зраке светлости које опажамо. Вертикална линија по средини је наша светска линија (упоредног посматрача на нашем месту), а хоризонтална (ознаке „now“) означава текуће космолошко време (13,8 милијарди година након Великог праска). У пресеку те две смо ми сада.

[50] Изотропија (грч. ἴσος „једнак“, τρόπος, „пут“) – једнакост у свим правцима.
[51] Хомогеност – једнакост кроз запремину, у свим тачкама.
[52] https://en.wikipedia.org/wiki/Comoving_and_proper_distances
[53] па га она, значи, признаје за псеудо-реалност
[54] https://arxiv.org/pdf/astro-ph/0310808.pdf



Тачкасте вертикале су „упоредне регије“ које би цртане са становишта „опажених дистанци“ требале да се шире, расипају у односу на нас (удаљавају од средње вертикале). Овде су приказане са становишта „упоредних растојања“ и према томе све су вертикалне. Заобљена линија која обилази нашу светску линију је „Хаблов радијус“, а област унутар су рецесионе брзине мање од брзине светлости c, области изван су брзине веће од c.

На горњој линији слике се види да је обзервабилна васиона око $14{,}26$ гига парсека, или исто на доњој $46{,}5$ у милијардама светлосних година, односно $4{,}40 \times 10^{26}$ метара, у свим правцима.

Хлађење

Вероватнији догађаји чешћи су и мање су информативни. Прво је неспорно (ваљда), а друго верујем да се може разумети без распричавања. У томе приметимо универзалну „штедњу неизвесности“ природе, коју називам „принципом информације“. Затим је видимо и у тежњи ентропије за растом. Спонтани прелазак топлоте са тела више на суседно тело ниже температуре, познат као Други закон термодинамике, представља настојање молекула да смање „количину неизвесности“ у свом осциловању.

Преносећи енергију осциловања својих молекула на околину, супстанца добија на ентропији, хлади се, а сада примећујемо и да она тако губи информацију. Та општа штедљивост са опцијама и неочекиваношћу настојање је за не-комуникацијом, или не-дејством, за тромошћу, а ја је називам принципом информације.

Има је и у тежњи ентропије за растом! Наиме, спонтани прелазак топлоте са тела више на суседно тело ниже температуре, познат као Други закон термодинамике, представља заправо усмеравање молекула ка смањењу ,,количине неизвесности'' у њиховом осциловању. Преносећи енергију

вибрирања сопствених молекула на околину, супстанци расте ентропија, она се хлади, а сада примећујемо да уједно губи информацију.

Свемир се хлади. Он је већ сада на свега неколико степена Келвина, дакле само неколико изнад апсолутне нуле – када (такорећи) престаје кретање. Савремена физика држи да на апсолутној нули престаје свако кретање (није баш тако, али рецимо да су близу). У тзв. Бозе-Ајнштајновом кондензату који се сматра петим агрегатним стањем, врло разређеног гаса на температури блиској апсолутној нули, смањује се кинетичка енергија атома. Добијање таквих постаје рутинска ствар у бољим лабораторијама, а оно што је овде битно је да светлост тамо може бити значајно успорена, да њена брзина може пасти на испод 20 метара у секунди!

Елем, свемир се шири и ентропија му расте, али можемо рећи и обрнуто. Штавише, можемо изједначити изјаве, сматрати их еквивалентним, да се свемир хлади, брзина светлости (садашњости) опада и да свемир видимо све већим! Можемо рећи и овако: ентропија супстанце расте зато што се информација супстанце смањује, а то зато што нестала информација (у једнакој количини) одлази у простор. Такође, зато што је информације простора више (и оне су честице) простор је све већи, путеви између галаксија све су дужи. Или, свемир је све ређи (супстанцом).

Епилог

Ово је наставак приче Велики прасак[55], а даљи наставак требале би бити можда метрике космоса. Намерно кажем у множини јер је већ из приложеног јасно да их има више. На пример, ту спадају простор-време упоредних координата, обзервабилних, упоредних са становишта датог астронома. Приметно је да савремена космологија више личи на научну фантастику него на сувопарну науку, али управо у томе је и део њене чари. Не треба је дирати брзоплето, не уклањати њену магију, бар док не будемо веома сигурни у оно што причамо.

[55] Big Bang, https://www.academia.edu/45088060/Big_Bang

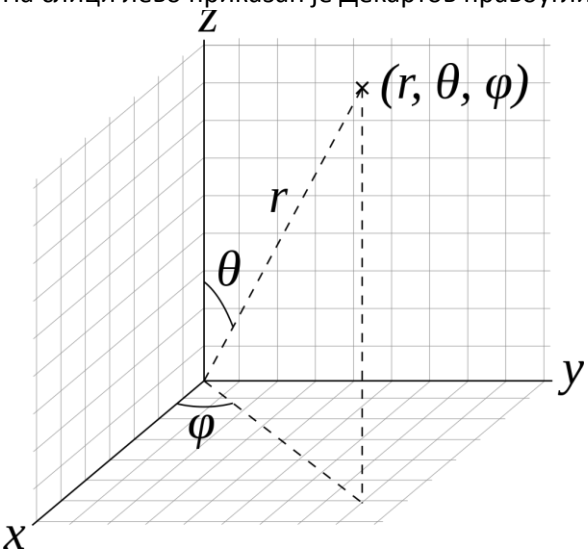
8. Метрике Космоса

1. март 2021.

Представљене су основне метрике простор-времена теорије релативности, Минковског и Шварцшилдова, са намером да текст буде увод за наставке. Додати су и коментари са становишта (моје) теорије информације.

Увод

На слици лево приказан је Декартов правоугли систем координата (xyz) и у односу на њега сферне координате ($x_1 = r, x_2 = \theta, x_3 = \varphi$) са везама:



$$x = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = r\cos\theta.$$

Квадрат линијског елемента, dl^2, израчунавамо према (Питагориној теореми) формулама:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$
$$dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2).$$

Исти резултат ове инфинитезималне дужине (dl) добијамо користећи доследно било коју од две дате формуле. Четврту, $x_4 = ict$, временску координату уводимо као пут који пређе светлост брзином приближно $c = 300$ хиљада километара у секунди (km/s) за време t множено имагинарном јединицом ($i^2 = -1$). Одговарајући елеменат равног простор-времена тако постаје:

$$ds^2 = dl^2 - c^2dt^2 \tag{1}$$

и такав је први пут употребљен у специјалној теорији релативности. То је метрика Минковског[56].

На пример, нека је S' инерцијални систем координата који се креће једнолико праволинијски (константном) брзином v дуж апсциса (x' и x оса) у односу на референтни систем S. Једнаки су линијски елементи, ds' и ds, редом сопственог посматрача (који мирује у S') и релативног (који мирује у S). Отуда:

$$ds'^2 = ds^2,$$

$$dl'^2 - c^2dt'^2 = dl^2 - c^2dt^2.$$

Како сопствени мирује ($dl' = 0$), а за релативног је тај у кретању брзином $v = dl/dt$, биће даље:

$$-c^2dt'^2 = dl^2 - c^2dt^2,$$

$$dt'^2 = dt^2 - dl^2/c^2,$$

[56] Minkowski space, https://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski_space

а отуда

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{2}$$

Ово је позната формула специјалне теорије релативности[57] за дилатацију времена. Док прође dt' сопственог времена, протекне dt релативног, а како из (2) следи $dt > dt'$ када год је $v > 0$, то за релативног посматрача часовник сопственог касни.

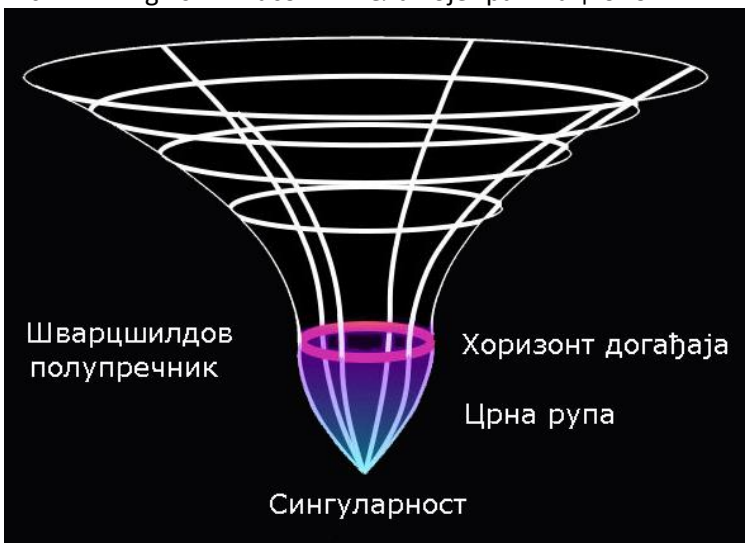
Може се показати да су релативне дужине у правцу кретања краће од сопствених онолико пута колико време успорава. Јединице дужина окомите на правац кретања не мењају се, па простор-време остаје „равно“, нулте Гаусове кривине[58]. Наиме, уздужна линија кретања је кружница бесконачног полупречника ($r \to \infty$) а њена реципрочна вредност је нула ($\kappa = 1/r \to 0$).

Шварцшилдова метрика

Решавајући Ајнштајнове опште једначине за централно симетрично[59] гравитационо поље Шварцшилд је (1915) нашао израз за растојање

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-\frac{r_s}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) - \left(1-\frac{r_s}{r}\right)c^2dt^2, \tag{3}$$

где је $r_s = 2GM/c^2$ тзв. Шварцшилдов полупречник, на следећој слици[60] десно, са универзалном гравитационом константом $G = 6{,}674 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2} и масом M тела које гравитационо привлачи.



Као што се види из датог израза, када би посматрани објекат био на удаљености Шварцшилдовог полупречника од центра силе, $r = r_s$, у називнику (првог сабирка) била би нула, па израз (3) не би имао смисла. Према томе, удаљеност $r = r_s$ је полупречник сфере, која се назива „хоризонт догађаја“, са „црном рупом“ унутра. На тој граници, хоризонту догађаја, релативне радијалне дужине и време исчезавају.

Уопште[61], узмимо да имамо једног удаљеног посматрача у систему S' са равном метриком (1) и једног у систему S унутар гравитационог поља са Шварцшилдовом метриком (3), биће:

[57] [8], 1.1.7 Специјална релативност
[58] Gravitation Multiplicity, https://www.academia.edu/44936839/Gravitation_Multiplicity
[59] [8], 1.2.10. Шварцшилдово решење
[60] https://universe-review.ca/R15-17-relativity03.htm

$$ds'^2 = ds^2,$$

$$dl'^2 - c^2dt'^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2,$$

где је уведена замена $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$, иначе уобичајена ради краћег писања. Када овде узмимемо да оба посматрача мирују, биће све дужине нуле ($dl' = dr = d\Omega = 0$) и добијамо

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}}. \tag{4}$$

Гравитационо поље успорава ток времена. Ако посматрач у пољу (у систему S) при томе кружи око центра брзином $v = rd\Omega/dt$, онда из исте једнакости следи додатно успоравање

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r} - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{5}$$

За разлику од кретања унутар поља, кретањем удаљеног посматрача (система S') брзином $v = dl'/dt'$ и мировањем унутрашњег ($dr = d\Omega = 0$) добијамо

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dt'^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2, \tag{6}$$

што значи да свако успоравање времена због гравитационог поља има неки еквивалент у инерцијалном праволинијском кретању одговарајућом брзином $v = c\sqrt{r_s/r}$ изван поља.

Овде је такође могуће показати да гравитационо поље скраћује радијалне дужине (у правцу центра силе) онолико пута колико време (4) успорава. Дужине окомите на радијалне исте су и зато кажемо да је простор-време гравитационог поља закривљен.

Стварање простора

Они случајни догађаји који се дешавају чешће вероватнији су. То је опис учесталости, ништа посебно, али чим је догађај вероватнији он је мање информативан. Када знамо да ће се нешто десити и то се деси, онда то и није нека велика вест. Ето из чега произилази начелна тежња природе ка мање информативним случајним догађајима, њена потреба да не емитује информацију ако не мора, те да избегава комуникацију где може.

Идеја развоја космоса ка већој извесности налаже да његове почетке видимо у већој неизвесности, такође да поставимо питање зашто свеукупна информација већ одавно није нестала. Одговори не овакво питање су закон одржања[62] и (хипо)теза да су информације основни елементи простора, времена и материје.

[61] https://web.stanford.edu/~oas/SI/SRGR/notes/SRGRLect9B_2013.pdf
[62] [2], 1,14 Еми Нетер

Информација је растућа функција количине неизвесности за коју важи закон одржања, а у избору мере остаје слободе за повезивања информације са ентропијом. Прва се начелно смањује док се друга спонтано повећава (знамо из термодинамике) и могуће је утегнути њихову везу[63], али то за сада није битно. Важније питање је парадокс нестанка информације уз закон њеног одржања.

Хартли (Hartley, 1928) је информацију дефинисао на једнако вероватним случајним догађајима као логаритам њиховог броја ($H = \log N$). Испада да стање неизвесности пре реализације и информација након – једнако износе, што није новост за математичку теорију информације и комуникације. Није нека новост ни да је неизвесност формално врста информације, али јесте да начело минимализма даје предност потенцијалној пред активном информацијом.

Да ће неизјашњавање неизвесности имати макар мало већу вероватноћу од реализације, односно нечињење над чињењем, води нас ка разумевању закона инерције помоћу поменутог принципа информације и уопште ка примећивању еквиваленције информације и физичког дејства[64]. То је добра подлога за следеће две важне тезе. Спонтани раст ентропије односи се на супстанцу, а информација коју супстанца губи одлази у простор-време. Зато простор и време расту.

Други начин изођење закључка о расту простора био би „гомилање биографија“ елементарних честица које путују свемиром, које при томе „не расту“ и њихове историје немају куда другде отићи у „информатичкој васиони“. О томе сам писао раније[65]. Полу-период распада неких елементарних честица, нарочито фермиона у бозоне, био би опет трећа прича.

Дубоки свемир

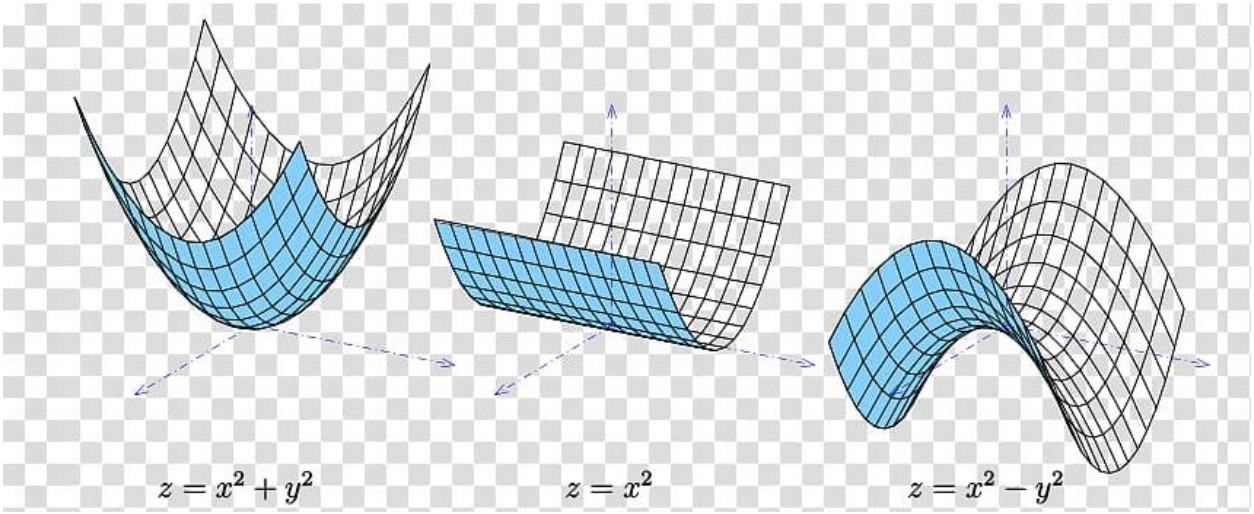
Оно што астроном посматра као „дубоки свемир“ састоји се из слојева концентричних сфера све даље историје што су им полупречници већи. Развојност свемира, која је иначе у складу са теоријом информације, чини да космос није симетричан по времену ако већ јесте по простору. То је особина која геометрију великих даљина чини другачијом од локалне, Шварцшилдове.

Размаци од астронома до галаксија сматрају се изотропним (једноликим у свим правцима) и рецимо да је то прихватљиво. Али свемир се шири и удаљености расту. Путовање неког објекта замишљеном кружницом, по астрономе видљивим местима, у настојању путника да одржи једнаку удаљеност до свог посматрача, завршило би неком спиралом налик Архимедовој. Оно геометрију обзервабилног (енг. proper) свемира одређује као хиперболну.

Наиме, кружница коју би дати астроном „видео“ око себе (замишљао) имала би већу дужину, што значи да је однос обима и пречника такве већи од пи ($\pi \approx 3{,}14$) и да је геометрија дубоког простора којег можемо гледати – негативне Гаусове кривине. На следећој слици, на трећој њеној фигури (хипар, $z = x^2 - y^2$), приказана је „седласта површ“. На таквој површи цртана кружница (геометријско место тачака једнако удаљених од центра) била би изувијана и истегнута. Однос њене дужине и полупречника био би такође већи од пи.

[63] [2], 2.24 Генерализација ентропије
[64] [1], 23. Дејство и информација
[65] [2], 2.18 Гомилање историје

Све геометрије Лобачевског, које се називају хиперболне[66] такве су. Оне имају негативну Гаусову кривину, јер су полупречници кружница уписаних у узајамно окомите равни седласте површи коначни и супротних смерова. На средњој фигури исте слике, без обзира што је површ умотавана у ролну ($y = x^2$), простор је еуклидски. Кружница на њој која би представљала једну од оса (ординату) има бесконачан полупречник, а то Гаусову кривину чини нултом. Зато би се таква површ увек могла размотати у равну, са круговима чији однос обима и полупречника је пи.



Коначно, на првој фигури ($z = x^2 + y^2$) је сферна геометрија[67] коју називамо и Римановом. Кружница описана по сфери била би краћа од еуклидске и однос њеног обима и полупречника био би мањи од пи. Слично би била кружница описана око централно симетричног гравитационог поља, поменутог Шварцшилдовог решења Ајнштајнових општих једначина. Радијалне јединице дужине (праваца кроз центар) скраћују се и износ полупречника постаје већи, али окомитих дужина (кружнних око центра поља) исте су, па је однос обима и полупречника круга мањи од пи. Гаусова кривина таквих геометрија је позитиван број.

Епилог

Тек сада долазе најзанимљивији делови (и најтежи рачунски), али да не бих био преопширан пресекао сам. У наставку требали су бити бар Фридманова и Геделова метрика, као два историјски најважнија решења Ајнштајнових општих једначина за космос, а онда и коментари са становишта теорије информације. Међутим, космологија се у међувремену развијала, а са теоријом информације настају и нови моменти, па те класичне објаве траже већу пажњу. Када једном расправимо све њихове разлике (ако икада) онда бисмо могли кроз слична питања трчати.

[66] Hyperbolic geometry, https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_geometry
[67] Spherical geometry, https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_geometry

9. Метрике Космоса II

6. март 2021.

Из разговора о метрикама космоса са становишта нове теорије информације.

Питање: Свемир се шири, све даље галаксије све брже одлазе од нас, али да ли на њима зато[68] време тече спорије од нашег?

Одговор: Не знам засигурно, чекам да видим нека мерења и радим на претпоставкама. Ако би било да на далеким галаксијама које се од нас удаљавају време тече (отприлике) једнако брзо као наше и да су им јединице дужине једнаке нашима, а да и тамо важи теорија релативности, онда би у случају да те галаксије мирују у односу на нас њихово време текло брже од нашег а радијалне (у правцима од нас) јединице дужина биле би веће. Та би разлика била таква да се може поништити са релативистичким (специјалне теорије) дилатацијама времена и контракцијама дужина.

Питање: На основу чега изводиш тако необичан закључак?

Одговор: То је дуга прича. Прво прочитај „1.2.8 Вертикалан пад“ из књиге „Простор-време“ [8] и примети да се исти поступак може применити на дубоки свемир.

Затим погледај „Пример 1.2.12. Извести Шварцшилдову метрику из (Ајнштајнових) једначина поља, полазећи од

$$ds^2 = -e^{2B(r)}c^2dt^2 + e^{2A(r)}dr^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2 + r^2 d\theta^2, \qquad (1)$$

где су $A(r)$ и $B(r)$ непознате функције удаљености r“, у наставку. Примети колико су у примеру широко постављени почетни услови, а да они ипак на крају дају Шварцшилдову метрику.

Са становишта далеке прошлости свемира ми бескрајно одлазимо, наша садашњост у односу на неку веома стару понаша се као када ми извана гледамо неко тело које пропада у снажно гравитационо поље, неко које би стално тонуло ка хоризонту догађаја црне рупе и никада, за нашег времена, не би стизало до тог руба на којем (у односу на нас) време стоји а радијалне дужине исчезавају, постају нулте.

Обрнуто, са становишта наше садашњости, далека прошлост космоса налази се на рубовима нама видљивог простора и даље, до којег не бисмо могли отпутовати јер би стално бежао од путника брзином светлости. Чак ни замишљеним времепловом, који би наше време враћао уназад, никада не би било могуће стићи до почетка „великог праска“, јер би се јединице дужине сопственог времена времеплова тако мењале да би то путовање у њему трајало бескрајно, иако се нама одавде чини да је космос стар свега 13,8 милијарди година.

[68] Због Специјалне теорије релативности.

Питање: Шта би налазио замишљени путник у прошлост космоса?

Одговор: Простор, време и материја састоје се од информација, а њихова суштина је неочекиваност, дакле новина и промена. Зато је очекивано да се космос мења. Идући назад у прошлост све је мање простора, гушћа је супстанца и више је црних рупа. Црне рупе су интегратори простора и времена, а са друге стране оне су попут ленгера[69] (сидро, котва), стациониране у простор-времену док се свет око њих креће.

Питање: А какви су изгледи да „црне рупе“ уопште не постоје?

Одговор: Слаби. Њих предвиђају Ајнштајнове једначине опште релативности, а те једначине произилазе и из принципа најмањег дејства[70] из којег следе све данас познате једначине теоријске физике. Много би требало „поправки“ чинити физици, које тешко да би све биле могуће, евентуалним одбацивањем идеје о црним рупама.

Питање: Јеси ли чуо за Геделов модел универзума?

Одговор: Да, то је један од најранијих изведених из теорије релативности [12]. Гедел је трагао за симетријама космоса како простора тако и времена и нашао занимљив и поучан пример метрике [13] који, доследно његовим претпоставкама, дозвољава и путовања у прошлост. Међутим, принцип информације захтева асиметрију времена. Она је принципијелнија развоју ка мање информативним, односно вероватнијим догађајима, што Геделов приступ може учинити само једним куриозитетом.

Питање: Да ли ти је позната Фридманова метрика?

Одговор: Јесте. Митра [14] у својој како каже „вежби“ полази од претпоставке изотропног и хомогеног простора и општег облика метрике, општијег од (1), на које примењује Ајнштајнове једначине поља да би добио ту познату метрику. Иначе сама идеја Фридманове метрике чини се јаком конкуренциом другим предлозима, бар сада док још увек чекамо кључна опажања.

Поједностављено речено, у тим (Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker) метрикама полази се од

$$r^2 d\Omega^2 = r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2 + r^2 d\theta^2, \tag{2}$$

дела просторног израза

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2, \tag{3}$$

да би се за $k = 0$ добио раван, еуклидски простор, за $k = 1$ закривљен и затворен сферни, а за $k = -1$ закривљен и отворен хиперболни. Ови трећи случајеви блиски су горе поменутом (1).

[69] Ленгер – метални предмет који брод баца у воду кад стане или пристане уз обалу ради одржавања равнотеже и спречавања кретања.
[70] [4], 2.5 Ајнштајнове опште једначине

Питање: Простор се разређује, а губи ли се информација при томе?

Одговор: Да, али постоје два начина да се ширењем свемира спаси закон одржања информације. Оба би могла бити актуелна.

Први је да се у складу са начелним минимализмом комуникације, односно интеракције, смањује само информација супстанце и да таква одлази у простор. То је доследно спонтаном расту (генералисане) ентропије и ставу (такође теорије информације) да више ентропије датог система значи мање информације.

Други је да „простор памти“ и да његово „сећање“ може деловати на нашу садашњост. Ово друго произилази опет из теорије информације према којој се простор, време и материја од ње састоје, од информација, укључујући и биографије елементарни честица које настају док честице путују свемиром. Како такве не расту, не примећујемо да постају све веће и веће током свог путовања, дакле не можемо рећи да оне нешто памте и тако гомилају информацију у себи, то расту простор и време на њиховом путу. Елементарне честице препуштају простор-времену своју историју.

Друго са првим усклађује претпоставка да садашњост добија тачно онолико информације из прошлости колико је губи због принципа минимализма информације, односно пораста ентропије.

Питање: Да ли сам разумео да кажеш да и време памти, или је то лапсус?

Одговор: Није лапсус, добро си приметио, памте обоје и простор и време, јер они су симетрични појмови у ширем гледању васионе, као 6-димензионалног континуума.

Једна временска димензија значила би „детерминистичку васиону“, какву (моја) теорија информације не претпоставља. Али ако додаш само једну димензију времена то ће бити недовољан компромис са претпостављеном „објективношћу случајности“ и требаћеш још једну.

Тачније, на сваку просторну димензију (колико год да их има у можда некој будућој теорији попут „теорије струна“) иде по једна временска димензија. Такође важе и симетрије између њих, при чему је $x = ict$, где на левој страни једнакости стоји просторна дужина која одговара десно производу имагинарне јединице ($i^2 = -1$), брзине светлости (приближно $c = 300$ km/s) и времена t потребног светлости да дату дужину пређе.

Елем, време памти и зато га космос има све више и тече нам све спорије. Ми то успоравања „стварања садашњости“ не можемо видети непосредно (као и много тога око себе што заправо не видимо непосредно) али наслућујемо и израчунавамо. Наиме, ако информације (супстанце) има све мање, има све мање случајних догађаја, а брзина протицања времена је мера количине таквих догађања. Ово све говорим са становишта „теорије информације“ која се још увек не разматра у званичној физици, штавише, која је тамо непозната (хипо)теза.

Питање: Постоји ли неки посебан проблем са „само једном димензиом времена“, или је та претпоставка сасвим произвољна?

Одговор: Да, постоји један тежак проблем са таквом претпоставком, а према томе и са детерминизмом самим. Неки процеси нису комутативни. Писао сам то више пута.

На пример, дати жмигавац и скренути аутом у лево, и скренути па сигнализирати жмигавцем – не морају довести до истог. Уопште, неким операцијама важан је редослед извођења, попут: „удвостручити број“ и „додати броју три“. У првој композицији било би $2x + 3$, а у другој $(x + 3)2$, па за $x = 5$ прва даје 13, а друга 16. Квантни процеси, тзв. квантне еволуције, репрезентације су оператора (апстрактне албгебре) и нису сви комутативни. Они некомутативни воде до „принципа неодређености“ чији посебан случај су познате Хајзенбергове релације неодређености.

Због енгзистенције некомутативности, теорија по којој има само један ток времена, по којој је простор-време само 4-димензионално и које би се такво могло сложити да „времена нема“ (што озбиљно разматрају неки физичари), читави модели савремене физике (теорије релативности и квантне механике) постају упитни.

Искључива једнолинеарност тока времена води нас у контрадикцију са егзистенцијом некомутативних временских процеса и тражи ревизију не само савремене физике, него она оспорава и алгебру у којој постоје некомутативни оператори. Зато сам некад одустао од идеје о каузалној реалности, поред осталог, а само да не бих упадао у увек исте бесконачне расправе са следбеницима такве, кажем да користим „хипотезу“ случајности.

10. Количина опција

8. март 2021.

Скраћени лакши одговори на чешћа питања у вези са теоријом информација. О логаритму, адитивности „количине опција“, уситњавању једнаких шанси и физичком деловању удруженим са информацијама.

Логаритам

Реална експоненцијална функција $y = b^x$, базе $b > 0$ и $b \neq 1$, узимаће само позитивне вредности $y > 0$; њој инверзно пресликавање је логаритам $x = \log_b y$. Важи и обрнуто, ако је дата логаритамска функција $y = \log_b x$, базе $b > 0$, $b \neq 1$ и нумеруса $x > 0$, онда је њој инверзна експоненцијална функција $x = b^y$. Укратко:

$$b^{\log_b x} = x, \;\; \log_b b^x = x. \tag{1}$$

Експоненцијална и логаритамска функција исте базе узајамно су инверзне.

Како је $b^0 = 1$ и $b^1 = b$, то из претходног следи:

$$\log_b 1 = 0, \;\; \log_b b = 1. \tag{2}$$

Такође из (1), због $b^{u+v} = b^u b^v$ налазимо $\log_b b^{u+v} = u + v = \log_b b^u + \log_b b^v$, тј.

$$\log_b (xy) = \log_b x + \log_b y. \tag{3}$$

Логаритам производа једнак је збиру логаритама, ако су логаритми истих база и када су сва три дефинисана. Непосредна последица је

$$\log_b x^n = n \log_b x. \tag{4}$$

Слично извођењу (3), из $b^{u-v} = b^u : b^v$ следи $\log_b b^{u-v} = u - v = \log_b b^u - \log_b b^v$, односно

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y. \tag{5}$$

Логаритам количника једнак је разлици логаритама, ако су сва три логаритма дефинисана и исте базе.

Може се видети да (4) не важи само за природне бројеве ($n \in \mathbb{N}$), већ и за све реалне ($n \in \mathbb{R}$). Доказ таквог поопштења често се налази у лекцијама реалних функција и овде га изостављам. Даље налазимо $\log_c a = \log_c b^{\log_b a} = (\log_b a) \cdot \log_c b$, а отуда

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}. \tag{6}$$

То је згодна формула за трансформацију логаритамских база.

Напомињем да у текстовима где користимо само једну базу, рецимо $e = 2{,}71828\ldots$, нема потребе да је наводимо у сваком логаритму. Друго, помоћу Ојлерове формуле

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{7}$$

где за имагинарну јединицу i важи $i^2 = -1$, могуће је аналогно (1) дефинисати комплексне логаритме. Такви су периодичне функције, попут косинуса и синуса.

Адитивност

Информација настаје из неизвесности. Више опција пре реализације случајног догађаја даће више информације након. Нека је $L(x)$ дата, за сада непозната, функција која представља „меру неизвесности“, посебну реалну количину једнако вероватних исхода $x \in \mathbb{N}$. У основи та функција је позитивна: за свако $x > 1$ је $L(x) > 0$.

Рецимо да је поменута позитивност прва особина ове мере неизвесности. Посебно, са само једним исходом, $x = 1$, нема неизвесности и $L(1) = 0$. Друго једнако очигледно својство функције $L(x)$ је да из $x < y$ следи $L(x) < L(y)$, што значи да је она растућа. Трећа особина је адитивност (сабирљивост) и њено објашњење је мало опширније.

Нека су А, односно В једнако вероватни исходи и нека они подразумевају даљи избор равноправних m, односно n различитих опција ($m, n \in \mathbb{N}$). Реализација оба исхода, А и В, садржавала би mn опција, количине $L(mn)$, док би количина појединих реализација А или В била $L(m)$ или $L(n)$. Адитивност функције $L(x)$ произилази из очекивања да укупна неизвесност исхода буде једнака збиру појединих неизвесности.

На пример, А и В су бацање фер новчића и коцке. Сам новчић има опције „писмо“ и „глава“, означимо их са П и Г, а коцка шест бројева од 1 до 6. Бацање обоје истовремено произвешће $2 \cdot 6 = 12$ резултата, равноправних елемента скупа {П1,П2,...,П6,Г1,Г2,...,Г6}. Доследно одржању количине неизвесности било би тражити да буде $L(12) = L(2) + L(6)$.

Уопште, за функцију $L(x)$ навели смо три захтева: I. да је $L(x) > 0$ за свако $x > 1$, дакле да је она позитивна; II. да из $x < y$ следи $L(x) < L(y)$, да је она растућа; III. да је адитивна

$$L(xy) = L(x) + L(y), \tag{8}$$

за свако $x, y \in \mathbb{R}$ када $x, y > 1$. Тада је $L(x)$ логаритамска функција (произвољне базе). Доказ позајмљујем из књиге [15].

За свако $x > 1$ и свако $r > 0$ постоји природан број $k \in \mathbb{N}$ такав да је $x^k \leq 2^r < x^{k+1}$. На основу овога и особине II је

$$L\left(x^k\right) \leq L(2^r) < L\left(x^{k+1}\right),$$

одакле се због III добија

$$k \cdot L(x) \leq r \cdot L(2) < (k+1) \cdot L(x).$$

Како је према I могуће дељење ових неједнакости са $r \cdot L(x)$, имамо

$$\frac{k}{r} \leq \frac{L(2)}{L(x)} < \frac{k}{r} + \frac{1}{r}.$$

Функција $\log x$, дате базе $b > 0$ и $b \neq 1$, има особине I – III, па и за њу важи претходно, тј.

$$\frac{k}{r} \leq \frac{\log 2}{\log x} < \frac{k}{r} + \frac{1}{r}.$$

На основу тога је

$$\left| \frac{\log 2}{\log x} - \frac{L(2)}{L(x)} \right| < \frac{1}{r},$$

за свако $r > 0$. Због произвољности r израз у апсолутној загради је нула. Отуда је

$$L(x) = \frac{L(2)}{\log 2} \cdot \log x = a \cdot \log x. \tag{9}$$

Тиме је доказано да је (8) логаритамска функција.

Међутим, када се „количина неизвесности“ разматра још детаљније или шире, побољшана функција информације, попут $L(x)$, неће сасвим доследно испуњавати поменуте услове I, II и III, што значи да сама логаритамска форма није довољна за њено представљање.

Уситњавање

Проширујући претходну сложеност подела, можемо замишљати да имамо $n = 1,2,3, \ldots$ једнако вероватних избора таквих да сваки од њих има по n_k, $k = 1,2, \ldots, n$, међусобно равноправних наставака, а да сваки k-ти наставак може имати наредних n_{kj}, $j = 1,2, \ldots, k$, међусобно једнаких опција, па и даље. Тада се намећу питања како ова уситњавања можемо објашњавати помоћу поменуте мере неизвесности и докле се са њима може стићи?

Информација је нарочита „количина опција“. За њену прву апроксимацију добро је послужила логаритамска формула (9), а њу даље појашњавамо бинарним тражењем. Број бинарних питања, на која се одговара са „да“ или „не“, потребних за откривање опције, такође дефинише исту информацију. Наиме, групу са $M = 2^n$ равноправних могућности делимо на два скупа сваки са по 2^{n-1} елемената и бирамо онај у којем је тражени избор. Након n корака подела и бирања, радећи са све мањим и мањим групама, излази скривена опција. Број корака $n = \log_2 M$ проглашавамо информацијом, тада бинарном у битима.

На пример, нека је број „7“ непознати замишљени, међу првих $M = 8$ природних бројева. Поделимо групу могућих (осам) бројева на два дела, на први скуп {1,2,3,4} и скуп других {5,6,7,8}. Поставимо питање „Да ли је тражени број у првом скупу?“. На одговор „не“ делимо други, опет на

два дела, први {5,6} и други део {7,8}. Постављамо исто питање „Да ли је тражени број у првој групи?“, на који је одговор опет „не“. Делимо и нову другу групу на два дела, на први скуп {7} и други {8}. На исто питање одговор је сада ,,да''. Како нема више подела, тражени број је „7“, а број подела $n = 3$. Број могућности је $M = 8$, а информација коју они носе је $3 = \log_2 8$.

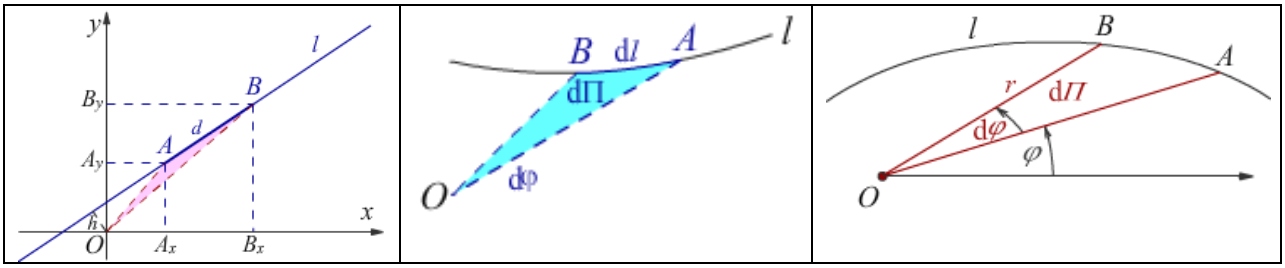
Да информација ($n = \log M$) не би дивергирала, потребно је да број могућности (M) дате ситуације буде ограничен. У том смислу су наше комуникације (интеракције) коначне, са најмањим (количинама) слободне информације. Ти најмањи пакети информације путују заједно са физичким дејством, које је такође такође атомизирано (квантовано).

Дејство

То што се информација „држи“ заједно са физичким дејством чини је физичком појавом. Квант дејства је Планкова константа ($h \approx 6{,}626 \times 10^{-34}$ m^{2}kg/s) које се појављује у изразу за енергију $E = hf$ честице електромагнетног зрачења (фотона), где је $f = 1/\tau$ фреквенција таласа, а τ је време једног периода. Отуда је елементарно дејство $h = E\tau$, производ енергије и трајања.

Укратко, информација је еквивалент нечему[71] што можемо сматрати „површином“, генералисаним производом енергије и времена. Чињеница да је комуникација формално једнака размени интеракција чини информацију у слободној форми (физичку честицу) саучесником сваке енергетске промене. То, поред осталог, значи да постоје носиоци гравитационе силе – гравитони, као што знамо да постоје носиоци електромагнетне силе – фотони.

Поред тога, пут честице од места A до B која се креће под дејством неке сталне централне силе O еквивалент је површини коју пребрише њен радијус вектор, од позиције $\overrightarrow{OA}$ до позиције $\overrightarrow{OB}$, за дато време. Успостављена веза између објеката A, B и O је комуникација. За то време се обавља енергетска интеракција због које кажемо да се тело A, односно B креће под дејством силе O.



На три слике горе, с лева у десно, (кривом) линијом l креће се честица (тело) из тачке A у тачку B тако да у једнаким временима површина (криволинијског) троугла ABO буде константна:

1. Линија l је права, а сила из O је нулта.
2. Линија је хипербола, а сила је одбојна.
3. Линија је елипса, а сила је привлачна.

[71] [1], 3. Потенцијал информације

Ако је трајекторија l коника (права, кружница, елипса, хипербола, парабола), онда из дате тачке O набој покреће сила која опада са квадратом удаљености и њени носиоци силе (баждарни бозони) крећу се брзином светлости. Обрнуто, ако путања l није коника онда сила не опада са квадратом удаљености и њени носиоци не путују брзином светлости. То сам расправио у [1].

Константност површина ABO на сликама долази од утицаја силе. Јасно је да би промена силе мењала ову површину, па сада знамо да она тада мења и дејство, информацију, а доследно и вероватноћу. Другим речима, уместо да кажемо да се овакви набоји (A, B) крећу под дејством одговарајуће силе (O), можемо рећи да се они путују својим трајекторијама (l) јер су таква кретања са становишта набоја највероватнија.

Немогућност промене вероватноће, информације и дејства без мењања силе указује нам на законе одржања поменутих појава, а запажање да у одсуству силе имамо праволинијско кретање (прва од три слике) – о инерцији и минимализму сваке од тих величина. Са друге стране, принципијелни минимализам информације видимо у максимализму вероватноће, у чињеници да су вероватније појаве чешће и мање информативне.

Посебно је питање честица које се не крећу брзином светлости. Оне имају сопствено време и отуда масу мировања, односно додатну инертност – опет због начелног минимализма комуникације. Међутим, то је посебна тема.

11. Количина опција II

11. март 2021.

Изводи из разговора о усклађености са језиком, слободним мрежама, усмеравању догађаја, а све у вези са информацији перцепције.

Језик

Објашњавам скаларни производ вектора помоћу вероватноћа и једне врсте статистике језика.

Питање: Можете ли ми објаснити „информацију перцепције“ на неком конкретном примеру?

Одговор: Да, узмимо енглески језик и рецимо компјутерску обраду података. Формирајмо листу од $n = 3000$ најчешће употребљаваних речи у неком широком узорку писаних текстова, филмова, говора. Свака реч има одређену фреквенцију, вероватноћу појављивања у датом узорку, k-та реч $(k = 1,2, \dots, n)$ има неку вероватноћу $p_k \in (0,1)$. Речи можемо поредати по опадајућим заступљеностима, тако да оне чешће имају мањи индекс k, али свакако је збир свих p_k јединица. Тиме смо дефинисали низ, односно вектор расподеле вероватноћа $\mathbf{P} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$.

Затим узмимо неког појединца који говори енглески и урадимо исто са његовим знањем и употребом енглеског, његовим речником као узорком. Добићемо вектор $\mathbf{Q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$. Информација перцепције тада је тзв. скаларни (унутрашњи) производ ових вектора

$$S = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots + p_n q_n. \tag{1}$$

Неке од познатих склоности људи који говоре језике даље се показују као последице математичких ставова о векторима.

На пример, један став[72] каже да је скаларни производ вектора није већи од производа интензитета вектора. Тај се производ зато (формално) може третирати као вероватноћа (која је број између нуле и један), а онда применити и „принцип вероватноће“ (ја сам измислио назив), да су вероватнији догађаји чешћи. Затим долази закључак да ће „општи“' и „лични“ језик тежити повећању тог резултата, скаларног производа, односно „информације перцепције“.

Како је (скаларни) производ то већи што је боља „усклађеност“ компоненти вектора, тј. чланова низа, а највећа је када су оба поредана по истом редоследу (опадајућем или растућем), то ће се „језику“ прилагођавати „особа“, ако се овај први недовољно прилагођава другом.

Примети да се исто може применити (израчунати) за понашање појединца у односу на понашање групе. Тако настаје „спонтани синхроницитет“, иначе одавно примећена али још увек недовољно схваћена појава адаптације јединке. Међутим, теорија информације перцепције много је универзалнија. Њен формални модел добро функционише у различитим примерима друштвених

[72] [16], Лема 1.2.49 (Коши-Шварцова неједнакост), с. 128.

и природних наука, а посебно и у квантној механици (која је препуна интуитивно тешко сварљивих резултата).

Слободне мреже

Чворови са једнако вероватним повезницама стварају велике мреже[73] са степеном расподелом вероватноћа. Оне су карактеристичне за интернет конекције, електронске водове већих регија, уопште познанства људи, па и слободна тржишта. Такве спонтано израстају у релативно мали број места (концентратора) са много веза и остатак од њих много са мало веза. Називамо их слободним мрежама (енг. scale-free networks).

Питање: Зашто се на слободном тржишту стварају малобројни много богатији од осталих, кажу да ти знаш?

Одговор: Да, нисам сам, то се зна. У питању је спонтани процес стварања тзв. слободних мрежа. Када су повезнице мреже (чит. токови новца и роба) равноправни, онда малобројни чворови (центри размена) постају имаоци све више и више линија. Чворови са више њих тако их добијају још више, а они сиромашни остају кратких рукава.

Познато објашњење иде помоћу вероватноће. Када додајеш нову повезницу, а све су једнако вероватне, изгледније је да ће она припасти чвору који таквих има више. Проследио сам му и додатни прилог са детаљима (овде небитан).

П: Добро, прелистао сам, то је нешто начисто са вероватноћом, али рекоше да ти знаш и другачије објашњење, наводно са неком новом теоријом. Да ли је то истина?

О: Можда, то би могла бити „теорија информације“, али она је још увек моја приватна ствар. Верујем да знам више начина, а ево једног, укратко, помоћу „информације перцепције“.

Посматрајмо (1) када је број сабирака (n) велик. Нека је опет ($p_k = x_k^2$) норма

$$\|\mathbf{x}\| = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \tag{2}$$

и за вектор $\mathbf{y}$ (односно $\mathbf{Q}$) слично, а нека су све ове вероватноће уједначене, константне. Тада, када је приближно $p_k = q_k = 1/n$, збир S је све мањи број што је n већи. Наиме, из

$$S = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0, \;\; n \to \infty, \tag{3}$$

следи да се вероватноћа скаларног производа S смањује са растом броја сабирака. Ако прве вероватноће (компоненте вектора $\mathbf{P}$) представљају затечено стање мреже, а друге (вектор $\mathbf{Q}$) нове чланове, онда ће мрежа „избегавати“ раст који води равномерности (3).

[73] [2], 1.6 Једнакост

Спонтано ће се формирати мали број сабирака велике вероватноће и велики број сабирака мале вероватноће – да би се увећао производ S – што онда интерпретацијом постаје познато тврђење о расту ових мрежа у мали број чворова са много веза и велики број чворова са мало веза.

Да ће се скаларни производ (1) заиста повећавати сваки пут када по два његова једнака сабирка, $S = x^2 + x^2 + w$, заменимо са два неједнака сабирка, $S' = (x+a)^2 + (x-a)^2 + w$, при чему остатак збира w остаје исти у оба, видимо из следећег:

$$S' = (x+a)^2 + (x-a)^2 + y = 2x^2 + 2a^2 + w > 2x^2 + w = S. \qquad (4)$$

На пример, $0{,}6^2 + 0{,}4^2 > 0{,}5^2 + 0{,}5^2$, или $0{,}5^2 + 0{,}3^2 + 0{,}2^2 > 0{,}33^2 + 0{,}33^2 + 0{,}33^2$, што је лако проверити. Додатно приметимо да разлика $S' - S = 2a^2$ расте са повећањем неједнакости сабирака, што значи да се спонтаност овог раста наставља.

Када су у питању слободне мреже, неспутано удруживање, здружени систем настојаће да се формира тако да не буде равноправности чворова, а неравноправност ће тежити даљем развоју. Интерпретацијом разумећемо да настају малобројни веома „богати“ наспрам многобројних „сиромашних“ и да постоји природна тежња „слободног тржишта“ у даљем повећању разлика међу њима.

Усмеравање

Теорија информације полази од претпостављене случајности. Међутим, без обзира што она није у правом смислу детерминистичка, теорија коју заговарам предвиђа развијање космоса ка већој узрочности – било да пођемо од егзистенције случајних догађаја у ретким ситуацијама, или да негирамо крајњу, строгу извесност у сваком случају. То је последица „принципа вероватноће“ према којем се настоје релизовати вероватнији исходи.

У том смислу детерминизам (каузалност) можемо сматрати последицом случајности. Обрнуто тешко, осим рецимо када у основи „случајности“ лежи ограничење наших перцепција наспрам бесконачних узрока. Међутим и тај обрнути случај тема је теорије информације.

Питање: Шта је боље за развојност, неред или организација?

Одговор: То је као да ме питаш шта је боље за воду (H_2O) кисеоник или водоник, а одговор би био исти, не иде без оба. Објаснићу то са становишта „информације перцепције“ у њеном основном изразу сличном (1).

Интелигенцију $I = S/H$ сматрамо таквом способношћу јединке која која је пропорционална њеним способностима бирања S а обрнуто пропорционална околним ограничењима H. Отуда је $S = IH$, а вредност је везана за посебну ситуацију, један посебан проблем са којим се субјект суочава и који решава.

Претпоставимо ли да индивидуа перципира $n \in \mathbb{N}$ различитих ситуација које може видети као проблем и решавати их, онда имамо толико $(k = 1,2, \dots, n)$ њених посебних способности $S_k = I_k H_k$. Њихов збир

$$S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n \tag{5}$$

је укупна информација перцепције дате особе.

Са друге стране, због закона одржања[74], има смисла дефинисати интензитет, укупну меру како интелигенције тако и хијерархије који учествују у информацији перцепције (5). То не мора бити прост збир, како „интелигенција“ I_k тако нити „хијерархија“ H_k, па ни „Питагорина теорема“ (корен збира квадрата), него било шта из богате ризнице математичке теорије мере.

Интелигенција је прилагодљивија величина, пластичнија је од хијерархије у већини случајева, па је особа та која се адаптира да би била успешнија, а ређе обрнуто. Због одржавања количине дотичне интелигенције мање-више непромењеном, она се може организовати тако што ће устројити своје дневне рутине (време устајања и легања, јела, распоред алатки са којима ради, контакта са другим субјектима, метода рада) са циљем ослобађања вишка способности за најважније у својој каријери.

Слично важи за колектив. Интелигенција је тада особина групе, а хијерархија опет нешто изван тог субјекта. Због те пластичности интелигенције наспрам околних ограничења, израз „ефикасност“ у војсци, предузећу, локалној самоуправи, има тежину какву знамо да има. Поредио сам је раније[75] са кобасицом стиснутом са једне стране да би на другој експлодирала.

Нажалост, околина се мења. Она се мења и на непредвидљиве начине, па ефикасан систем који те промене покушава пратити пре или касније доспева у ћорсокак. Као у оној изреци да нас и путеви поплочани добрим намерама могу одвести у пакао. Ловац ће надмудрити звер својим вишком интелигенције, типичне за оригиналност која се не налази на зацртаним путевима, за разлику од рутина.

П: Има ли извесности у томе да ефикасан систем пре или касније застарева?

О: Да, а доказ тога потражи у Геделовој теореми немогућности. Организација која би била тако ефикасна да не застарева, била би способна да се прилагођава свакој промени. Али таква не би била могућа, јер промене знају бити непредвидљиве за сваки унапред дати систем ограничења, попут истина које се ни у какав концепт логике (нпр. аритметике, алгебре, математике) не могу све сместити, па ће се сваки начин организовања на крају показати неуспешним.

Материјални свет полако губи информацију. Ентропија супстанце космоса расте док њена информација опада[76] и одлази у простор који је све већи. Постајемо средина чије се унутрашње уређење побољшава, извесности расту и све више личимо на некога ко затвара прозоре и врата

[74] информације и вероватноће
[75] [2], 2.3 Информација перцепције I
[76] званична физика не би се са мном око овога сложила

удаљевајући се од ваљштине. При томе спољне неизвесности неће нестајати, него ће нас се само мање тицати, али тај процес не иде до самог краја, до потпуног нестанка информације.

Уз претпоставку да се простор, време и материја састоје од самих информација, а да је суштина ове неизвесност, а све то заједно са законима одржања, не иде закључак да на крају непредвидљивост може сасвим нестати. Са таквом, сваки ма како обезбеђен, сигуран и ефикасан систем правили, управо зато што ће имати више ограничења од ваљског света, морати ће застаревати.

П: Ако замислимо систем велик као читава васиона. Може ли онда бити да он не застарева?

О: Не. Ма колика била васиона, она је такође нека информација и, према томе, неизвесност ка свом окружењу. Зато је није могуће до краја предвидети и описати, нити је могуће осмислити тако да њени односи буду унапред прорачунати. У том смислу ни сама васиона није нити може бити довољно организован систем који би могао да „не застарева“.

Информација перцепције

Из скаларног производа вектора можемо извући различите интерпретације, а међу њима пронаћи ћемо и различита објашњења информације перцепције. Забуну око таквих садржаја најчешће праве наше предрасуде у схватању информације.

Питање: Како је могуће да израз „информација перцепције“ користиш и за нешто што би пре требало називати „вероватноћом перцепције“?

Одговор: Јасно ми је питање, добро је постављено. Апсурд замене речи „вероватноћа“ и „информација“ долази из њиховог претпостављеног „јасног и различитог“ смисла. Вероватнији догађаји мање су информативни; прва имплицира реализацију већих вредности, друга мањих. Али, није све[77] у вези са њима тако црно-бело.

Када је неки догађај A скоро известан и вероватноћа $p = P(A)$ да ће се он десити приближно је један ($p \to 1$), онда је супротан догађај $\overline{A}$ скоро немогућ и вероватноћа да се он неће десити $q = P(\overline{A})$ приближно је нула ($q \to 0$). Уопште је $p + q = 1$, па на основу функционалне анализе (развојем логаритамске функције у ред) добијамо релацију

$$q = -b \cdot \log p, \tag{6}$$

где је $b > 0$ нека константа која одређује мерну јединицу информације.

Према томе, у сабирцима информације перцепције (1) други фактори могу бити вероватноће (да се дати догађаји неће десити), чиме они постају информације реализације истих. Што су такви догађаји више „немогући“ њихова вероватноћа боље апроксимира Хартлијеву информацију (логаритам веровање) њихове негације, а такве су углавном забране природних закона и чврсте хијерархије.

[77] [1], 14 Неодређеност

Дакле, када говоримо о „информацији перцепције“ у основном смислу, као о скаларном производу „интелигенције“ и „хијерархије“, онда се циља на такве изразе.

Други пример је Шенонова информација

$$S = -p_1 \log p_1 - p_2 \log p_2 - \cdots - p_n \log p_n, \tag{7}$$

где је p_k расподела вероватноћа, а S је средња вредност (математичко очекивање) њихових појединих информација. Избор базе логаритма остављам читаоцу.

Логаритми бројева $p \in (0,1)$ негативни су и Шенонова информација је позитиван реалан број. Када први фактори чине опадајући низ, други чине растући, па тај израз S представља својеврстан минимум. Када би ови фактори били усаглашени тако да оба чине опадајући низ, или оба растући, збир сабирака би био максималан. Напротив, овакав изражава минимализам средње вредности информација расподеле вероватноћа.

Када би број могућности расподеле вероватноћа (7) био веома велики ($n \to \infty$), а вероватноће мање-више биле уједначене, онда би према претходном могли писати $p_k = -\log q_k$, редом за свако $k = 1,2,\dots,n$, где су $q_k \to 1$ вероватноће да се k-ти догађај неће десити. Тада би за „информацију перцепције“ могли рећи да представља скаларни производ вектора компоненти који нису вероватноће, него су информације.

12. Количина опција III

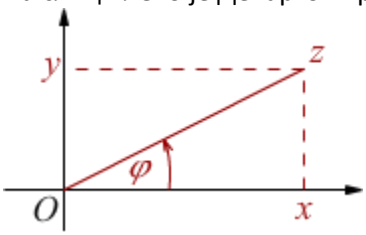
14. март 2021.

Наставак теме „количина опција“ сада на комплексне бројеве, векторска множења и корелацију.

Комплексни бројеви

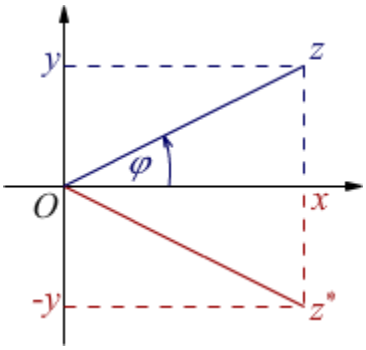
На слици лево је Декартов правоугли систем координата Oxy и у њему тачка $z = (x, y)$. Ставимо

$$z = x + iy,$$



где је i имагинарна јединица за коју важи $i^2 = -1$, чиме z постаје комплексан број, а раван Oxy комплексна. За разлику од скупа реалних бројева $\mathbb{R}$, за скуп комплексних ознака је $\mathbb{C}$, иста као и за комплексну раван. Приметимо, $x, y \in \mathbb{R}$, али $z \in \mathbb{C}$.

Имагинарна јединица има позицију $i = (0,1)$, док су координате реалне јединице $(1,0)$. Као што знамо, коњуговано комплексан број броја $z = x + iy$ је број $z^* = x - iy$, на следећој слици десно.



Апсциса (x-оса) је оса симетрије коњуговано комплексних бројева, па ће тачке $f^*(z)$ и $f(z)$ бити осно симетричне у односу на њу, за сваку реалну функцију $f(x)$, а отуда $f^*(z) = f(z^*)$. Зато је f^*f реалан број, лежи на апсциси, јер је $(f^*f)^* = f^*f$.

Посебно ово видимо из $z^*z = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$. Из тога следи да се квадрат модула комплексног броја, његове тзв. апсолутне вредности, може дефинисати помоћу удаљености тачке, која га у комплексној равни представља, од исходишта:

$$|z| = \overline{Oz} = \sqrt{z^*z}.$$

Та дефиниција доследно важи и за реалне бројеве.

У поларним координатама $(Or\varphi)$ запис тачке $z = x + iy$ постаје $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, а њој коњуговано комплексне $z^* = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$, где је $r = |z|$. То се уобичајено и лако добија из трансформација Декартових координата у поларне, за чије извођење је довољна тригонометрија правоуглог троугла. Мало је сложенији доказ једнакости тзв. $\operatorname{cis}\varphi = \cos\varphi + i\sin\varphi$ функције

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,, \tag{1}$$

коју је први нашао Ојлер[78] и која се по њему назива. Ојлер је познат по великом доприносу развоју степених редова, приказивању функција у облику збира бесконачно много сабирака, попут:

$$\begin{cases} e^w = 1 + \frac{w}{1!} + \frac{w^2}{2!} + \cdots + \frac{w^n}{n!} + \cdots \\ \cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \cdots (-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\ \sin\varphi = \frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \cdots (-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \end{cases} \tag{2}$$

[78] Leonhard Euler (1707-1783), швајцарско-немачко-руски математичар.

одакле множењем синуса имагинарном јединицом и сабирањем са косинусом, па стављајући $w = i\varphi$ добијамо (1). Ојлеров број $e = 2{,}71828\ldots$ је ирационалан трансцедентан.

Полазећи од (1), дефиниције логаритма[79] и Хартлијеве информације, могуће је дефинисати „генералисану информацију“, штавише препознати је у решењу Шредингерове једначине

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\ \psi(\boldsymbol{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t), \tag{3}$$

где је ψ таласна функција честице на месту $\boldsymbol{r}$ у тренутку t. Решење за честицу импулса $\boldsymbol{p}$ или таласног вектора $\boldsymbol{k}$, са угаоном фреквенцијом ω или енергијом E, дато је комплексном равни таласа

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = Ae^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} = Ae^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)/\hbar}, \tag{4}$$

са амплитудом A и $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$ (или еквивалентно $E = \frac{p^2}{2m}$) у случају да честица има масу m, односно $\omega = kc$ за честицу без масе (мировања).

Множења

Сваки низ $n \in \mathbb{N}$ бројева може се представити вектором $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ неког S_1 векторског простора ($Ox_1x_2\ldots x_n$). У еуклидском смислу, интензитет, или норма вектора је његова дужина

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}, \tag{5}$$

а уопште то је нека величина из богате ризнице теорије мере. Свакако, вектор је нулти када му је интензитет нула, а „већи“ вектор већег је интензитета. Промена система не мења норму.

Свака два не-нулта вектора, попут поменутог $\boldsymbol{a}$ и неког $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, одређују само једну раван $O\boldsymbol{ab}$, као на следећој слици. Они припадају новом систему S_2 координата Oxy, где је:

$$\overline{OA} = |\boldsymbol{a}| = a,\ \overline{OB} = |\boldsymbol{b}| = b;\ A = (A_x, A_y),\ B = (B_x, B_y).$$

При томе је између датих вектора сачуван угао

$$\varphi = \sphericalangle(AOB) = \beta - \alpha;\ \alpha = \sphericalangle(xOA),\ \beta = (xOB).$$

Окомита пројекција тачке B на линију OA је тачка B', а дужина одсечка $\overline{OB'} = \overline{OB}\cdot\cos\varphi$. Скаларни (унутрашњи) производ датих вектора има исту вредност у оба система

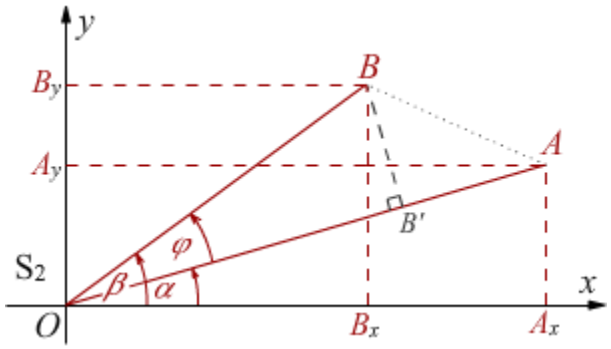
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi. \tag{6}$$

У полазном, користећи особину ортогоналности сваког пара од n координатних оса и зато што је $\cos 90° = 0$, лако добијамо

[79] 10. Количина опција

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n, \tag{7}$$

а то је скалар (број) једнак (6).



Приметимо да је површина Π троугла OAB на слици једнака полупроизводу основице $\overline{OA}$ и висине $\overline{BB'}$. Како је $\overline{BB'}=\overline{OB}\sin\varphi$, дефинишемо псеудоскаларни[80] производ

$$\boldsymbol{a}\therefore\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi \tag{8}$$

и њиме површину $\boldsymbol{a}\therefore\boldsymbol{b}=2\Pi(OAB)$. Иста површина троугла OAB може се добити одузимањем површине троугла AOA_x од збира површина троугла BOB_x и трапеза ABB_xA_x , дакле:

$$\Pi(OAB)=\tfrac{1}{2}B_xB_y+\tfrac{1}{2}\big(B_y+A_y\big)(A_x-B_x)-\tfrac{1}{2}A_xA_y=\tfrac{1}{2}\big(A_xB_y-B_xA_y\big).$$

Уведемо ли ознаку

$$[A,B]=A_xB_y-B_xA_y, \tag{9}$$

коју називам „комутатор“ тачака $A(A_x,A_y)$ и $B(B_x,B_y)$, биће $\boldsymbol{a}\therefore\boldsymbol{b}=[A,B]$. Комутатор тачака, односно псеудоскаларни производ заправо је интензитет векторског производа вектора $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$.

Информацију перцепције[81] разумемо на начин скаларног производа (6) рецимо када су коефицијенти оба вектора вероватноће, у крајњем случају када вектори $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ представљају расподеле вероватноћа, па њихов већи производ значи изгледнију појаву. Насупрот томе, информацију перцепције[82] боље је разумети на начин псеудоскаларног производа (8) када она представља на пример „једнаке површине које радијус вектори планета пребришу у једнаким временима опходећи око Сунца“ (Други Кеплеров закон).

Корелација

[80] [3], 2.4.4 Псеудоскаларни производ, стр. 91.
[81] 11. Количина опција II
[82] [3], 2.4.7 Потенцијал информације

У већим градовима људи брже ходају, тамо где људи брже ходају већи је проценат кардиоваскуларних болестију. То је један новији пример теже уочљиве корелације. Познатије су оне попут, што више трчимо више калорија сагоревамо, што је дужа коса на њу више шампона трошимо, или солећи храну више имаћемо већи крвни притисак. Приметимо да не важи увек обрнуто, на пример може се имати повишен притисак и без преслане исхране.

У уџбеницима статистике, када се проучава корелација и истиче могућност извођења погрешних закључака на основу ње, често се спомиње појава уочена у Копенхагену неколико година након Другог светског рата. Примећена је позитивна корелација између броја новорођене деце и броја рода које су се гнездиле у том граду. Међутим, она не значи да роде доносе децу, него је последица преселења становништва са села у град у времену након рата. Са пристиглим новим становништвом десио се повећан број новорођене деце и изградња кућа са димњацима на које су додатне роде могле постављати своја гнезда.

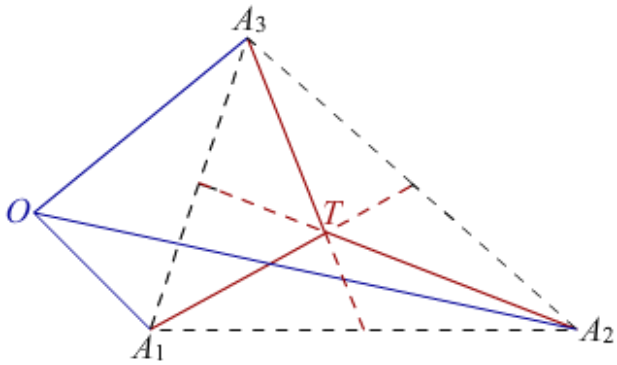
Уопште, корелација (лат. con = са, relatio = однос) је међуоднос или међусобна повезаност две различите појаве представљене вредностима две варијабле. Нека су дате прва и друга својим низовима података, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. За сваки од низова посебно налазимо средњу вредност, њихову властиту тежишну вредност:

$$\overline{a} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\ \overline{b} = \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}. \tag{10}$$

Од компоненти вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ одузмемо њихове средње вредности. Добијамо нове коефицијенте $a'_j = a_j - \overline{a}$ и $b'_j = b_j - \overline{b}$ редом за индексе $j = 1,2,\dots,n$, нова два вектора:

$$\boldsymbol{a}' = (a_1 - \overline{a},\ a_2 - \overline{a}, \dots, a_n - \overline{a}),\ \boldsymbol{b}' = (b_1 - \overline{b}, b_2 - \overline{b}, \dots, b_n - \overline{b}). \tag{11}$$

Шта се тада догађа приказано је поједностављено ($n = 3$) на следећој слици лево.



Троугао $A_1A_2A_3$ дефинише једну раван и њоме један систем координата. Тачка T је тежиште троугла, а тачка O је исходиште система координата. Важна нам је само једна од оса тог система и пројекције свих тачака (са слике) на ту осу. Компоненте првог од горе датих вектора, вектора $\boldsymbol{a}$, су редом:

$$a_1 = \overline{OA_1},\ a_2 = \overline{OA_2},\ a_3 = \overline{OA_3}.$$

Оне постају компоненте тежишних вектора:

$$a'_1 = \overline{TA_1},\ a'_2 = \overline{TA_2},\ a'_3 = \overline{TA_3}.$$

Слично је објашњење за вектор $\boldsymbol{b}$.

Израчунавамо интензитете ових вектора:

$$a' = |\boldsymbol{a}'| = \sqrt{a'^2_1 + a'^2_2 + \cdots + a'^2_n},\ \ b' = |\boldsymbol{b}'| = \sqrt{b'^2_1 + b'^2_2 + \cdots + b'^3_n}. \tag{12}$$

Према Коши-Шварцовој неједнакости, скаларни производ два вектора није већи од производа њихових интензитета ($\boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{b}' \leq |\boldsymbol{a}'||\boldsymbol{b}'|$), па је коефицијент корелације

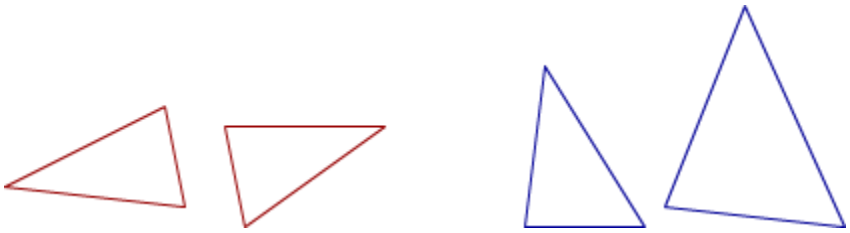
$$r = \frac{\boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{b}'}{|\boldsymbol{a}'||\boldsymbol{b}'|}, \tag{13}$$

реалан број из интервала $(-1, +1)$. Када је $-0{,}20 \leq r \leq +0{,}20$ повезаност је никаква или незнатна. Када је $0{,}20 \leq |r| \leq 0{,}40$ повезаност је лагана. Када је $0{,}40 \leq |r| \leq 0{,}70$ повезаност је стварна или значајна. Када је $0{,}70 \leq |r| \leq 1{,}00$ повезаност је висока или врло висока.

Израчунавање коефицијента корелације (13) типичан је задатак статистике. Подаци се тада посматрају упарени:

$$(a_1, b_1),\ (a_2, b_2), \ldots,\ (a_n, b_n), \tag{14}$$

а веза са „тежиштем“ попут оне на претходној слици није битна. Међутим, када посматрамо два таква тежишта (n-торке тачака) са одговарајућим тежишним векторима (потезима од тежишта до тачака, темена) и темена (тачке), можемо запазити њихове различите орјентације. Орјентацију корелације можемо пресликати на облике, не само на бројеве, како се види на следећој слици.



Прва два троугла (црвена) су у негативној корелацији, а следеће два (плава) у позитивној. При оваквом визуелном упоређивању, аналогно израчунавању корелације, није битна величина троуглова већ само њихова геометрија. Посебан начи разумевања корелације, наравно, је информација перцепције.

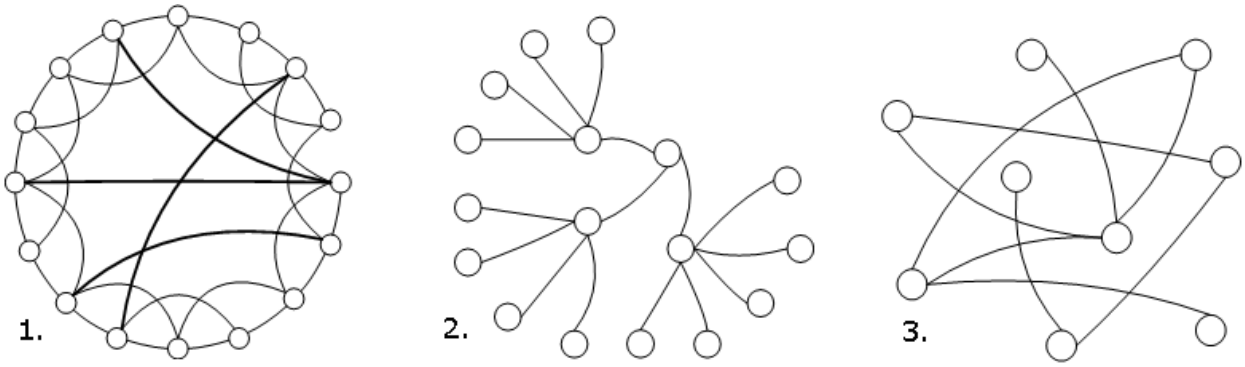
13. Препознавање облика

О три врсте мрежа и корелацији.

17. март 2021.

Слободне мреже

Теорија графова је област математике веома заступљена и у информатици. Њен је циљ проучавање особина тачака, односно чворова или врхова (енг. nodes), повезаних линијама, или гранама. Најважнија нама три типа графова су „мреже“ приказане следећом сликом.



Прва са лева је „мрежа малог света“ (енг. small-world network), врста графа у којем већина чворова нису непосредни суседи, али њихови суседи то углавном јесу. Претежан број врхова те врсте оптерећен је великим бројем линија зарад краћих путовања између чворова. Изражено укупним бројем тачака N мреже, просечан број повезница двеју је

$$L_1 \propto \log\log N. \tag{1}$$

На пример, у бази природног логаритма $\mathrm{e} = 2{,}71828\ldots$, за број чворова $N = 10^8$, налазимо $\log N = 18{,}4207$ и $L_1 = \log 18{,}4207 = 2{,}91347$. Дакле, треба (у просеку) мање од три корака до произвољног другог места мреже „малог света“ са сто милиона позиција.

Друга, средња те слике је „слободна мрежа“ (scale-free network). Средиште, концентратор или „гомила“ мреже (hub) је чвор чија бројност веза знатно премашује просек. Таква мрежа је неки оптимум оптерећености повезницама и дужине путева између чворова

$$L_2 \propto \frac{\log N}{\log\log N}. \tag{2}$$

На пример, за природни логаритам и број чворова из претходног случаја (базе e и $N = 10^8$) сада добијамо $L_2 = 6{,}32258$. Кроз слободну мрежу са сто милиона чворова стиже се са око шест корака између два произвољна чвора.

Нови чвор слободне мреже вероватније се веже за чвор са више повезница. То управо зато што су вероватноће повезница једнаке. Због равноправности грана нови врхови упућују се на постојеће, са вероватноћама пропорционалним броју присутних

$$p_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j}, \tag{3}$$

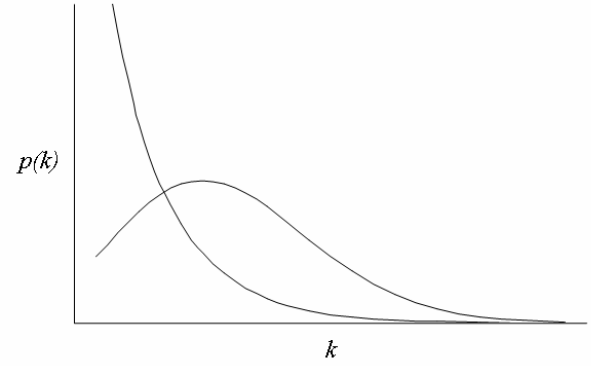
где је p_i вероватноћа повезивања новог чвора са i-тим постојећим, а k_j је број веза j-тог чвора.

Када би број линкова по темену био уравнотежен, као на слици „случајне“ мреже (random network) горе десна, где је k_j приближно константно, онда би расподела вероватноћа била једнолика и реда величине $1/N$ за свако теме. Међутим, слободна мрежа следи степену расподелу, бар асимптотски, вероватноће

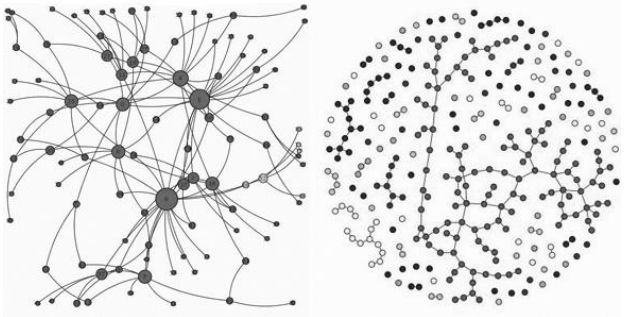
$$p(k) \propto k^{-\gamma} \tag{4}$$

чвора са k конекција. Параметар γ је обично број од 2 до 3.

Зато се мали број великих раскрсница издваја наспрам великог броја малих у слободном расту мреже путева; само су неке познате личности веома славне за разлику од многих; посебне књиге су бестселери; око 80 одсто веб веза се упућује на 15 одсто веб страница. Сви они формирају тзв. слободне мреже. Парето[83] је први приметио поменуту законитост и у богаћењу малобројних на слободном тржишту роба и новца.



На слици лево приказана је степена функција опадања учешћа чворова са бројем веза k, упоредо са звонастом (Гаусовом) расподелом приближно униформне дистрибуције коју, речено је, има трећи тип мреже са претходне слике. Тај трећи тип уопште не оптерећује своје чворове вишком повезница, али по цену да има веома дуге путеве између чворова.



Детаље о дужинама путева кроз мреже (1) и (2) можете потражити у прилозима [17] или [18]. На следећој слици десно, приказани су још једном примери „слободне мреже“ лево и „случајне“ десно. Још сложеније ове мреже могу бити толико нејасне да постаје тешко проценити којем типу припадају.

[83] Vilfredo Pareto (1848-1923), италијански научник.

Ако вам се учини да би разликовање „слободне“ од „мале“ или „случајне“ мреже требао бити лак посао препоручујем да погледате рецимо: Предности стања вишка пажње, познатијег као поремећај хиперактивности са дефицитом пажње[84]. Питање је да ли се те предности могу разумети (моделирати) неком од поменутих мрежа и којом?

У поменутом случају ради се о особинама: 1. Способности проналажења алтернативних путева за превазилажење препрека; 2. Моћи особе да сагледа ширу слику; 3. Могућности да из хаоса ствара ред; 4. Посвећености; 5. Енергичности; 6. Флексибилности – способности да се прилагоди ситуацији; 7. Добром ношењу са кризом; 8. Практичности у раду; 9. Генератору идеја; и другим групама тамо наведеним. Пример сам узео насумице, али идеја је општа. Тражи се препознавање облика (физичког изгледа, понашања или карактера, особе или појаве).

Корелација

Пребројмо повезнице чворова прве од мрежа са слике на почетку текста и поредајмо резултате у низ по растућем редоследу. То је „мрежа малог света“, а добијен је низ: $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$, $a_5 = 4$ и $a_6 = 0$. Ознака $a_k = n$ значи да прва (a-та) мрежа има n чворова са k повезница.

Израчунавамо просек $\overline{a} = \frac{16}{7}$, па формирамо низ $a'_k = a_k - \overline{a}$ за налажење корелације: $a'_0 = a'_1 = a'_2 = a'_6 = -\frac{16}{7}$, $a'_3 = a'_5 = \frac{12}{7}$, $a'_4 = \frac{40}{7}$. Интензитет, односно норма тог низа износи $a' = \sqrt{a'^2_0 + \cdots + a'^2_6} = 4\sqrt{26/7} \approx 7{,}70899$. Сажето:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 4, \quad a_4 = 8, \quad a_5 = 4, \quad a_6 = 0, \quad \sum = 16, \quad \overline{a} = \frac{16}{7},$$

$$a'_0 = -\frac{16}{7}, a'_1 = -\frac{16}{7}, a'_2 = -\frac{16}{7}, a'_3 = \frac{12}{7}, a'_4 = \frac{40}{7}, a'_5 = \frac{12}{7}, a'_6 = -\frac{16}{7}, a' = 7{,}70899.$$

Исто урадимо са бројем повезница друге, тзв. „слободне“ мреже: $b_0 = b_2 = b_4 = 0$, $b_1 = 13$, $b_3 = 1$, $b_5 = 2$ и $b_6 = 1$. Тако $b_5 = 2$ значи да пет повезница имају два чвора друге по реду, b-те мреже (scale-free network), поменуте прве слике. Аритметичка средина овог низа је $\overline{b} = \frac{17}{7}$, па за $b'_k = b_k - \overline{b}$ добијамо: $b'_0 = b'_2 = b'_4 = -\frac{17}{7}$, $b'_1 = \frac{74}{7}$, $b'_3 = b'_6 = -\frac{10}{7}$ и $b'_5 = -\frac{3}{7}$. Интензитет је $b' = \sqrt{b'^2_0 + \cdots + b'^2_6}6 = 6\sqrt{26/7} \approx 11{,}5635$. Сажето:

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 13, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 1, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = 2, \quad b_6 = 1, \quad \sum = 17, \quad \overline{b} = \frac{17}{7},$$

$$b'_0 = -\frac{17}{7}, b'_1 = \frac{74}{7}, b'_2 = -\frac{17}{7}, b'_3 = -\frac{10}{7}, b'_4 = -\frac{17}{7}, b'_5 = -\frac{3}{7}, b'_6 = -\frac{10}{7}, b' = 11{,}5635.$$

Код треће („случајне“ мреже) чворова, у растућим низу по броју повезница, има: $c_0 = c_5 = c_6 = 0$, $c_1 = 3$, $c_2 = 4$, а $c_3 = c_4 = 1$. Математичко очекивање је $\overline{c} = \frac{9}{7}$, па је корелациони низ: $c'_0 = c'_5 = c'_6 = -\frac{9}{7}$, $c'_1 = \frac{12}{7}$, $c'_2 = \frac{19}{7}$ и $c'_3 = c'_4 = -\frac{2}{7}$. Интензитет $c' = 6\sqrt{3/7} \approx 3{,}92792$. Сажето:

[84] Positives Of ADHD, https://addcoach4u.com/151-positives-of-adhd/

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 3, \quad c_2 = 4, \quad c_3 = 1, \quad c_4 = 1, \quad c_5 = 0, \quad c_6 = 0, \quad \sum = 9, \quad \overline{c} = \frac{9}{7},$$

$$c'_0 = -\frac{9}{7}, c'_1 = \frac{12}{7}, c'_2 = \frac{19}{7}, c'_3 = -\frac{2}{7}, c'_4 = -\frac{2}{7}, c'_5 = -\frac{9}{7}, c'_6 = -\frac{9}{7}, c' = 3{,}92792.$$

Коефицијенти корелације[85] ових мрежа (низова) су:

$$r_{ab} = \frac{a'_0 b'_0 + a'_1 b'_1 + \cdots + a'_6 b'_6}{a' b'} = \frac{\left(-\frac{16}{7}\right)\left(-\frac{17}{7}\right) + \cdots + \left(-\frac{16}{7}\right)\left(-\frac{10}{7}\right)}{7{,}70899 \times 11{,}5635} = -0{,}301282.$$

$$r_{ac} = -0{,}28307 \quad \text{и} \quad r_{bc} = 0{,}399442.$$

Захваљујући одсуству корелације између мрежа, њима можемо хватати већи спектар случајева, примена. Погледајмо један пример са расподелом богатства.

Према Организацији за економску сарадњу и развој (OECD – Organisation for Economic Cooperation and Development) 2012. године је било 0,6 одсто светске популације одраслих са имовином већом од милион америчких долара, тачније 42 милиона најбогатијих људи на свету држали су 39,3 светског богатства. Следећих 4,4 одсто, или 311 милиона људи, држало је 32,3 одсто светског богатства. Дакле, доњих 95% држало је свега 28,4% светског богатства. Посебно, најнижих 60% светске популације, те 2012. године, имало је исто богатство као и 1226 најбогатијих људи на Форбсовој листи.

Приметно је да цитирана расподела богатства има форму овде описане „слободне мреже“, са коефицијентом $b_1 = 13$ који је значајно већи од осталих у b-низу. То значи да расподела богатства 2012. године нема форму a или c-низа, односно мреже „малог света“ или „случајног“, јер су расподеле трију низова значајно различите. То даље упућује на „равноправност“ у токовима капитала (роба, услуга, новца), односно да је свет углавном „слободно тржиште“.

Додатни и прецизнији закључци које бисмо извлачили тумачењем теорема „слободних мрежа“ били би можда и занимљивији, али они нису овде тема. Ширећи методу на друштвене појаве, на психологију, физиологију живог света, или физику, треба водити рачуна о ограничењима процене статистичком корелацијом низова. Ако постоји дубља повезаност корелација ће дати потврду, али даваће лажну „потврду“ понекад и тамо где те везе нема.

[85] 12. Количина опција III, Корелација

14. Еволуција демократије

21. март 2021.

Делови расправа о информацији перцепције и последицама на природу и друштво.

Информација перцепције

- Можете ли ми на неком једноставном примеру појаснити информацију перцепције[86]?

- Да, на примеру снаге шаховске игре. Рецимо, први играч је добар (оцена 3) у отварању, врло добар (4) у средишњици, а одличан (5) у завршници. Уређен низ ових оцена означимо вектором $\vec{a} = (3,4,5)$. Снага игре је интензитет или норма вектора, овде корен збира квадрата. За овог играча то је корен збира квадрата три његове оцене, $\sqrt{50}$, приближно 7, или прецизније:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} \approx 7{,}071. \tag{1}$$

Други играч $\vec{b} = (4,3,2)$ у отварању је врло добар (4), добар (3) је у средишњици и довољан (2) у завршници. Снага његове игре је корен из 29, приближно 5, или:

$$b = \left|\vec{b}\right| = \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}} = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2} \approx 5{,}385. \tag{2}$$

Трећи играч $\vec{c} = (2,3,4)$ има исту „снагу играча“ као $\vec{b}$, али „снаге игре“ $\vec{a}$ против $\vec{b}$ и $\vec{a}$ против $\vec{c}$ нису једнаке. Наиме, у надметању првог и другог информација перцепције је:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 34, \tag{3}$$

а у надметању првог и трећег информација перцепције је:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 38. \tag{4}$$

У случају (3) ниво игре био је нижи него у случају (4) када можемо рећи да је игра била јача, жешћа, живља, опакија. Жешћа игра уопште има већу информацију перцепције, јер је резултат множења низова дужине $n \in \mathbb{N}$, односно вектора:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \dots, v_n) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \tag{5}$$

највећи ако су они једнаке монотоности (оба растућа или оба опадајућа). Најмањи је у случају супротне монотоности, једног растућег а другог опадајућег, низова исте дужине. Може се приметити да на аналоган начин меримо и снагу самог играча, множећи низ са самим собом

$$|\vec{u}|^2 = (u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot (u_1, u_2, \dots, u_n) = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 \tag{6}$$

и да у тим проценама има пуно линеарне алгебре.

- Према томе је производ низова мањи или једнак производу њихових интензитета?

[86] в. [9]

- Да, браво, то је позната Шварцова неједнакост[87] $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}||\vec{b}|$, при чему једнакост важи ако и само ако су вектори ($\vec{a}$ и $\vec{b}$) колинеарни (паралелни) и зато пропорционални.

- Значи у примени требамо имати неки начин вредновања играча, а остало је рачун?

- Тако је, али „вредновање“ није једноставна ствар, а након „рачунања“ није лака задаћа ни интерпретација резултата. Заправо, тумачење резултата рачунања зна бити теже од самог рачунања. Треба се сетити само „проблемских задатака“ из математике основне школе, када нам је било теже саставити једначину него је решити, или погледати мало даље на квантну маханику. Тамо ни након деценија рачунања није пронађен резултат који се не би слагао са експериментом, а и дан данас мучимо се са тумачењима.

Ред и неред

- Које би биле главне интерпретације информације перцепције?

- Виши ниво игре је „јако на јако, а слабо на слабо“ од обрнутог „оштро са слабим а понизно са јаким“. Зато је држава у начелу јача од мафије када се понаша „економски нелогично“, рецимо дајући субвенције почетницима и опорезује богатије, за разлику од (лоповског) понашања у којем се отима где се може а то је углавном од слабих, а клони се јаких. Зато је конкуренција на тржишту добра за друштво, јер подстиче надметање моћних, а слично би било и са конкуренцијом у политици, али не бих о томе.

- А шта је са оном изреком да се не ваља бости са рогатим?

- Информација перцепције у свом основном облику ($S = \vec{I} \cdot \vec{H}$) пропрорционална је (скаларном) производу вектора (низова) „интелигенције“ и „хијерархије“. Ту се под првим мисли на способност особе, а под другим на вањска, објективна ограничења. У величини перцепције (S) оба фактора су једнако важна, како низ релативних непредвидљивости ($\vec{I}$), тако и оганичења ($\vec{H}$). Не побеђује шаховски мајстор пацера ударајући га дрвеном таблом по глави, него суптилном игром.

- Шта је то „релативна“ непредвидљивост?

- Ако ловац припрема замку и њоме улови дивљач, он је „релативно непредвидљив“ када зна шта ради и шта ће бити, за разлику од улова. То је суштина интелигенције, да буде на корак од дубље непредвидљивости – која је у бити информације. Теорија информације држи да је већа „снага“ играча, односно игре, исказана против тежих препрека. То је и интуитивно прихватљиво.

Због закона одржања (информације) ту снагу треба и штедети, па дођемо на нешто попут некадашњег бушидо кодекса: „са слабима благо а борбено са јакима“. Наглашавајући важност фактора $\vec{H}$ рећи ћемо, фокусирана снага је већа, а она је тада усмерена, односно организована.

[87] [7], Лема 1.2.49 (Коши-Шварцова неједнакост), стр. 128.

- Тврдоћа (хијерархија) је онда једнако важан допринос информацији перцепције као и мекоћа (интелигенција)?

- Тако је. Вредност информације перцепције ($S = \vec{I} \cdot \vec{H}$) расте једнако са обе вредности, жаргонски речено мекоћом и тврдоћом, односно $\vec{I}$ и $\vec{H}$, јер важи закон комутације, промене редоследа у оваквом (тзв. скаларном) множењу вектора и уопште због једнаке важности два вектора у њиховом производу.

Информација се изражава каналисањем кроз оганичења. Зато је могуће имати организацију са вишком информације у односу на прост збир њених чланова[88], јер организовање ослобађа латентне информације. Ефикасније ћемо користити возила ако је саобраћај у граду боље регулисан, или на пример, мрављa колонија може се понашати „необјашњиво“ интелигентно обзиром на своје појединце.

Писао сам раније, када не бисмо имали никакве памети (способности, интелигенције, моћи бирања) у ситуацији са пуно ограничења, онда не само да нам ништа не би било јасно, него не бисмо могли ни перципирати свет око себе. Информација прерцепције слика наш свет као виртуелан, формалан, или несуштински и зависан од посматрача. Са друге стране, џаба би некоме била екстремно велика памет, ако не би имао (видео) препрека, такав такође ништа не би видео.

- Разумео сам. То су позитивне стране, а које су негативне?

- Већа информација перцепције значи већу виталност, већу „количину опција“ играча или игре (зависно шта се израчунава), а негативно је то што ми сви (жива и нежива материја) тежимо смирају. У природи постоји блага, стална и свеприсутна тежња ка мањој информацији, комуникацији, а то онда значи и дејству (јер су најмање количине информације паковане у кванте дејства, производе енергије и времена).

То је зато што вероватнији исходи носе мање информације, а вероватнији су чешћи. Наша будућност развија се ка вероватнијим стањима, а то онда значи мање информативним. Свет се развија ка уређенијем! Наглашавам ово, јер савремена физика верује у супротно.

Наиме, ентропија се интерпретира као „неред“, што долази од посматрања чаше која падне са стола и разбије се а њена срча се разлети по поду и домаћица онда мора да покупи тај неред. Међутим, теорија информације на исти процес гледа супротно, на молекуле који теже да се равномерно распоређују она гледа као на војнике на смотри. Униформисаношћу они постају безлични и тиме губе (мање емитују) информацију!

Раст ентропије је губитак (емисије) информације, а тек тада њен раст не противречи „принципу вероватноће“ – да су вероватније појаве чешће.

Дакле, на начин повећања „информације перцепције“ повећава се виталност, али то је противприродан процес. Он је попут гејзира или вулкана који избацују свој садржај пркосећи

[88] Latent Information, https://www.academia.edu/44725794/Latent_Information

иначе благој, сталној и свеприсутној земљиној тежи, али који пре или касније опет иде доле. Та супротна тежња ствара тензије и опасност да прејаки играчи поцепају себе или систем игре. Тако је Југославија разбијена, или се Светска боксерска федерација поделила на три, а свет се стално покушава делити на два дела, на Исток и Запад.

Не само ми људи, већ и сва жива бића, па и неживе физичке твари повинују се „принципу најмањег дејства“, који је супротан „живахности“. Због истог ми волимо да се отарасимо својих вишкова слободе (количине неизвесности, опција), дакле да се подређујемо, удружујемо, организујемо. Ми волимо сигурност или ефикасност, јер поред жеље да живимо (да учествујемо у доброј игри) ту је и жеља да не живимо (за смирајем).

Моделирање

- Шта је са компјутерским симулацијама, може ли се из њих извући нешто о ,,еволуцији демократије''?

- Можда, када се прецизира појам „демократије“, па параметара и узрока њеног „развоја“. Да ли је боље еволуирати у одважне или у послушне, у патњу или у тупост, може ли се „милом или силом“ одржати стање равноправности. Ради једноставности ограничимо се на нешто налик овом последњем, на савремени модел друштва које желимо да тежи равноправности, изобиљу, миру и реду. Изненадиће нас колико се из тако „малог“ оквира може свашта добијати.

Када са једне стране имамо равноправност, која максимализује информацију, а са друге стране принципијелни миминимализам, јасно је да морају јачати тензије и временом раслојавања. Веровање да држава може стално утезати систем једнакости и људских права једнако је веровању да здравим начином живота и редовним одласцима код лекара можемо живети бесконачно.

Да ће друштво посвећено чувању равноправности и људских права пре или касније пуцати због других вредности јасно је већ из логике слободних мрежа[89]. Када су комуникације (роба, новца, моћи, иницијатива) слободне, онда се формирају ретки концентратори, са много повезница наспрам многобројних чворова који повезница имају мало, са растућим раздвајањем те две класе. Ово личи на ситуацију слободног тржишта данас.

Међутим, капитал и моћ коју новац носи не може бити и једина претња подела, нити мора бити главна, као што се нама данас чини да јесте, него је то општи став да је статус кво дугорочно неодржив. Правно уређено друштво „људи једнаких шанси“ пуцаће по шавовима због других важности. Оно ће се раслојавати у складу са „универзумом неизвесности“ и, према томе, можда и на начине у овом тренутку непознате.

Друштво са јаком унутрашњом кохезијом, попут замишљаног будућег глобалног и добро увезаног, раслојаваће се по дубини. То би био пут ка неком облику „робовласничког система“ од којих смо сличне већ виђали.

[89] Shape recognition, https://www.academia.edu/45573941/Shape_recognition

На пример, класе богатих и сиромашних данас, или претходне масовне феудалних владара, или оне ређе класичне поделе на робове и господаре познате нам из Сједињених држава, Јужноафричке републике, па све до древне Спарте, свеједно ће имати проблеме са трајањем. Свако организовање на крају суочава се са заостајањем у односу на остатак света који одмиче, било да су то сиромаштво, ванъске претње, бела куга, јер организација значи вишак информације и тиме нестабилно стање које тежи смањењу.

Друштво са слабом унутрашњом кохезијом раслојаваће се попут еволуције живих врста на земљи.

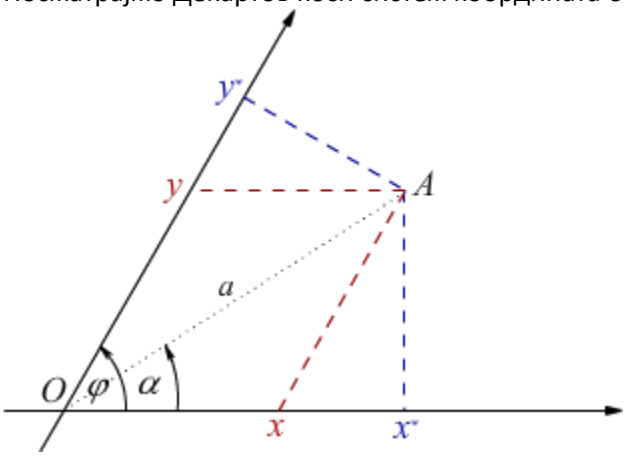
15. Варијантни вектори

24. март 2021.

Једноставна објашњења коваријантних и контраваријантних вектора и њиховог значаја, помоћу косоуглог система нагиба φ, ротације за угао θ, множења вектора и база.

Коси систем

Посматрајмо Декартов коси систем координата OXY са углом φ између апсцисе и ординате и у њему тачку A. Њена удаљеност од исходишта је $a = \overline{OA}$, паралелне пројекције A падају на „контраваријантне“ координате (x, y), а окомите на „коваријантне“ (x^*, y^*).



Тачка A не мора бити на симетрали угла φ, али су углови са паралелним крацима једнаки, тј. $\sphericalangle(x^*xA) = \sphericalangle(y^*yA) = \varphi$, па налазимо:

$$x^* - x = y\cos\varphi,\ \ y^* - y = x\cos\varphi.$$

Отуда трансформације пројекција:

$$\begin{cases} x^* = x + y\cos\varphi \\ y^* = x\cos\varphi + y \end{cases} \tag{1}$$

То су трансформације контраваријантних координата у коваријантне. Обрнуте израчунавамо:

$$x = \frac{x^* - y^*\cos\varphi}{\sin^2\varphi},\ \ y = \frac{-x^*\cos\varphi + y^*}{\sin^2\varphi}. \tag{2}$$

Троугао OxA и косинусна теорема дају квадрат удаљености тачке од исходишта

$$a^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\varphi, \tag{3}$$

у контраваријантним координатама. Супституцијом (2) у (3) добијамо

$$a^2 = [(x^*)^2 + (y^*)^2 - 2x^*y^*\cos\varphi]/\sin^2\varphi. \tag{4}$$

што је квадрат исте дужине (3), сада изражен коваријантним координатама.

Угао између апсцисе и дате тачке гледано из исходишта $\sphericalangle(x^*OA) = \alpha$. Троугао Ox^*A је правоугли и $\cos\alpha = x^*/a$, или $\cos(\varphi - \alpha) = y^*/a$. Отуда:

$$x^* = a\cos\alpha,\ \ y^* = a\cos(\varphi - \alpha). \tag{5}$$

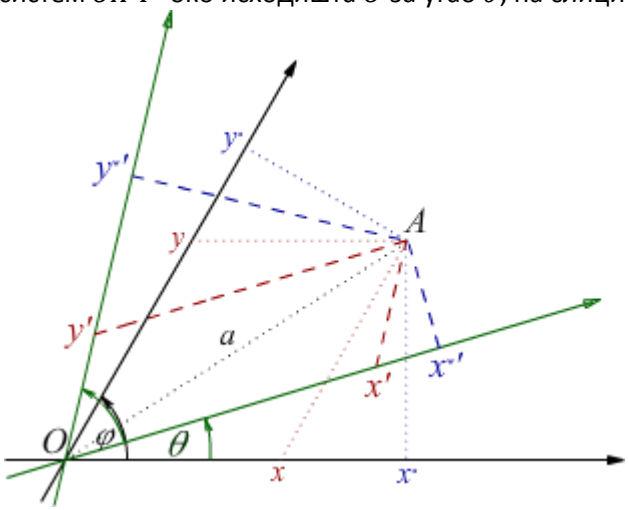
Двоструке површине троугла OxA су $ax\sin\alpha$ и $ay\sin(\varphi - \alpha)$. Оне су тачно једнаке површини паралелограма $OxAy$ која износи $xy\sin\varphi$. Изједначавања дају:

$$x = \frac{a\sin(\varphi - \alpha)}{\sin\varphi},\ \ y = \frac{a\sin\alpha}{\sin\varphi}, \tag{6}$$

а то су изрази за контраваријантне координате, ови мало сложенији од коваријантних (5).

Ротација

Посматрајмо сада ротацију датог система OXY у систем $OX'Y'$ око исходишта O за угао θ, на слици десно. Означимо са $\alpha' = \sphericalangle(x'OA)$, па (6) даје:



$$x' = a\frac{\sin(\varphi-\alpha')}{\sin\varphi}$$
$$= a\frac{\sin[(\varphi-\alpha)+\theta]}{\sin\varphi}$$
$$= a\frac{\sin(\varphi-\alpha)\cos\theta+\cos(\varphi-\alpha)\sin\theta}{\sin\varphi}$$
$$= a\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\sin\varphi}\cos\theta + a\frac{\cos(\varphi-\alpha)\sin\theta}{\sin\varphi}$$
$$= x\cos\theta + a\frac{\cos\varphi\cos\alpha+\sin\varphi\sin\alpha}{\sin\varphi}\sin\theta.$$

Употребљене су адиционе формуле:

$$\sin(u+v) = \sin u\cos v + \cos u\sin v,$$
$$\cos(u-v) = \cos u\cos v + \sin u\sin v.$$

Из (5) и (1) следи $a\cos\alpha = x + y\cos\varphi$, па израчунавамо даље[90]:

$$x' = x\cos\theta + [(x + y\cos\varphi)\operatorname{ctg}\varphi + a\sin\alpha]\sin\theta$$
$$= x\cos\theta + (x\operatorname{ctg}\varphi + y\cos\varphi\operatorname{ctg}\varphi)\sin\theta + y\sin\varphi\sin\theta$$
$$= x(\cos\theta + \operatorname{ctg}\varphi\sin\theta) + y(\cos\varphi\operatorname{ctg}\varphi + \sin\varphi)\sin\theta$$
$$= x\frac{\sin\varphi\cos\theta+\cos\varphi\sin\theta}{\sin\varphi} + y\frac{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{\sin\varphi}\sin\theta$$
$$= x\frac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin\varphi} + y\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}$$

дакле

$$x'\sin\varphi = x\sin(\varphi+\theta) + y\sin\theta. \tag{7}$$

Слично, полазећи од друге једнакости (6) за систем $OX'Y'$, добијамо:

$$y' = \frac{a\sin\alpha'}{\sin\varphi} = a\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin\varphi} = a\frac{\sin\alpha\cos\theta-\cos\alpha\sin\theta}{\sin\varphi}$$
$$= y\cos\theta - (x + y\cos\varphi)\frac{\sin\theta}{\sin\varphi} = -x\frac{\sin\theta}{\sin\varphi} + y\frac{\sin\varphi\cos\theta-\cos\varphi\sin\theta}{\sin\varphi}$$
$$= -x\frac{\sin\theta}{\sin\varphi} + y\frac{\sin(\varphi-\theta)}{\sin\varphi}$$

дакле

[90] $\operatorname{ctg}\phi = \cot\phi$ – котангенс угла ϕ

$$y' \sin\varphi = -x \sin\theta + y \sin(\varphi - \theta). \tag{8}$$

Једначине (7) и (8) се краће пишу матрично

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\varphi} \begin{pmatrix} \sin(\varphi+\theta) & \sin\theta \\ -\sin\theta & \sin(\varphi-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{9}$$

односно $A' = R'(\varphi, \theta)A$. То су трансформације $OXY \to OX'Y'$ контраваријантних координата Декартовог косоуглог система, нагиба $\varphi = \sphericalangle(XOY)$, при ротацији око исходишта O за угао θ.

Наравно, формуле (9) се могу извести и геометријски, са дате слике горе десно.

Пример 1. За правоугли систем, са $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\sin\varphi = 1$, $\sin(\varphi \pm \theta) = \cos\theta$, из (9) добијамо:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{10}$$

То су добро познате формуле ротације Декартовог правоуглог 2Д система координата. □

Пример 2. Ротацијом система удаљеност дате тачке од исходишта остаје иста и контраваријантни израз (3) задржава форму:

$$a^2 = (x')^2 + (y')^2 + 2x'y' \cos\varphi$$

$$= \left[\frac{x\sin(\varphi+\theta)+y\sin\theta}{\sin\varphi}\right]^2 + \left[\frac{-x\sin\theta+y\sin(\varphi-\theta)}{\sin\varphi}\right]^2 + 2 \cdot \frac{x\sin(\varphi+\theta)+y\sin\theta}{\sin\varphi} \cdot \frac{-x\sin\theta+y\sin(\varphi-\theta)}{\sin\varphi} \cdot \cos\varphi$$

$$= \frac{x^2}{\sin^2\varphi}[\sin^2(\varphi+\theta) + \sin^2\theta - 2\sin(\varphi+\theta)\sin\theta\cos\varphi] +$$

$$+ \frac{y^2}{\sin^2\varphi}[\sin^2\theta + \sin^2(\varphi-\theta) + 2\sin\theta\sin(\varphi-\theta)\cos\varphi] +$$

$$+ \frac{2xy}{\sin^2\varphi}[\sin(\varphi+\theta)\sin\theta - \sin\theta\sin(\varphi-\theta) + \sin(\varphi+\theta)\sin(\varphi-\theta)\cos\varphi - \sin^2\theta\cos\varphi]$$

међутим, фактор уз x^2 у бројнику је:

$$\sin^2(\varphi+\theta) + \sin^2\theta - 2\sin(\varphi+\theta)\sin\theta\cos\varphi =$$

$$= [\sin^2(\varphi+\theta) - \sin(\varphi+\theta)\sin\theta\cos\varphi] + [\sin^2\theta - \sin(\varphi+\theta)\sin\theta\cos\varphi]$$

$$= \sin(\varphi+\theta)[\sin(\varphi+\theta) - \sin\theta\cos\varphi] + [\sin^2\theta - \sin(\varphi+\theta)\sin\theta\cos\varphi]$$

$$= \sin(\varphi+\theta)\sin\varphi\cos\theta + [\sin^2\theta - \sin(\varphi+\theta)\sin\theta\cos\varphi]$$

$$= \sin(\varphi+\theta)[\sin\varphi\cos\theta - \sin\theta\cos\varphi] + \sin^2\theta$$

$$= \sin^2\varphi\cos^2\theta - \cos^2\varphi\sin^2\theta + \sin^2\theta$$

$$= \sin^2\varphi\cos^2\theta + (1-\cos^2\varphi)\sin^2\theta = \sin^2\varphi$$

а тај се крати са називником и остаје само x^2. Слично, коефицијент уз y^2 је јединица, па остаје да израчунамо коефицијент уз мешовити xy. Лако је проверити да се у угластој загради збир своди на $\sin^2\varphi\cos\varphi$, први фактор (квадрат синуса) крати се са називником и остаје израз (3). □

Пример 3. Докажимо трансформације:

$$x'^* = x\cos\theta + y\cos(\varphi-\theta), \tag{11}$$

$$y'^* = x\cos(\varphi+\theta) + y\cos\theta. \tag{12}$$

Те једначине изражавају коваријантне координате ротираног система помоћу контраваријантних неротираног, а следе рецимо из одговарајућег (1) уврштавањем (9). Доказујемо прву:

$$x'^* = x' + y'\cos\varphi =$$

$$= \frac{x\sin(\varphi+\theta) + y\sin\theta}{\sin\varphi} + \frac{-x\sin\theta + y\sin(\varphi-\theta)}{\sin\varphi}\cos\varphi$$

$$= x\frac{\sin(\varphi+\theta) - \sin\theta\cos\varphi}{\sin\varphi} + y\frac{\sin\theta + \sin(\varphi-\theta)\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$= x\frac{\sin\varphi\cos\theta}{\sin\varphi} + y\frac{\sin[(\theta-\varphi)+\varphi] - \sin(\theta-\varphi)\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$= x\cos\theta + y\frac{\cos(\theta-\varphi)\sin\varphi}{\sin\varphi}$$

а отуда (11). У одговарајућу другу једначину (1) уврштавамо (9) и налазимо:

$$y'^* = x'\cos\varphi + y' =$$

$$= \frac{x\sin(\varphi+\theta) + y\sin\theta}{\sin\varphi}\cos\varphi + \frac{-x\sin\theta + y\sin(\varphi-\theta)}{\sin\varphi}$$

$$= x\frac{\sin(\varphi+\theta)\cos\varphi - \sin\theta}{\sin\varphi} + y\frac{\sin\theta\cos\varphi + \sin(\varphi-\theta)}{\sin\varphi}$$

$$= x\frac{\sin(\varphi+\theta)\cos\varphi - \sin[(\varphi+\theta)-\varphi]}{\sin\varphi} + y\frac{\sin\varphi\cos\theta}{\sin\varphi}$$

$$= x\frac{\cos(\varphi+\theta)\sin\varphi}{\sin\varphi} + y\cos\theta$$

чиме је доказано (12). □

Пример 4. Докажимо трансформације коваријантних координата:

$$x'^* = x^* \frac{\sin(\varphi-\theta)}{\sin\varphi} + y^* \frac{\sin\theta}{\sin\varphi} \tag{13}$$

$$y'^* = -x^* \frac{\sin\theta}{\sin\varphi} + y^* \frac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin\varphi} \tag{14}$$

помоћу примера 3. и (2).

Сменом (2) у (11) добијамо:

$$x'^* = \frac{x^* - y^*\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\cos\theta + \frac{-x^*\cos\varphi + y^*}{\sin^2\varphi}\cos(\varphi-\theta)$$

$$= x^* \frac{\cos\theta - \cos\varphi\cos(\varphi-\theta)}{\sin^2\varphi} + y^* \frac{-\cos\varphi\cos\theta + \cos(\varphi-\theta)}{\sin^2\varphi}$$

$$= x^* \frac{\cos[\varphi-(\varphi-\theta)] - \cos\varphi\cos(\varphi-\theta)}{\sin^2\varphi} + y^* \frac{\sin\varphi\sin\theta}{\sin^2\varphi}$$

$$= x^* \frac{\sin\varphi\sin(\varphi-\theta)}{\sin^2\varphi} + y^* \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}$$

$$= x^* \frac{\sin(\varphi-\theta)}{\sin\varphi} + y^* \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}$$

чиме је доказано (13). Сменом (2) у (12) добијамо:

$$y'^* = \frac{x^* - y^*\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\cos(\varphi+\theta) + \frac{-x^*\cos\varphi + y^*}{\sin^2\varphi}\cos\theta$$

$$= x^* \frac{\cos(\varphi+\theta) - \cos\varphi\cos\theta}{\sin^2\varphi} + y^* \frac{-\cos\varphi\cos(\varphi+\theta) + \cos\theta}{\sin^2\varphi}$$

$$= x^* \frac{-\sin\varphi\sin\theta}{\sin^2\varphi} + y^* \frac{-\cos\varphi\cos(\varphi+\theta) + \cos[(\varphi+\theta)-\varphi]}{\sin^2\varphi}$$

$$= -x^* \frac{\sin\theta}{\sin\varphi} + y^* \frac{\sin(\varphi+\theta)\sin\varphi}{\sin^2\varphi}$$

а отуда (14). □

Пример 5. У једнакости примера 4. уврстимо (1) и изведимо (11) и (12).

Полазећи од (13) и уврштавјући (1) добијамо:

$$x'^* = x^* \frac{\sin(\varphi-\theta)}{\sin\varphi} + y^* \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}$$

$$= (x + y\cos\varphi)\frac{\sin(\varphi-\theta)}{\sin\varphi} + (x\cos\varphi + y)\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}$$

$$= x\frac{\sin(\varphi-\theta) + \cos\varphi\sin\theta}{\sin\varphi} + y\frac{\cos\varphi\sin(\varphi-\theta) + \sin\theta}{\sin\varphi}$$

$$= x\frac{\sin\varphi\cos\theta}{\sin\varphi} + y\frac{\cos\varphi\sin(\varphi-\theta) + \sin[\varphi-(\varphi-\theta)]}{\sin\varphi}$$

$$= x\cos\theta + y\frac{\sin\varphi\cos(\varphi-\theta)}{\sin\varphi}$$

$$= x\cos\theta + y\cos(\varphi-\theta)$$

и тиме је добијена формула (11). Полазећи од (14) и уврштавајући (1), налазимо:

$$y'^{*} = -x^{*}\frac{\sin\theta}{\sin\varphi} + y^{*}\frac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin\varphi}$$

$$= -(x + y\cos\varphi)\frac{\sin\theta}{\sin\varphi} + (x\cos\varphi + y)\frac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin\varphi}$$

$$= x\frac{-\sin\theta + \cos\varphi\sin(\varphi+\theta)}{\sin\varphi} + y\frac{-\cos\varphi\sin\theta + \sin(\varphi+\theta)}{\sin\varphi}$$

$$= x\frac{-\sin[(\varphi+\theta)-\varphi] + \cos\varphi\sin(\varphi+\theta)}{\sin\varphi} + y\frac{\sin\varphi\cos\theta}{\sin\varphi}$$

$$= x\frac{\cos(\varphi+\theta)\sin\varphi}{\sin\varphi} + y\cos\theta$$

$$= x\cos(\varphi+\theta) + y\cos\theta$$

а то је формула (12). □

Производ

Квадрат удаљености дате тачке од исходишта, $a = \overline{AO}$, једнак је скаларном производу њених коваријантних и контраваријантних координата

$$a^2 = x^{*}x + y^{*}y. \tag{15}$$

Наиме, једнакост (3) следи из:

$$x^{*}x + y^{*}y = (x + y\cos\varphi)x + (x\cos\varphi + y)y = x^2 + y^2 + 2xy\cos\varphi = a^2.$$

Дочим, множећи контраваријантне са контраријантнима добијамо прост збир квадрата који у случају косог система не одговара квадрату удаљености, $x^2 + y^2 \neq a^2$, али му не одговара ни производ коваријантних.

Удаљеност од тачке $A(x, y)$ до тачке $B(x + \Delta x, y + \Delta y)$ износи

$$\overline{AB}^2 = (\Delta x^*)(\Delta x) + (\Delta y^*)(\Delta y), \tag{16}$$

где су са x^* и y^* означене коваријантне координате. Наиме, транслацијом система за вектор $\overrightarrow{OB}$, тако да му исходиште буде тачка B, једнакост (16) постаје (15). Исто важи и за инфинитезималне дужине.

Због ове посебности множења координата, а због начина множења матрица, коваријантне векторе пишемо као матрицу-врсту, а контраваријантне као матрицу-колону. Тако (15) постаје:

$$a^2 = x^*x + y^*y = (x^* \quad y^*)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x^* \quad y^*)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Да то важи и у ротираном систему, потврђујемо применом (13), (14) и (9):

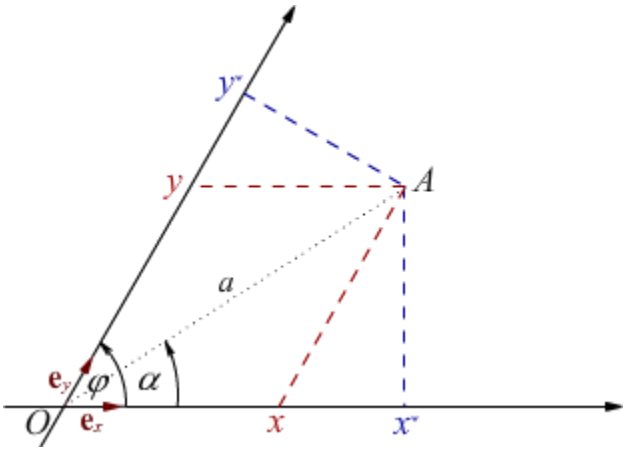
$$(x'^* \quad y'^*)\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \tag{18}$$

$$= \left[(x^* \quad y^*)\begin{pmatrix} \dfrac{\sin(\varphi-\theta)}{\sin\varphi} & -\dfrac{\sin\theta}{\sin\varphi} \\ \dfrac{\sin\theta}{\sin\varphi} & \dfrac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin\varphi} \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} \dfrac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin\varphi} & \dfrac{\sin\theta}{\sin\varphi} \\ -\dfrac{\sin\theta}{\sin\varphi} & \dfrac{\sin(\varphi-\theta)}{\sin\varphi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]$$

$$= (x^* \quad y^*)\left[\begin{pmatrix} \dfrac{\sin(\varphi-\theta)}{\sin\varphi} & -\dfrac{\sin\theta}{\sin\varphi} \\ \dfrac{\sin\theta}{\sin\varphi} & \dfrac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin\varphi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin\varphi} & \dfrac{\sin\theta}{\sin\varphi} \\ -\dfrac{\sin\theta}{\sin\varphi} & \dfrac{\sin(\varphi-\theta)}{\sin\varphi} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (x^* \quad y^*)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a^2$$

из чега следи (17) за ротирани систем. Множење матрица није комутативно и јесте асоцијативно, а ово друго је кориштено у доказу.



Нека су $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$ јединични вектори апсцисе и ординате, приказани на слици лево, односно $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$. Тада вектор $\overrightarrow{OA} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ својим врхом представља тачку $A(x, y)$.

Транслације дефинисане базним векторима $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$ понашају се контраваријантно, док су пројекције вектора $\overrightarrow{OA}$ коваријантне.

Према томе, трансформације (9) користимо за промену базе система (вектора попут $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$), а трансформације (13) и (14) из примера 4, су за трансформације компоненти вектора (попут x и y). Прве су контраваријантне, за разлику од других коваријантних, а разлике између њих нестају у правоуглом систему, када је $\varphi = 90°$.

Другим речима, радећи као у доказу (18), можемо показати да приликом ротације (истог косог система, нагиба φ за угао θ) вектор остаје непромењен. Наиме, након ротације:

$$\overrightarrow{OA'} = x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'} = (x' \quad y')\begin{pmatrix}\vec{e}_{x'}\\ \vec{e}_{y'}\end{pmatrix} \tag{19}$$

$$= (x \quad y)\begin{pmatrix}\dfrac{\sin(\varphi-\theta)}{\sin\varphi} & -\dfrac{\sin\theta}{\sin\varphi}\\ \dfrac{\sin\theta}{\sin\varphi} & \dfrac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin\varphi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin\varphi} & \dfrac{\sin\theta}{\sin\varphi}\\ -\dfrac{\sin\theta}{\sin\varphi} & \dfrac{\sin(\varphi-\theta)}{\sin\varphi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\end{pmatrix}$$

$$= (x \quad y)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\end{pmatrix} = (x \quad y)\begin{pmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\end{pmatrix} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = \overrightarrow{OA}$$

па је $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA}$, што је и требало показати.

Лако је разумети да информацију перцепције, $S = ax + by + cz + \cdots$, треба третирати као множење коваријантног и контраваријантног низа, ако желимо да њена вредност не зависи од избора система координата.

Епилог

Ово је био мој покушај да методама елементарне математике (која се учи у средњим школама) објасним можда и претешку проблематику „варијантних вектора“ (ко-варијантних и контра-варијантних трансформација), иначе тензорског рачуна. Надам се да ће овај необичан увод у диференцијални рачун и мултилинеарну алгебру бити занимљив и познаваоцима.

16. Варијантни вектори II

31. март 2021.

Увод

- У чему је разлика између вашег информатичког и класичног материјалистичког концепта света, осим информације, или количине опција, као онтолошке основе света[91]?

- Ок, разумео сам и покушаћу одговорити. Али да би нешто типично за информацију перцепције интерпретирао филозофски и колико-толико квалитетно, неопходно је неколико појашњења из линеарне алгебре. Прво је опис векторског и њему дуалног векторског простора.

Када низове бројева (скалара) истих дужина n (неки природни број) сабирамо тако да се први сабира са првим, други са другим и даље n-ти са n-тим, онда их можемо сматрати векторима n-димензионалног простора. Када је слика збира вектора једнака збиру слика тих вектора, пресликавање називамо линеарним. Јасно је да су такве слике такође неки вектори, а ако су оне и иста врста бројева који чине низ компоненти оригиналних вектора, онда се пресликавање назива *функционела*, или функционал[92].

Дакле, низ x дате дужине n чини вектор простора X. Линеарна функционела y^* пресликава га у низ исте дужине $y^*(x)$ који припада неком дуалном, кажемо *адјунгованом* (придруженом) векторском простору X^* (било која функционела међу више њих, у посебан адјунговани простор). Прве векторе (X) називамо контраваријантним, друге (X^*) коваријантним и они, у односу на дату функционелу, стоје као две стране истог новчића, као лик и слика у огледалу. То је ствар чисте математике, односно дела који се обично назива „виша линеарна алгебра“. Добра је ствар што је та област веома развијена, има довољно теорема, веома је тачна и, барем у основи, није најтежа из математике.

Незгодна особина више линеарне алгебре је што, за сада, нема довољано озбиљних интерпретација у теорији информације. Ту празнину ја попуњавам.

Елем, када низови облика $(a, b, \dots, c)$ са датих n компоненти чине векторски простор X, онда слике тих компоненти $(x, y, \dots, z)$, бројеви исте врсте добијени линеарним пресликавањем, чине векторе дуалног простора X^*. Обзиром на дато пресликавање оригинали су вектори домена, копије су вектори кодомена, први су својства јединке а други њених ограничења.

Лако се доказује да је деловање линеарне функционеле y^* на произвољан вектор x простора X потпуно познато, ако знамо како он делује на неку базу тог простора. Ако знамо бројеве (скаларе) који су слике базних вектора простора X онда знамо представити сваки вектор дуалног простора X^*. Такође, познајући слике базе потпуно и једнозначно дефинисана је функционела y^* на X.

[91] Питање ми је поставио колега анонимно.
[92] функција са векторског простора у скаларно поље

Даље ствари постају „једноставне“ у вези са информацијом перцепције. Простору X способности јединке придружен (адјунгован) је дуалан простор X^* ограничења. Деловање хијерархије y^* на произвољне одговоре интелигенције x потпуно је познато, ако знамо како она делује на неке базне опције. База би, при томе, могла бити било који потпун скуп независних ситуација.

За разлику од уобичајеног материјалистичког погледа, посматрање света путем ових дуалних вектора постаје субјективно. Како је дуал дуалног векторског простора опет векторски простор, то је свеједно хоћемо ли интелигенцији (I) придружити хијерархију (H) да бисмо израчунали информацију перцепције, добили је као скаларни производ два вектора ($S = I \cdot H$), или ћемо радити обрнуто, прво имати неку хијерархију којој ћемо затим као дуалну придружити интелигенцију. Такође је могуће и треће, да датој интелигенцији особе придружимо дуално њој супротстављену интелигенцију неке друге особе, или четврто да хијерархији супротставимо хијерархију. Доследност ставова алгебре гаранција је доследности тих комбинација интерпретација.

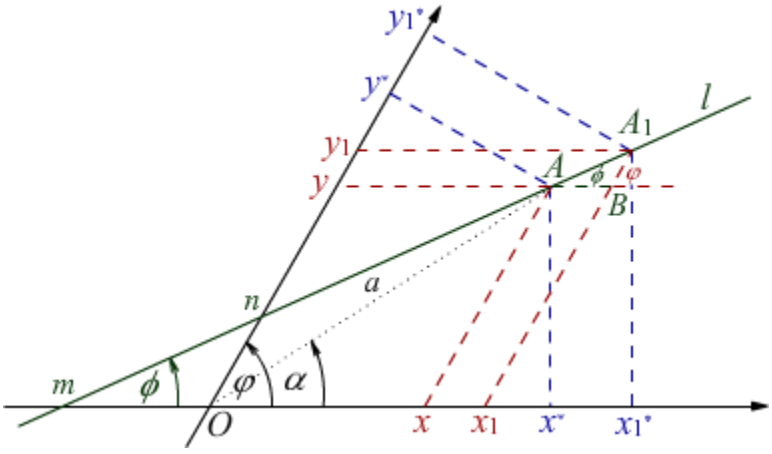
Са друге стране, скаларни производ контраваријантних и коваријантних вектора инваријантан је. Погледајте шта то тачније значи у претходном прилогу[93], где пред крај пише: „Лако је разумети да информацију перцепције, $S = ax + by + \cdots + cz$, треба третирати као множење контраваријантног и коваријантног низа, ако желимо да њена вредност не зависи од избора система координата.“ То у свој тој субјективности овог света (гледано путем „теорије информације перцепције“) значи извесну објективност.

Комплексна раван

Ако су X и Y два векторска простора над телом скалара Φ, онда се под *линеарним оператором* $L : X \to Y$ подразумева функција дефинисана на X са вредностима у Y, ако је

$$L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 L(x_1) + \alpha_2 L(x_2) \quad (x_1, x_2 \in X; \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \Phi). \tag{1}$$

Као и иначе, кажемо да оригинали (X) чине *домен*, а слике (Y) *кодомен* пресликавања (L).



Типична линеарна функција је $y(x) = kx + n$. Њен је граф права l која је приказана на слици лево. Настављамо претходни прилог, па је и слика наставак прве слике тог прилога. Тачке $A(x, y)$ и $A_1(x_1, y_1)$ припадају правој l и са тачком $B(x_1, y)$ чине косоугли троугао.

Из $y(0) = n$ следи да је n ордината пресека l и y-осе. Међутим, из:

$$y_1 - y = k(x_1 - x)$$
$$\Delta y = k\Delta x$$

[93] 15. Варијантни вектори

стављајући $\Delta l = \overline{AA_1}$ и на основу косинусне теореме налазимо $\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + 2\Delta x \Delta y \cos\varphi$ а то је (3) поменутог прилога, растојање између две тачке у контраваријантним координатама.

Приметимо да коефицијент $k \neq \operatorname{tg}\phi$ праве l није тангенс[94] угла између x-осе и дате праве, осим када је Декартов систем координата OXY правоугли. У том посебном случају, ако је $\varphi = 90°$, косинусна теорема, односно израз за квадрат удаљености Δl^2, постаје Питагорина теорема. Али, са слике читамо, $\Delta x^* = \Delta l \cos\phi$, где је $\Delta x^* = x_1^* - x^*$ разлика коваријантних координата апсцисе, а угао између апсцисе и дате праве $\phi = \sphericalangle(xOl)$.

Нормирани облик праве l у датом косоуглом систему је

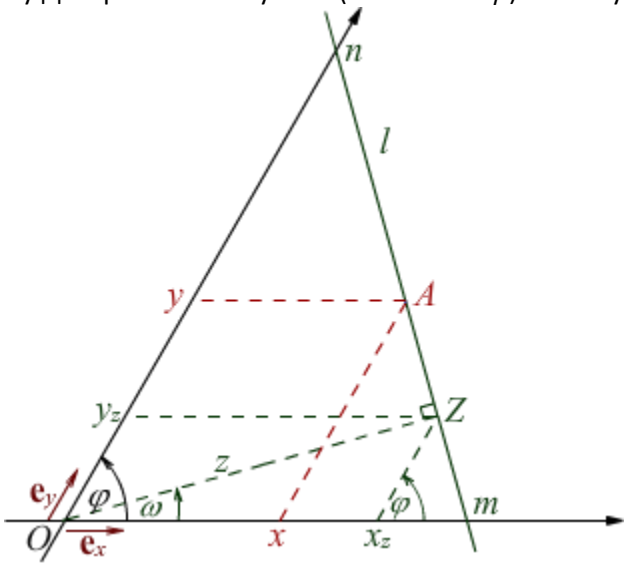
$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1, \tag{2}$$

где су бројеви $m, n \in \Phi$ места пресека праве са x и y осом, као што се види на претходној слици. На следећој слици (десно), права l пресеца први квадрант ($\phi > 90°$) а дуж $z = \overline{OZ}$ окомита је на њу, при чему $Z(x_z, y_z) \in l$, $\omega = \sphericalangle(x_z OZ)$. Троугао mOZ је правоугли са правим углом у темену Z, па је $z = m\cos\omega$. Слично, посматрајући троугао nOZ налазимо $z = n\cos(\varphi - \omega)$. Отуда и (2) је:

$$\frac{1}{m} = \frac{\cos\omega}{z},\ \frac{1}{n} = \frac{\cos(\varphi-\omega)}{z},$$

$$x\cos\omega + y\cos(\varphi - \omega) = z. \tag{3}$$

Ово је нормални (окомити) облик једначине праве у Декартовом косоуглом (нагиба оса φ) систему координата OXY. Тачаке $A(x, y)$ и $Z(x_z, y_z)$ су у контраваријантним координатама, на осе се своде паралелним померањем, транслацијм.



Нека су $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$ јединични вектори оса, као на слици, или ознака $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$. Тада је

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$$

а то је оно што смо видели и у претходном прилогу. Новост је овде да тачка $A(x, y)$, на правој l удаљеној за $t = \overline{OT}$ од исходишта, са нормалом на њу из O, угла ω према апсциси, задовољава једначину (3).

Када је $\varphi = 90°$ једначина (3) постаје познати нормални облик једначине праве Декартових правоуглих координата. Тада посебно, када је $\vec{e}_x = 1$ реалан број, а $\vec{e}_y = i$ *имагинарна* јединица ($i^2 = -1$), дати систем координата представља *комплексну* раван $\mathbb{C}$.

[94] $\operatorname{tg}\phi = \tan\phi$ – тангенс угла фи.

Ротација косих система

Нека су дата два Декартова косоугла система OXY и $OX'Y'$, са истим исходиштем O, са угловима $\varphi = \sphericalangle(XOY)$, $\varphi' = \sphericalangle(X'OY')$ и $\theta = \sphericalangle(XOX')$. Координате (x, y) и (x', y') једне тачке у два система повезују релације:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' \sin(\varphi-\theta)+y' \sin(\varphi-\varphi'-\theta)}{\sin\varphi} \\ y = \dfrac{x' \sin\theta+y' \sin(\varphi'+\theta)}{\sin\varphi} \end{cases} \tag{4}$$

Ово је ротација $(x', y') \to (x, y)$ за угао θ између апсциса, произвољних косих система нагиба φ и φ'. Наводим је само ради допуне претходном прилогу.

Обрнуту ротацију $(x, y) \to (x', y')$ добијамо из (4) сменом θ са $-\theta$, када, за $\varphi = \varphi'$, она постаје трансформација (9) из претходног прилога. Сличном променом знака угла и остале ротације из тог прилога преводимо у инверзне, у облике згодније за смену варијабли једначине (3) овде.

Функционела

Када функција заједно са коефицијентима вектора узима вредности из истог тела скалара Φ назива се *функционкционела* или функционал. Вредности сваке поједине линеарне функционеле, попут (1), узете на векторима датог домена, задовољававају особине векторских простора. Штавише, скуп свих линеарних функционела дефинисаних на n-димензионалном векторском простору X, са уобичајеним сабирањем и множењем са скаларом, такође је векторски простор. Овај потоњи означавамо са X^* и називамо *адјунгованим* (придруженим) или дуалним простором простора X.

Помоћу базе $e_1, e_2, \dots, e_n \in X$, произвољан вектор $x \in X$ пишемо

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$$

па за произвољну функционелу $y^* \in X^*$ добијамо:

$$y^*(x) = y^*\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k y^*(e_k)$$

из чега се види да је деловање линеарне функционеле y^* на произвољан вектор x потпуно познато, ако знамо како она делује на неку базу (различите базе могу дефинисати исти простор), ако знамо скаларе

$$\eta_k = y^*(e_k). \tag{5}$$

Помоћу ових скалара пишемо

$$y^*(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k$$

што постаје општи облик линеарне функционеле на X. Обрнуто, ако су $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n \in \Phi$ дати скалари, онда је овом једнакошћу у бази $e_1, e_2, \dots, e_n \in X$ потпуно и једнозначно дефинисана функционела y^* на X.

Исту једнакост интерпретирамо информацијом перцепције[95]. Простору X способности јединке придружен (адјунгован) је дуалан простор X^* ограничења. Деловање хијерархије y^* на произвољне одговоре интелигенције x потпуно је познато, ако знамо како она делује на неке базне опције. База би, при томе, могла бити било који потпун скуп независних ситуација.

Упоређујући ово са претходним (истоименим) прилогом, контраваријантне координате пројекције тачке на осе добијене су паралелним њеним померањем (транслацијом) у односу на супротну осу, а коваријантне координате чине окомите пројекције тачке на осе. Како прве тако и друге, ове координате мењају се променом угла φ између оса.

Приметимо да смањивањем угла φ између оса и одржавајући истим контраваријантне координате, дата тачка се удаљава од исходишта, а одржавањем коваријантних координата дата тачка би се приближавала исходишту. Ове две кретње такве су да би њихов *скаларни* производ (у наставку назван канонски производ) остајо непромењен, а тај је тема наставка.

Канонски производ

Други називи за множење координата са функционелама $y^*(x)$ су скаларни, или унутрашњи производ вектора, овде $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ и $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$, па и *канонски производ* вектора x из простора X и вектора y^* из дуалног простора X^*. Означавамо га

$$y^*(x) = \langle x | y^* \rangle \tag{6}$$

у математици и слично у физици (другим редоследом). Матрично га пишемо

$$(\eta_1 \quad \dots \quad \eta_n) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k$$

где множимо матрицу-редак (типа $1 \times n$) са матрицом-ступцем (типа $n \times 1$) и добијамо скалар (матрицу типа 1×1).

Пример 1. Размотримо речено на примеру сличном ротацији (4).

[95] [9]

Нека је $A: X' \to X$ линеарно пресликавање координата $\xi_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\xi_k{}'$, или краће $x = A(x')$, односно $x = Ax'$, које векторски простор димензије n пресликава опет у неки n-димезниионалан. Тада је оператор A регуларан, инвертибилан, постоји обрнуто пресликавање $A^{-1}: X \to X'$.

Исти оператор базе пресликава на обрнут начин ($A: e \to e'$). Наиме, $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k = \sum_{k=1}^{n} \xi_k{}' e_k{}'$, што значи да оператор A који пресликава координате поништава оператор A^{-1} који пресликава базе. Знамо да је $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, где је I јединични оператор ($Ix = x$, за све x), а инверзни оператор A^{-1} је јединствен, једнозначно је одређен датим регуларним оператором A.

Коначно, из (5) и (6) видимо да функционела y^* пресликава базе и да се пресликава инверзно координатама. Другим речима, канонски производ (6) инваријантан је на линеарна пресликавања простора у које спада и ротација (4). То је смисао и релације (19) прошлог прилога. □

Пример 2. Канонски производ (6) је линеарна функционела првог и другог аргумента.

Наиме, $\langle \alpha x + \beta y | z^* \rangle = z^*(\alpha x + \beta y) =$ (јер је z^* линеарна фунцкионела)

$$= \alpha z^*(x) + \beta z^*(y) = \alpha\langle x|z^*\rangle + \beta\langle y|z^*\rangle,$$

а то значи да је (6) линеарна фунцконела првог аргумента.

Даље, $\langle z|\alpha x^* + \beta y^*\rangle = (\alpha x^* + \beta y^*)(z) = (\alpha x^*)(z) + (\beta y^*)(z) =$

$$= \alpha x^*(z) + \beta y^*(z) = \alpha\langle z|x^*\rangle + \beta\langle z|y^*\rangle,$$

а то значи да је (6) линеарна функционела другог аргумента. □

За два вектора $x \in X$ и $y^* \in X^*$ кажемо да су *окомити* један на други, што се пише $x \perp y^*$, када је $\langle x|y^*\rangle = 0$. Скуп $S_1 \subseteq X$ окомит је на скуп $S_2 \subseteq X^*$, пише се $S_1 \perp S_2$, ако је сваки елеменат првог скупа окомит на сваки елеменат другог скупа.

Пример 3. Ако је $x^* \in X^*$ окомито на простор X, онда је $x^* = 0$. Такође, ако је $x \in X$ окомито на простор X^*, онда је $x = 0$.

Заиста, нул-функционела ($x^* \in X^*$) је функционела која сваки вектор преводи у нулу, тј. $x^*(y) = 0$ за свако $y \in X$, што се помоћу канонског производа пише $\langle y|x^*\rangle = 0$ за све $y \in X$. Отуда је тачно прво тврђење.

Нека је $x \perp X^*$, тј. $\langle x|y^*\rangle = 0$ за свако y^* из X^*. У бази (e) биће

$$y^*(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k = 0$$

где је $\eta_k = y^*(e_k)$, а ξ_k су координате тог фиксног вектора у чврстој бази. Из произвољности вектора y^* следи произвољност бројева η_k и горњи збир исчезава за све η_k само ако су сви ξ_k нуле, тј. ако је $x = 0$, што је друго тврђење. □

Ови примери у уџбеницима алгебре наводе се и као теореме, а нарочито трећи. Тај трећи користи се за ширу дефиницију дуалности, ево како.

За два векторска простора X и Y над телом скалара (бројева) Φ кажемо да су дуални у ширем смислу, ако постоји *билинеарна* (линеарна на оба аргумента) функционела $B(x,y)$ са следеће две особине:

1. ако је $B(x,y)=0$ за свако $x \in X$ онда је $y=0$;
2. ако је $B(x,y)=0$ за свако $y \in Y$ онда је $x=0$.

Доследно примеру 3. видимо да је $B(x,y^*)=\langle x|y^*\rangle$ билинеарна функционела ($x \in X$, $y^* \in X^*$) и да су простори X и X^* дуални у наведеном ширем смислу.

Међутим, одговарајући „канонски производ“ дуалности у ширем смислу не мора бити инваријантан. На пример, скаларни производ коваријантних са коваријантним координатама (као и контраваријантних са контраваријантним) биће билинеарна функционела, а знамо да се такав мења пресликавањем простора.

17. Квадратна форма

3. април 2021.

Увод

Питање: Можеш ли ми рећи зашто је Нокиа пропала?

Одговор: Ха, ха, ха, ... ти то озбиљно мене питаш, зар је пропала, ко кажеш Нокиа? ... (претражио сам и нашао понешто). Ок, не знам много о тој компанији, али могу ти навести опште принципе (моје) теорије информације, па ти види уклапа ли се.

Информација перцепције $S = ax + by + cz + \ldots$ мери информацију, илити количину опција датог система, на начин да може представљати виталност компаније. Рецимо да имамо само три сабирка. Први фактори нека су учешћа у акцијама, деоницама, на пример a = 20% старих власника, оних који су допринели расту компаније, или власника чије идеје су сличне онима које су могле дизати компанију. Напомињем да ми често радимо несвесни шта је то што „може дизати“ компанију, али након неког времена тај рад ипак можемо некако вредновати. Нека је вредност рада таквих x = 10 бодова – шта год да су „бодови“, али да више њих буду већа вредност.

Нека су b = 35% којекакви мали акционари који обично разграбе акције успешне фирме хтијући већи профит, тражећи успех по сваку цену, ред, рад и дисциплину, укратко „ефикасност“. Са становишта (моје) теорије информације то има мању вредност од интелигенције и њене луцидности. Избегавање ризика смањује информацију, њену виталност и агресивност. Таквима дајмо y = 7 бодова.

Нека су c = 45% конкурентске компаније које су куповале акције више желећи да дату компанију успоре него да јој помогну. Дајмо им c = 3 бода.

Укупна информација перцепције сада је $S = 20 \times 10 + 35 \times 7 + 45 \times 3 = 580$. Међутим, када је Нокиа била успешног састава, или начина рада, структура њених деоница била је другачија, рецимо: 20% биле су конкурентске компаније, 35% мали акционари, 45% састав старог кова, па је тадашња информација перцепције $S_0 = 45 \times 10 + 35 \times 7 + 20 \times 3 = 755$. Била је виталнија него на крају.

Ово објашњење треба схватити као „врх леденог брега“, јер „теорија информације“ је веома широк концепт у много чему противан савременим веровањима.

***

Питање: ... супер су вам ови примери са ,,информацијом перцепције''. Причате ли некада ђацима о томе?

Одговор: Никад, мислим да се то не догађа, можда нехотично (Хвала! - се подразумева у комуникацији). Поделим им бесплатно књиге, ко хоће, а то је све, углавном. Своје „теорије“ не препричавам нити познаваоцима нити почетницима.

П: А да ли би нешто од свега било могуће негде у школском градиву?

О: Наравно да да. Ево, на пример, у завршном разреду средње школе, матуранти који ових дана уче вероватноћу могу наћи један овакав задатак.

Задатак. Три фабрике производе исти артикал. Прва га производи два пута више од друге, а друга и трећа производе исти број, током одређеног временског периода. Међутим, 2% производа прве и друге фабрике су дефектни, а 4 % производа је дефектно у трећој. Сви производени артикли стижу у исто складиште, одакле на случајан начин узимамо један. Наћи вјероватноћу да је он дефектан.

Решење. Од укупне количине производа на складишту из прве, друге и треће фабрике редом су: a = 1/2, b = 1/4 и c = 1/4. Њихов удео штете је x = 2%, y = 2% и z = 4%. Информација перцепције, тада мера могуће штете, износи $S = ax + by + cz$ = 2%/2 + 2%/4 + 4%/4 = 1% + 0,5% + 1% = 2,5%. То је коефицијент 2,5/100 = 0,025. □

Толика је вероватноћа 0,025 да случајно изабрани артикал из складишта буде неисправан. Ово решење је „информатичко“ и не ради се у школи. Наравно, добија се исти резултат и на друге (коректне) начине.

Билинеарна функционела

Билинеарно пресликавање је функција која комбинује елементе два векторска простора да би дала елемент трећег и линеарна је у сваком од својих аргумената. Примери су множења матрица, билинеарне форме и информација перцепције.

Функција две варијабле $f(x,y)$ је *билинеарна* ако је:

$$\begin{cases} f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 f(x_1, y) + \alpha_2 f(x_2, y) \\ f(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \beta_1 f(x, y_1) + \beta_2 f(x, y_2) \end{cases} \tag{1}$$

за свако $x \in X$ и $y \in Y$. Домени X и Y могу бити различити векторски простори, али када су коефицијенти вектора, а са њима и кодомени функције скалари (бројеви) из истог тела Φ, онда се функција назива *функционела*.

Рачунска операција између варијабли билинеарне функционеле на првом и другом месту, у случају (1) између x и y, не мора бити дефинисана, али када је у питању „информација перцепције“ то је скаларни производ вектора. Чак и то је „превише опште“, како ми кажу неке колеге, јер их „збуњује“ моја „исувише слободна“ њена употреба. Објаснићу поново.

Већ из самих начела да су вероватнији догађаји мање информативни, а затим да се вероватнији чешће реализују, те да физичка стања теже мање информативнима, следи да вероватноћу и информацију можемо третирати равноправно. Оне су попут позитивних и негативних бројева за које имамо заједнички назив „бројеви“, или инверзних функција какве су експоненцијална и логаритамска за које (још увек) немамо заједнички назив.

Када је вероватноћа p да ће се десити D мали број (догађај D се скоро сигурно неће десити), онда је $p = -\log(1-p)$, па је и сама вероватноћа тада нека информација[96]. Примери ових веза знају бити на разне начине „неочекивани“. Таласна функција $\psi = A \exp i(kx - \omega t)/\hbar$, решење Шредингерове једначине за слободну честицу, представља „талас вероватноће“ и њен аргумент у експоненту као логаритам неке вероватноће могуће је третирати као незнатно генералисану Хартлијеву информацију (логаритам броја једнако вероватних опција).

Према томе, треба пазити приликом тумачења фоми информације перцепције, али то није новост за алгебру. Тако се у следећој дефиницији подразумева да је X векторски простор димензије $n \in \mathbb{N}$ и још пуно тога у вези са ознакама и правилима, па тек онда важи речено.

Пресликавање $f : X^2 \to \mathbb{C}$ дефинисано једнакошћу

$$f(x,y) = (Ax, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i^*, \tag{2}$$

[96] [1], 14. Неодређеност, стр. 51.

где је $A = (a_{ij})_n$ квадратна матрица типа $n \times n$, а $y^* \in \mathbb{C}$ је коњугован број броја $y \in \mathbb{C}$, назива се *билинеарна форма* или билинеарна функционела[97]. Посебно, када је $y = x$, пресликавање $f : X \to \mathbb{C}$ дефинисано са

$$f(x) = (Ax, x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j x_i^*, \tag{3}$$

назива се *квадратна форма* или квадратна функционела.

Квадратна матрица $A = (a_{ij})_n$ је хермитска[98] ако је једнака својој коњуговано транспонованој, дакле ако је $a_{ij} = a_{ji}^*$ за све индексе $i, j = 1,2, \dots, n$, што пишемо $A^\dagger = A$, или краће $A^* = A$ означавајући коњуговање а подразумевајући и транспоновање. На пример, матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2-i & 3+2i \\ 2+i & 2 & 1-2i \\ 3-2i & 1+2i & 3 \end{pmatrix}$$

је хермитска. Дијагонални елементи хермитске матрице увек су реални бројеви. Ако другачије није наглашено, подразумева се да је матрица квадратне форме (3) хермитска.

Вредности квадратне форме (хермитске матрице) су реалне. Наиме, коњуговањем (3) следи:

$$f^*(x) = \left(\sum_{ij=1}^{n} a_{ij} x_j x_i^* \right)^* = \sum_{ij=1}^{n} \left(a_{ij} x_j x_i^* \right)^* = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}^* x_j^* x_i = \sum_{ij=1}^{n} a_{ji} x_i x_j^* = f(x)$$

јер је $a_{ij} = a_{ji}^*$, а само реални бројеви коњуговањем остају исти.

Хермитска матрица A назива се *позитивно дефинитна* ако за свако $x \neq 0$ важи $(Ax, x) > 0$, а тада је $a_{ii} > 0$ за све $i = 1,2, \dots, n$. Симетрична позитивно дефинитна матрица назива се *нормална* матрица. Примена ових матрица у квантној механици је огромна.

Информација перцепције

У теорији информације до функционела долазимо у неколико корака. Прво приметимо да је „информација“ нека „количина опција“, при чему морамо узети у обзир да немају све поједине опције једнаку „информациону тежину“. Мање вероватни догађаји више су информативни. Немају сви догађаји нити једнак број (свеједно, једнаких или различито „тешких“) опција и не морају све опције имати исту вероватноћу, а онда оне могу нагињати ка посебним реализацијама (оне вероватније чешће су).

Тако долазимо да другог запажања, да је „информација система“ пропорционална некој врсти „интелигенције“ система, насумичним плус чешћим исходима. При покушају раздвајања једнако и неједнако вероватних исхода, ради множења њихових количина, приметићемо да постоји још

[97] Функционела је функција из векторског простора у скаларно поље.
[98] Hermite, Charles (1822-1901), француски математичар.

боље одређење фактора информације система, на личне „способности“ и ванъска „ограничења“. Прве су рецимо вредности субјективних особина, друге објективних.

Коначно, на основу запажања да у ,,свету информација“ не комуницира све са свачим, поменуту меру система разумећемо као „информацију перцепције“. Неки системи, жива или нежива бића, имају различите перцепције о истој средини. Неутрон не реагује на електричну силу, а слепи мишеви и птице не користе иста чула у лову. Тако долазимо до раздвајања и по посебним, независним случајним догађајима.

Ширећи појам „интелигенције“, $I(\omega)$, на живи и неживи свет, са становишта појединог опита $\omega \in \Omega$ из неког скупа догађаја Ω, сматрамо је пропорционалном „информацији перцепције“ $S(\omega)$ и ванъским окружењима, назовимо их „хијерархијом“ $H(\omega)$. Тако из $I = S/H$, за дати догађај ω, следи $S = IH$, па за n-торку одвојених догађаја $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Omega$ добијамо $S = S_1 + \cdots + S_n$, или

$$S = I_1H_1 + I_2H_2 + \cdots + I_nH_n. \tag{4}$$

Овај израз препознајемо као билинеарну функционелу (1), а у случају потребе у квантној физици и посебно као квадратну форму (4).

Приметимо већ први „неочекиван“ резултат овако дефинисане „информације перцепције“, да смањена информација перцепције датог субјекта значи његову смањену способност излаза из тешкоћа, или смањено опажање тешкоћа, или обоје. Глупо створење, рекли бисмо, нити види проблеме око себе нити их зна решавати.

18. Варијантни вектори III

7. април 2021.

Настављам тумачити функционеле, овде дуалне (биортогоналне) базе векторских простора и примене те алгебре на квантна стања, све са становишта информације перцепције.

Увод

Основна значења „виталности“ су воља, полет, живост, а „информација перцепције“ је њена мера. Ствар је у томе што се по претпоставци „информатичког универзума“ материја, простор и време састоје од информација, а ова је мера опција и неизвесности, па је онда њоме могуће представљање разних појмова. То, наравно, ако се сама формула те перцепције покаже тачна.

Пре свега, Шенонова дефиниција информације (средњих вредности) њен је специјални случај. Укратко, ако је дат (потпун) низ вероватноћа $a, b, c, \ldots$ да ћемо добити информацију редом износа $x, y, z, \ldots$, онда ћемо добити информацију $S = ax + by + cz + \cdots$, а то је заправо врста „информације перцепције“. Примена је слична.

На пример, ако је на неком плацу изложено 100 аутомобила и то 60 из једне и 40 из друге фабрике, а међу онима из прве са 5% оштећених и друге са 3%, онда шанса да насумично узет ауто са плаца буде оштећен износи $0{,}60 \times 5\% + 0{,}40 \times 3\% = 4{,}2\%$, односно вероватноће $0{,}042$. То је модел који се лако поопштава и, додуше, мало теже интерпретира.

Када су бројнија аута оштећенија у још значајнијем проценту већа је и вероватноћа да са плаца случајно изабрани примерак буде оштећен. Обрнуто, ако бројнија аута имају тај проценат мањи, онда ће у укупној маси бити заступљено више исправних. Интуитивно то разумемо, оно је део информације перцепције али не и Шенонове.

Иста форма рачунања преносива је даље на наизглед сасвим другачије ситуације. Рецимо на „тешкоће“ неког играча, друштва, економије, државе са две основне претње, величина x и y. Нека субјект који се са претњама носи распореди своје снаге према њима у односу $a : b$. Када је то 100 аута, однос је a : b = 60 : 40. Износ субјектовог учествовања у „раду на тешкоћама“ управо је информација перцепције $S = ax + by$. Ако се више бацио на мању претњу, број S је мањи и за однос супротстављања претњи кажемо да је млитавији.

Многе законитости тих односа, дуализама, могуће је налазити у (мулти)линеарној алгебри, у квадратним и уопште билинеарним формама. То је тема прилога о варијантним векторима. Изненађујуће је шта се све из обичног живота налази међу самим познатим теоремама, али не кажем да их је једноставно интерпретирати.

Закони одржања информације перцепције (вероватноће и неизвесности такође) чине је коначном, на пример, зато што само бесконачност може бити свој прави део. Ово даље значи дељивост најдаље до најмањих порција „чисте неизвесности“, иза којих би наставак одузимања

неизвесности водио ка већој извесности. Стаћемо на егзистенцији елемената, најмањих порција информације перцепције, кванта дејства, односно коначне базе векторских простора.

Дуална база

За разлику од претходног истоименог наставка[99] где смо имали по једну функционелу на целом векторском простору, овде ћемо их одједном посматрати онолико колика је база простора. Ако је $e_1, \dots, e_n$ база простора X, онда се сваки вектор $x \in X$ може на јединствен начин писати у облику

$$x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n. \tag{1}$$

Да бисмо нашли координате ξ_k, редом за индексе $k = 1, \dots, n$, тражимо линеарне функционеле[100]

$$e_k^*(e_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1 & k = j, \\ 0 & k \neq j. \end{cases} \tag{2}$$

Симбол δ_{kj} назива се Кронекеров[101]. За функционеле (2) важи:

$$e_k^*\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_k^*(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \delta_{kj} = \xi_k$$

дакле

$$\xi_k = e_k^*(x). \tag{3}$$

Да је функционела e_k^*, ако постоји, линеарна при придруживању k-те координате вектру (1) у бази e, следи из $(\lambda x)_k = \lambda(x)_k$ и $(x + y)_k = (x)_k + (y)_k$, где је k-та координата вектора $(x)_k$. За доказ егзистенције функционеле e_k^* важна је следећа теорема.

Теорема 1. Нека је $e_1, \dots, e_n$ база у простору X. Ако су $A, B : X \to Y$ два линеарна оператора и $Ae_k = Be_k$ за $k = 1, \dots, n$ онда је $A = B$. За произвољне векторе $f_1, \dots, f_n \in Y$ постоји један и само један линеарни оператор $A : X \to Y$ такав да $f_k = Ae_k$ за све $k = 1, \dots, n$.

Доказ. Прво тврђење следи из:

$$Ax = A\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k = \sum_{k=1}^{n} \xi_k Ae_k = \sum_{k=1}^{n} \xi_k Be_k = B\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k = Bx$$

за свако $x \in X$, тј. $A = B$.

За доказ другог тврђења дефинишимо оператор $Ax = A\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k = \sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k$. Такав вектору:

[99] 16. Варијантни вектори II
[100] Функционела је пресликавање вектора у скаларе.
[101] Kronecker delta, https://en.wikipedia.org/wiki/Kronecker_delta

$$ax + by = a\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k + b\sum_{k=1}^{n} \eta_k e_k = \sum_{k=1}^{n} \left(a\xi_k + b\eta_k\right) e_k$$

придружује вектор:

$$A(ax + by) = \sum_{k=1}^{n} \left(a\xi_k + b\eta_k\right) f_k = a\sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k + b\sum_{k=1}^{n} \eta_k f_k = aA(x) + bA(y)$$

а како је то линеаран оператор и $Ae_k = f_k$, то је егзистенција оператора A доказана. Једнозначност следи из првог става ове теореме. □

Тиме је доказана и егзистенција линеарних оператора са X у Y. Са становишта репрезентације ових простора у квантној механици доказана је доследност понашања квантних стања (вектора) у квантном систему (векторском простору) на основу њихових елементарних особина (базе), а затим и егзистенција процеса (оператора) који преводе једна квантна стања (X) у друга (Y).

Горња теорема је позната а замало је позната и њена поменута интерпретација. Познати су и следећи ставови, друга, па трећа теорема, које наводим без доказа. Сваки систем линеарно независних вектора коначно димензионалног простора може се надопунити до базе тог простора, тј. сваки такав систем вектора је подскуп бар једне базе простора. То је „друга теорема“.

Следећа је „трећа теорема“ која каже да постоји једна и само једна матрица $\mathbf{A}$ типа $m \times n$ (са m врста и n колона) придружена линеарном оператору $A : X^m \to Y^n$, дакле пресликавању m у n димензионални векторски простор. Ти простори, X и Y, имају по m односно n базних вектора, а наведено придруживање, између оператора A и његове матрице $\mathbf{A}$, је *изоморфизам*[102] векторских простора.

Познати су докази да је $m \times n$ димензија како оператора A тако и њему изоморфне матрице $\mathbf{A}$, па их не наводим. Такође, да у случају композиције пресликавања $A: X^m \to Y^n$, $B: Y^n \to Z^p$ и $C: X^m \to Z^p$ за њима изоморфне матрице важи $\mathbf{C} = \mathbf{BA}$. Затим, да за множење матрица важе закони дистрибуције и асоцијације, али не и комутације.

Ова одавно установљена веза између матрица и оператора сматра се и репрезентацијом линеарних оператора помоћу „конкретних“ елемената – матрица. Као што знамо, она се почетком 20. века проширила ка репрезентацији линеарних оператора, односно њихових матричних представника, на квантна стања. Због веза информације и дејства, исто даље ширимо на саму информацију.

Егзистенција функционеле e_k^* следи из прве теореме, стављањем $Y = \Phi$ и $f_1 = \cdots = f_n = 1$ у Φ. Поред већ доказаног својства (2), показује се да вектори $e_1^*, \ldots, e_n^*$ чине независан и потпун скуп, тако да представљају базу простора димензије n.

[102] Изоморфизам је обострано једнозначно пресликавање (бијекција) између две математичке структуре.

Наиме, из претпоставке $\alpha_1 e_1^* + \cdots + \alpha_n e_n^* = 0$ за свако $x \in X$ биће $\alpha_1 e_1^*(x) + \cdots + \alpha_n e_n^*(x) = 0$, па стављајући $x = e_k$ редом за $k = 1, \dots, n$ добијамо $\alpha_k = 0$, што показује независност вектора e_k^*. Да они разапињу n-димензионалан простор, односно да могу дефинисати сваки вектор $x^* \in X^*$ таквог простора, следи из

$$\left[x^* - \sum_{j=1}^{n} x^*(e_j) e_j^*\right](e_k) = x^*(e_k) - \sum_{j=1}^{n} x^*(e_j) e_j^*\,(e_k) = 0$$

за $k = 1, \dots, n$ па је функционела у угластој загради нул-функционела. Према томе

$$x^* = \sum_{j=1}^{n} x^*(e_j) e_j^* \tag{4}$$

је произвољан вектор $x^* \in X^*$ и линеаран је спој вектора $e_1^*, \dots, e_n^*$. Одавде и на основу поменуте друге и треће теореме следи да је X^* n-димензионалан векторски простор.

База e^* из X^* је биортогонална, или *дуална* бази e из X, ако је

$$\langle e_k | e_j^* \rangle = \delta_{kj}, \quad k, j = 1,2, \dots, n. \tag{5}$$

Овде је опет употребљен Кронекеров симбол (2). Егзистенција биортогоналне базе следи из примера 3. прошлог истоименог прилога[103], а корист од ње долази из лакоће добијања координта вектора x у бази e. За произвољни вектор $x \in X$ биће

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x | e_k^* \rangle e_k \tag{6}$$

јер је $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$. Применом функционеле e_k^* добијамо $\xi_k = e_k^*(x)$, а ово је по дефиницији управо оно што даје (5).

Квантно стање

Квантно стање је расподела вероватноћа свих могућих исхода мерења датог квантног система. Оно се представља векторима попут (6), са незнатним прилагођавањима. Прво је, обрнуто алгебри, да су коваријантни вектори означени коњуговањем x^*, а контраваријантни[104] вектори некоњуговани, x. Овде користимо оба начина а нагласити ћемо који је у току, ако то буде потребно. Друго је да вектори (квантна стања) буду нормирани на јединицу, $\|x\| = 1$.

Као додатак (моје) теорије информације, скаларни производ вектора, квантних стања, сматраћемо вероватноћом њиховог удруживања. Како је квадрат норме вектора $\|x\|^2 = \langle x | x^* \rangle =$

[103] 16. Варијантни вектори II
[104] 15. Варијантни вектори

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \langle x|e_k^*\rangle e_k\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \langle x|e_j^*\rangle e_j\right)^* = \sum_{k,j=1}^{n} \langle x|e_k^*\rangle \langle x|e_j^*\rangle^* \delta_{kj} = \sum_{k=1}^{n} |\langle x|e_k^*\rangle|^2$$

дакле

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left|\xi_k\right|^2 \tag{7}$$

и са друге стране је $\|x\| = 1$, то компоненте ξ_k вектора $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ својим квадратом модула $\left|\xi_k\right|^2 = \xi_k \xi_k^*$ дефинишу вероватноћу његовог налажења у стању e_k. Пројекцију вектора на векторе интерпретирамо мерењем, мерење интеракцијом, а интеракцију комуникацијом. То је доследно уобичајеном бирању обзервабли (мерљивих величина) за базне векторе.

У Дираковој[105] бра-кет нотацији коваријантни (бра) и контраваријантни (кет) вектори пишу се, на пример:

$$\langle \psi| = (a \quad b \quad c), \ \ |\phi\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{8}$$

тако да је њихов (матрични) производ

$$\langle \psi|\phi\rangle = ax + by + cz. \tag{9}$$

Ако је то скаларни производ два вектора квантних стања, резултат ће бити реалан број. Уместо ψ и ϕ квантна физика за ближе одређење стања користи и друге ознаке. Када је $\psi = \phi$, тада (9) представља квадрат норме. Да би ови вектори били физички морају бити нормирани на јединицу, па за произвољне $a, b, \dots, z \in \mathbb{C}$ имамо:

$$\langle \psi| = \frac{(a,b,c)}{\sqrt{|a|^2+|b|^2+|c|^2}}, \ \ |\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{|x|^2+|y|^2+|z|^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\langle \psi|\psi^*\rangle = \frac{(a,b,c)}{\sqrt{|a|^2+|b|^2+|c|^2}} \frac{1}{\sqrt{|a|^2+|b|^2+|c|^2}} \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \\ c^* \end{pmatrix} = \frac{aa^*+bb^*+cc^*}{\left(\sqrt{|a|^2+|b|^2+|c|^2}\right)^2} = 1,$$

$$\langle \phi^*|\phi\rangle = \frac{(x^* \quad y^* \quad z^*)}{\sqrt{|x|^2+|y|^2+|z|^2}} \frac{1}{\sqrt{|x|^2+|y|^2+|z|^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x^*x+y^*y+z^*z}{\left(\sqrt{|x|^2+|y|^2+|z|^2}\right)^2} = 1,$$

$$\langle \psi|\phi^*\rangle = \frac{ax^* + by^* + cz^*}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2} \cdot \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2}} \tag{10}$$

[105] Paul Dirac (1902-1984), енглески теоријски физичар.

Подразумева се да број n компоненти $\langle x|e_k^*\rangle$ вектора (6) може бити различит, да саме те компоненте, коефицијенти вектора могу бити комплексни бројеви, али за скаларне производе (10) тражи се да буду реални. Ти производи представљају интеракције, а само оне су обзервабилне, физички реалне, чији производи су реални бројеви.

Квантно стање пре интеракције назива се *суперпозиција*. Она представља неизвесност исте количине информације као и било који њен евентуални исход. На пример, стање фер новчића пре бацања и било који од два исхода (писмо, глава) има информацију $\log_2 2 = 1$ бит. Стање коцке пре бацања и сваки од шест исхода имају исту информацију од $\log_2 6 \approx 2{,}58$ бита.

Суперпозиција укључује све могућности које доводе до познатих мерења, али за разлику од бацања новчића или коцке, у микросвету су (понекад непознате) опције стварне неизвесности које претходе (познатом) мерењу. Тамо претпоставке (суперпозицију) откривамо помоћу исхода (мерења), а то нас зна збунити. Илустроваћу ово на познатом[106] примеру.

Означимо базне векторе, обзервабле, са $|0\rangle$ и $|1\rangle$, а могуће путање честице векторима:

$$|\alpha\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle, \;\; |\beta\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \tfrac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle.$$

Квантно механичко стање $|\psi\rangle$ је суперпозиција путања α и β, а дефинишемо га као њихов (нормиран) збир:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\alpha\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) = |0\rangle .$$

Међутим, квантно стање $|\psi\rangle$ уместо збира, могла је бити разлика путања α и β, па бисмо измерили $|1\rangle$. Обе путање као и оба исхода имају исте вероватноће $\frac{1}{2}$, што се види из амплитуда $\frac{1}{\sqrt{2}}$, а у суперпозицији сабирамо амплитуде. То је интерференција.

Честице квантне механике интерферирају попут таласа, а вероватноће дефинишу мерења, па су квантна стања честице-таласи вероватноће. Закони одржања ограничавају ове интеракције и то нас такође понекад збуњује. Попут губитка јасноће појединих слика на видеу када хоћемо да детаљније прикажемо покрет, или повећања неодређености положаја честице када хоћемо да тачније одредимо њен импулс (релације неодређености), тако ће изјашњавање по једном својству честице довести до губитка неког другог.

На пример, у познатом експерименту двоструки-отвор[107], када је један од два прореза затворен изјашњено је кретање честице-таласа и њено понашање је другачије, више је честично, него када су оба отворена и њено понашање је таласно. Када кроз та два прореза пропуштамо само по једну честицу-талас у дугим периодима између, настају интерференције њених могућих путања и „честица“ се понаша више као талас. Толико о суперпозицији.

[106] https://www.quantiki.org/wiki/states
[107] https://en.wikipedia.org/wiki/Double-slit_experiment

Епилог

Тема је тек начета али у очекивању наставка, надам се, неке основе су појашњене. Даље треба утврдити да је дуалан од дуалног вектора опет полазни вектор и објаснити разлике између чистих и мешаних стања (pure, mixed states), пре свега, а затим и штошта другог.

19. Природно право

10. април 2021.

Расправа о „непроменљивим, објективним и вечним правилима људског понашања која се у том смислу сматрају сличнима природним законима“, са становишта теорије информације.

Питање: Може ли савремено право постићи логичку конзистентност геометрије?

Одговор: Не, претпоставка равноправности то не дозвољава. Ни у теорији не постоје довољно „равноправна“ лица или ситуације да бисмо такву претпоставку могли сматрати тачном. Проблем је даље са дедукцијом која из нетачне претпоставке даје непоуздане закључке; изведене последице истинитосно су ирелевантне.

П: Како онда могу бити равноправна два електрона?

О: Елементарне честице физике не могу бити апсолутно равноправне такође. Космос се стално мења, галаксије се удаљавају, супстанца се распоређује, а те промене делом су непредвидиве. Фотон док путује свемиром стално улази у макар мало другачије окружење од свег претходног. Увек у новом стању са својом околином, он је различит у било која два тренутка.

Честица без окружења не постоји, зависно од окружења она чини појаву. То је последица теорије информације перцепције ($S = I \cdot H = ax + by + \cdots + cz$) која „информацију“ дефинише тек када имамо честицу, вектор $I(a, b, \dots, c)$, са њеном околином, вектором $H(x, y, \dots, z)$. Доследно теорији релативности али и квантној механици, где оно што се опажа зависи од посматрача, у теорији информације коју заговарам, не постоји „информација честице“ независно од остатка свемира. Са друге стране, информација је основа простора, времена и материје.

П: Да ли је онда могуће мало променити претпоставке правне науке да бисмо добили логички савршен систем друштвених закона?

О: Не. Знам да је одговор збуњујући и да му нерадо верујемо, али истини није важно у шта ми верујемо. Није могућа доследна употреба ма какве „правне науке“ (енг. jurisprudence) тако да се њеним дедукцијама увек и увек изводе тачне последице, конзистентно попут геометрије.

Наиме, део реалности путем закона физике већ познајемо. Неке њене законитости тек ћемо открити, али све никада нећемо знати било зато што то субјективно нећемо моћи или зато што су објективно неспознатљиви (због Геделових теорема о непотпуности). Међутим, оно чега у физичкој реалности уопште нема, или је доказиво немогуће – не може постојати[108].

На тај начин гледајући, информација је увек нека истина, отворена или прикривена. Чак ни експлицитне истине попут теорема не могу свакоме бити јасне, а поготово не поруке из лажи, или самог ћутања. Нешто од овога демонстрира следећи, иначе познат пример.

[108] Свет се развија ка вероватнијем, мање информативном, са мање неочекиваних догађаја.

На слици се налазе три кутије од којих само једна садржи благо, а испод сваке је изјава од којих је једна истинита. Ако је истинита прва, онда је је и друга тачна, па прва није истинита и благо није у првој кутији. Ако је благо у другој кутији, друга изјава није тачна, а једна и само једна од изјава прве и треће је тачна. Према томе, благо може бити у другој кутији. Ако је благо у трећој кутији, трећа изјава је тачна, али тачна је и друга, па трећа изјава није тачна, што значи да ,,благо јесте у кутији 1'', а то је у контрадикцији са тврђењем да је благо у трећој кутији и да не може бити у још некој. Према томе, благо је у другој кутији!

Да је „свет неистина“ изоморфан (еквивалентан) „свету истина“ такође сам указивао раније. Постоји обострано једнозначно придруживање (бијекција) таблица истинитости алгебре логике са онима које бисмо из ових добијали заменом „тачно“ ($\top$) са „нетачно“ ($\bot$) и обрнуто. Свет чистих неистина (контрадикција) овом дуплом заменом тачно-нетачно, постао би свет чистих истина (таутологија), што је на свој начин и раније схваћено у матаматици, у њеној методи доказивања „свођењем на контрадикцију“.

П: Лаж је прикривена истина?

О: Тако је. Начелно, теорија вероватноће држи да су вероватнији догађаји чешћи, а отуда су чешћи мање информативни. То је „принцип најмање информације“, или ако хоћете „принцип најмањег дејства“, јер можемо узети да су дејство и информација еквиваленти. Природа не воли емисију информација, она преферира њено скривање, где год то може, а неки од тих начина су лажи и дезинформације.

П: Шта нас може спречити да неки систем бар покушамо ставити у стање равноправности, шта се тада може десити?

О: Сила мења вероватноће. Трајекторије по којима се крећу физичке честице, са њиховог становишта, највероватније су им путање и то тако остаје док им се перцепције не промене. Чаша стоји на столу зато што је у датом тренутку њој ту највероватнији положај. Због закона одржања информације она остаје таква – све док неко друго тело (рука) или сила чашу не помери. Сила се дешава променом неизвесности и односа вишка (мањка) информације средине.

Одговор на ово питање, затим, нађимо примећујући да стање равноправности носи максималну информацију. Већа је неизвесност у бацању фер новчића него фаличног. Када знамо да је новчић деформисан тако да вероватније пада писмо него глава и писмо падне, то је очекиван, мање информативан догађај. Принцип минимализма информације супротставиће се једнакости.

У (мојој) теорији информације, једнакост је по себи сила која би да мења односе у неједнаке, коју интуитивно осећамо и упрежемо када постављамо спортске такмичаре у једнаке позиције да би

утакмица била што живља, или је експлоатишемо симулирајући демократију да би постигли што већи развој.

П: Зато кажете да равноправност генерише сукобе?

О: Да. Тенденције увек можемо препознати као привлачне или одбојне. Рецимо да се ради о првом случају, да радимо са вероватноћама и са само две могућности ($S = ax + by$). Ако је за сваког од два учесника (средину, друштво, појединца) прва могућност привлачнија тако да их има више у понуди ($a > b$ и $x > y$), њихова спрега (S) показаће већи[109] износ, вероватније стање, него да је првом учеснику прва могућност привлачнија а другом одбојнија ($a > b$ и $x < y$). Вероватније је да ће се „исти“ удружити и повећати количину првих могућности.

Тако настају политичке фракције и мржња према онима који „нису наши“. Супротно „нашима“ јавља се антагонизам према „њиховима“, па радећи у првом поменутом случају (са вероватноћама), као ехо налазимо и одбојне силе и рад рецимо са Хартлијевим информацијама, логаритмима вероватноћа.

П: До сличног долазимо и помоћу модела слободних мрежа?

О: Да, тачне теорије сагласне су. У моделу „слободних мрежа“ имамо равноправне повезнице које полазе (завршавају) чворовима. Ради једноставности, замислимо да имамо само два чвора, први са десет повезница а други са само једном, а да на њих требамо надовезати неку нову повезницу (и чвор). Како су свих 11 једнако вероватни наставци, а први чвор их има 10, то је шанса да ће се надовезивање десити на први чвор 10 пута већа него на други. Толико је већа шанса да ће први чвор затим имати 11 повезница а други и даље само једну. Вероватнији догађаји су чешћи, па се чворови са више повезница чешће повећавају!

Слободна мрежа се развија у ону са веома мало чворова богатим повезницама наспрам великог броја сиромашних. Где год имамо принцип равноправности нараста та врста неравноправности. На пример, у слободном тржишту новца издвајају се малобројни веома богати. Уз „принципијелну равноправност“ путовања, мишљења, права на слободу, развија се класа оних који могу путовати више, чије мишљење се више цени, који су слободнији. То не морају бити исте класе, али опет и за равноправне међу њима – даље се развија иста вододелница.

Тај начин је еквивалентан горњем, помоћу „информације перцепције“, тумачене помоћу „привлачне“ и „одбојне“ склоности. У случају прве радимо са вероватноћама (више вероватноће – више склоности), у случају друге са информацијом (више информације – мање склоности). Тада помаже да замислимо склоности уопште, рецимо као „волети квадрате“, а несклоност ,,волети кругове''. Средина која „воли квадрате“ расте привлачећи друге исте склоности. Онај ко остане на средини цесте бива прегажен, кажу. Тако се свака супстанца опредељује, сваки облик живота, а тако ће бити и са аутоматима. Неће бити могуће направити вештачку интелигенцију која би могла игнорисати ову законитост!

[109] Ако је $\varepsilon\delta > 0$ тада је $(a + \varepsilon)(x + \delta) + ax > (a + \varepsilon)x + a(x + \delta)$, што је лако проверити.

П: Шта ако силом одржавамо равноправност?

О: Управо је то оно што покушавамо правним системом, а заузврат добијамо све више правника, закона, трошкова. Потреба за интервенцијом нараста (не експоненцијално како брзоплето пишу неки, него споријим степеним законом слободних мрежа) и у некој фази „принцип најмање информације“ надвлада. На крају нашу силу закона побеђује „притисак равноправности“.

П: Што већи тај „притисак“ успева држати, друштво је виталније?

О: Да, тако би требало бити, већ сам писао. То је моћ и зла коб демократије. Потребно је одржавати информацију система што већом, дакле са више слобода, или бар више оних „важнијих“, што дуже, да би развој даље трајао. Додуше, тако ће расти експлозивност ситуације и свеједно ће на крају олигархије надвладати равноправност, али у неком смислу успех је био већи са дужим спречавањем распада почетног стања.

20. Рефлексија простора

17. април 2021.

Објашњава се изоморфизам информације перцепције система (бића) са једнаким бројем чула, а помоћу форме познате из линеарне алгебре.

Увод

Информација перцепције, $S = A \cdot B$, је окосница теорије информације коју истражујем. Она је спрега опција и ограничења, могућности индивидуе и забрана околине, можемо рећи „интелигенције“ и „хијерархије“. Када се ова својства, акције A и реакције B, испољавају на низу појава $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, на k-том елементу $(k = 1,2, \dots, n)$ посебним вредностима a_k и b_k, тада су фактори информације перцепције низови $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$, а она канонски производ

$$S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n. \tag{1}$$

Прецепција онога шта се опажа у спрези је са оним чиме се опажа, односно ко опажа.

Структуру (1) формирају два фактора, компоненте субјекта и компоненте објекта. То су способност решавања проблема и способност опажања проблема, или могућности и немогућности. Ови фактори су попут Њутнове акције и реакције, али и таласа (светлости, честице, водених) чија амплитуда се удаљава и повлачи назад као осциловање еластичних својстава ње саме наспрам њене околине, или као промена наспрам стања. Појаснићу ово последње.

Оператор који представља квантни процес делује на вектор који представља квантно стање и трансформише га. Обе структуре, оператора и вектора, алгебарске су форме узајамно дуалних (ко- и контра-варијантних) Хилбертових векторских простора[110]. Множење њихових одговарајућих представника даје „информацију перцепције“, познатију као скаларни, односно канонски производ. То је један од начина поопштавања формуле (1).

Процеси и стања су дуалне структуре, чије компоненте имају и особине из прошлог прилога[111] такође. Њихов производ инваријантан је, стабилан, односно највероватнији је спој у датом тренутку на датом месту. Та врста инваријантности позната је и пре Ајнштајна који ју је користио у заснивању својих Општих једначина, а може се пратити кроз особине тензора. Исто својство вектора преносиво је на стања и процесе квантне механике.

Размишљајући у оквиру теорије информације на класичан (материјалистички) начин измиче нам поента на коју указујем, иако њене елементе можемо налазити и у нај-механицистичким познатим теоријама.

[110] https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsta.2016.0393
[111] 15. Варијантни вектори, формула (19).

Промена електрона опет у електрон процесом који га мења, а који се смењује са опет истим процесом који „електрон мења у електрон“, дуална је појава стањима између процеса. Замена стања истим стањем омогућује смена процеса истим процесом. У случају „распада честица“ имамо такође одговарајући „распад процеса“. Доследно, информацију перцепције ($S = A \cdot B$) ширимо на множење вектора оператором, односно пресликавање стања процесом, што је лакши део посла који нас чека, јер је (апстрактна) математика тих оператора већ веома развијена. Тежи део посла биће интерпретација.

На пример, множење ретка матрице са ступцем вектора настаје иста позиција новог вектора, као на слици лево. То је она појава да „све зависи од свега“ која је заправо привидна, јер у векторским просторима постоје и независни вектори. Ово ће се показати згодним за појашњење многострукости, испреплетености и посебности које захтева теорија информација, а које су само на први поглед противречне.

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x+b_1y+c_1z \\ a_2x+b_2y+c_2z \\ a_3x+b_3y+c_3z \end{pmatrix}$$

Изоморфизам

Изоморфизам је обострано једнозначно пресликавање између две математичке структуре. Као и свака бијекција, изоморфизам $f : X \to Y$ је такође инвертибилан, постоји јединствена њему инверзна функција $f^{-1} : Y \to X$. Егзистенцију (бар једног) изоморфизма пишемо $X \cong Y$.

Посебно, када су X и Y векторски простори исте димензије $n = 1,2,3,\ldots$ над истим телом Φ скалара, кажемо да су они *алгебарски изоморфни* ако постоји бијекција f са својством

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \tag{2}$$

за сваки пар $x, y \in X$ и сваки $\alpha, \beta \in \Phi$. Свако (алгебарско) тврђење о простору X том приликом прелази у одговарајуће тврђење о простору Y.

Тако линеарно независни вектори $x_1, \ldots, x_m$ простора X постају линеарно независни вектори $y_1 = f(x_1), \ldots, y_m = f(x_m)$ простора Y. Заиста, из

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k f(x_k) = 0$$

следи

$$f\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k\right) = 0$$

а $f(x) = 0$ повлачи $x = 0$, јер f преводи нулу у нулу. Наиме, из $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ следи $f(0) = 0$, а због инвертибилности имамо и $f^{-1}(0) = 0$. Даље, из $x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k = 0$ и независности x_k следи $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$. Према томе, простори X и Y исте су димензије n.

Лако се проверава да је изоморфизам релација еквиваленције, тј. важи:

(Рефлексивност) $X \cong X$;
(Симетрија) ако је $X \cong Y$ онда је $Y \cong X$;
(Транзитивност) ако је $X \cong Y$ и $Y \cong Z$ онда је $X \cong Z$.

Из оваквих разматрања следи

Став. Свака два n-димензионална простора над Φ међу собом су изоморфна.

На пример, замислимо честицу која може бити на једном од три места x-осе, апсциси -1, 0 и +1. То може бити већа, средња и мања удаљеност честице од неког места (рецимо $x = 2$), или рангирање стања енергије произвољног квантног система, или било којих узастопних вредности. Када ове интерпретације полазе од изоморфних векторских простора, онда су одговарајућа тврђења еквивалентна.

Узмимо да је квантно стање $|1\rangle$ где је честица лоцирана, тј. налази се на позицији 1, а стање $|0\rangle$ где је честица лоцирана на позицији 0. Мерећи позицију честице у стању $|1\rangle$ налазимо $x = 1$ са вероватноћом 1. Слично, налазимо $x = 0$ са вероватноћом 1 за честицу представљену вектором стања $|0\rangle$. То су две (различите) репрезентације истог векторског простора, али можемо рећи и репрезентације два изоморфна векторска простора.

Ове репрезентације треба разликовати од стања $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ које је такође прихватљиво квантно стање. Мерењем положаја честице стања $|\psi\rangle$, исход ће бити $x = 0$ или $x = 1$ са 50% вероватноће. Оно не дозвољава ни једну другу вредност.

Аналогно су изоморфне информације перцепције створења са истим бројем (независних) чула. Још већи степен еквиваленције постизали бисмо са истим врстама чула, али и онако нам остаје много тога заједничног за истраживање. Обратимо пажњу даље да пресликавање интензитета опажања поменутих изоморфних створења, истих или различитих чула, представља коњугације које су тема наставка.

Коњугације

Знамо да функционеле вектора простора X (над телом скалара Φ) формирају нови али једнакодимензионалан векторски простор X^* (над истим скаларима). Од X^* опет на сличан начин настаје X^{**}, па од овога X^{***} и тако даље, сваки исте димензије $n = \dim X$. Сви ови простори имају скаларе из истог тела Φ, адјунговани су и узајамно су изоморфни (Став).

Посматрајмо затим пар простора X и X^{**}, па издвојимо један, тзв. *природни изоморфизам*, дефинисан датим $x \in X$ и произвољним $y^* \in X^*$. Елеменат $y^*(x)$ потпуно је одређен у Φ, а придруживање $y^* \to y^*(x)$ је линеарно, јер:

$$\alpha_1 y_1^* + \alpha_2 y_2^* \to (\alpha_1 y_1^* + \alpha_2 y_2^*)(x) = \alpha_1 y_1^*(x) + \alpha_2 y_2^*(x).$$

На тај начин, датим $x \in X$, добијамо линеарану функционелу на X^*. Означимо је $\hat{x}(y^*) = y^*(x)$, па је $\hat{x} \in X^{**}$, а различитим векторима простора X одговарају различити вектори простора X^{**}.

Наиме[112], из $x_1 \neq x_2$ следи егзистенција функционеле $y^* \in X^*$ са својством $y^*(x_1 - x_2) \neq 0$, или $y^*(x_1) \neq y^*(x_2)$. Отуда $\hat{x}_1(y^*) \neq \hat{x}_2(y^*)$, тј. $\hat{x}_1 \neq \hat{x}_2$.

Како се релацијом $\hat{x}(y^*) = y^*(x)$ сваком $x \in X$ придружује један и само један елеменат $\hat{x} \in X^{**}$, то са $\hat{x} = \varphi \cdot x$, где је $\varphi \in \Phi$, можемо дефинисати оператор на X са вредностима у X^{**}. Одговарајуће пресликавање, $\varphi : X \to X^{**}$, линеарно је, различите елементе преводи у различите, па је оно изоморфизам између простора X и простора $\varphi(X) \subseteq X^{**}$. Оно је конструисано без употребе било какве базе, а та два простора имају исте алгебарске структуре, па их можемо изједначити у смислу да уместо првог простора проучавамо други. Изједначавајући X и $\varphi(X)$, односно x и $\hat{x} = \varphi x$, можемо X сматрати потпростором X^{**}.

Ова разматрања су одавно позната, она су у основи алгебре. Простор X за који је $\varphi(X) = X^{**}$, или $X = X^{**}$, назива се *рефлексиван простор*. Сваки n-димензионалан простор је рефлексиван, али то не важи за бесконачно димензионалне просторе. Штавише, ако је простор рефлексиван, онда је он обавезно коначно димензионалан.

Разлика између коначно и бесконачно димензионалне базе простора настаје изједначавањем линеарне комбинације независних вектрора са нулом, $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n = 0$, где у случају коначног броја $n \in \mathbb{N}$ мора бити $\xi_k = 0$ баш за свако $k = 1,2, \dots, n$. Међутим, у случају бесконачне базе, у граничном случају $n \to \infty$, мора бити $\xi_k = 0$ за „скоро све“ индексе, што значи да за коначно много индекса k може бити $\xi_k \neq 0$.

Епилог

Два се непосредна закључка намећу након овог излагања. Први је да је тешко, а можда и немогуће, одвојити форму од наводне суштине информације перцепције и да постоје „безбројни“ слојеви еквивалентних форми. Други је да су све те форме у оквиру коначности, иако се чини да им је бесконачност „на дохват руке“.

Мало слободније размишљајући, у теорији информације је могуће под извесним условима дозволити и бесконачност. Основно је приметити да одузимањем коначног подскупа из бесконачног овај већи увек и даље остаје бесконачан. Затим и више од тога, да из бесконачног скупа можемо издвојити и бесконачан потскуп а да полазни опет остане бесконачан, као што је издвајање негативних из скупа целих бројева.

Могуће је такође из бесконачног скупа одузимање бесконачно много бесконачних потскупова, а да полазни при томе и даље остане бесконачан. Такво је издвајање производа датог простог броја са целим бројевима, а затим издвајање свих таквих бесконачних потскупова узимањем редом

[112] 16. Варијантни вектори II, Пример 3.

сваког другог простог броја из неограниченог низа 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ..., иза којег опет остаје бесконачно много (сваки други) простих бројева.

Ова могућност бесконачности, заједно са њеном непротивречношћу, дозвољава егзистенцију и светова већих од коначних. Већ сам писао[113] да су такви заправо неопходни теорији информације. Држимо ли се само статичног „контингента могућности“ кроз који наводно путујемо сопственом садашношћу, негирали бисмо објективност неизвесности. Релације неодређености, на пример, биле би последица само наше немогућности сазнања крајњих узорка, а за које се у том случају пређутно претпоставља да постоје. Али, ако би постојали „крајњи узроци“ онда не би било некомутативних оператора чије репрезентације су квантне еволуције, па бисмо дошли до неприхватљивог закључка да алгебра није тачна.

[113] [2], 3.17 Садашњост

21. Коњугован простор

21. април 2021

Демонстрирана је коњугована матрице и корак по корак елементарно изведена је унитарна матрица другог реда.

Увод

Питање: Зашто коњуговање називаш „рефлексијом простора“, какве то везе има са комплексним бројевима?

Одговор: Да новаци лакше укапирају о чему се ради. Коњуговање, замена, или спрезање, у алгебри значи промену предзнака имагинарне јединице (i – чији квадрат је -1). У комплексној равни то је рефлексија тачке (која представља комплексан број) око x-осе.

Функције које пресликавају векторе у скаларе (бројеве) називамо функционелама, а када комплексни бројеви чине тело скалара векторског простора, онда коњуговањем добијамо рефлексије (осно-симетричне слике). Двострука рефлексија је почетни оригинал и то је суштина доказа у том прилогу[114].

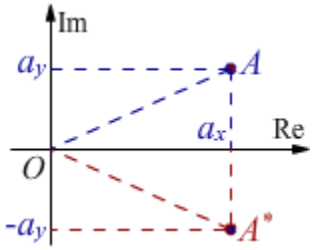
П: Зашто то у прилогу не кажеш тако поједностављено, да то свако може разумети, него ви математичари стално нешто компликујете?

О: Зато што то тако укратко препричано није довољно тачно. Комплексна раван није нешто нарочито у векторским просторима. Када бих „доказ“ те теореме (да двапут коњугован даје полазни простор) свео на ову причу, било би то као „доказ“ да је Земља равна плоча зато што је нека ливада равна.

Не би том доказивању помогло ни набрајање других векторских простора где тврђење важи, као што таблицу сабирања не можеш доказати наводећи поједине објекте и парове бројева, попут „две јабуке плус три јабуке су пет јабука“. Математика је зато то што је (екстремно тачна), јер не пеца се на полуистине. Само обрнуто, након онога „вишег“ доказа даље знамо да исто важи и „доле“ за комплексне бројеве, али покушаћу нешто смислити.

Коњугована матрица

Нека је дата тачка $A \in \mathbb{C}$ комплексне равни, као на слици лево. Координате су јој $A(a_x, a_y)$. Она представља комплексан број $A = a_x + ia_y$ са реалним и имагинарним делом $a_x = \mathrm{Re}\, A$ и $a_y = \mathrm{Im}\, A$ који су реални бројеви, а за имагинарну јединицу i важи $i^2 = -1$. Тачка $A^*(a_x, -a_y)$ која је коњугована тачки A рефлектује се (осно пресликава) око апсцисе, овде „реалне осе“.



Знамо да је производ коњуговано комплексних бројева реалан број:

$$|A|^2 = AA^* = (a_x + ia_y)(a_x - ia_y) = a_x^2 + a_y^2 \in \mathbb{R}$$

[114] 20. Рефлексија простора

па се поставља питање како то пренети у простор матрица.

Матрице су репрезентације линеарних оператора, а и једни и други су врсте векторских простора. Квантна стања и квантни процеси такође су интерпретације вектора, где прве прећутно сматрамо уобичајеним векторима и матрицама-колонама, а друге унитарним операторима и квадратним матрицама. Стања и одговарајући процеси су узајамно дуалне репрезентације вектора.

Аналогно $A(a_x, a_y)$ означимо координате тачака $B(b_x, b_y)$, $C(c_x, c_y)$, $D(d_x, d_y)$ и дефинишимо квадратну матрицу другог реда (типа 2×2):

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{1}$$

Да би производ оваквих коњугованих матрица давао реалан *траг* (збир коефицијената главне дијагонале), потребно је да коњуговањем матрицу транспонујемо. Тако добијамо:

$$\mathbf{M}\mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^* + BB^* & AC^* + BD^* \\ CA^* + DB^* & CC^* + DD^* \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}^*\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^*\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^*A + C^*C & A^*B + C^*D \\ B^*A + D^*C & B^*B + D^*D \end{pmatrix}$$

са истим трагом у оба случаја:

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{M}\mathbf{M}^*) = \mathrm{Tr}(\mathbf{M}^*\mathbf{M}) = |A|^2 + |B|^2 + |C|^2 + |D|^2 \tag{2}$$

који је, дакле, реалан број. Посебно је:

$$AC^* = (a_x + ia_y)(c_x - ic_y) = (a_x c_x + a_y c_y) - i(a_x c_y - a_y c_x) = A \cdot C - i[A, C]$$
$$A^*C = (a_x - ia_y)(c_x + ic_y) = (a_x c_x + a_y c_y) + i(a_x c_y - a_y c_x) = A \cdot C + i[A, C]$$

где су скаларни и псеудо-скаларни производ, односно комутатор[115]:

$$\begin{cases} A \cdot C = a_x c_x + a_y c_y = |A||C| \cos \sphericalangle(A, C) \\ [A, C] = a_x c_y - a_y c_x = |A||C| \sin \sphericalangle(A, C) \end{cases} \tag{3}$$

па је:

$$AC^* = |A||C| \cos \sphericalangle(A, C) - i|A||C| \sin \sphericalangle(A, C) = |A||C|[\cos \sphericalangle(A, C) - i \sin \sphericalangle(A, C)]$$
$$A^*C = |A||C| \cos \sphericalangle(A, C) + i|A||C| \sin \sphericalangle(A, C) = |A||C|[\cos \sphericalangle(A, C) + i \sin \sphericalangle(A, C)]$$

односно:

$$\begin{cases} AC^* = |A||C| e^{i \sphericalangle(C,A)} \\ A^*C = |A||C| e^{i \sphericalangle(A,C)} \end{cases} \tag{4}$$

са узимањем у обзир смера угла. Слично налазимо за B, D и даље.

[115] [1], 3. Потенцијал информације

Да би елементи споредне дијагонале производа коњугованих матрица (1) били реални бројеви, довољно је да су нуле оба елемента једне од дијагонала (главне или споредне) полазне матрице (1). Ако је $B = C = 0$, Тада, са $|A| = |D| = 1$, имамо:

$$\mathbf{M}\mathbf{M}^* = \mathbf{M}^*\mathbf{M} = \mathbf{I} \tag{5}$$

где је

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

јединична матрица такође другог реда. Друга опција је $|A| = |D| = 0$, са $|B| = |C| = 1$, када опет важи (5). Поред саме јединичне матрице (6), примери поменутих су:

$$\boldsymbol{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

иначе познате *Паулијеве матрице*[116], или:

$$\mathbf{q}_x = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{q}_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{q}_z = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \tag{8}$$

које су *кватерниони*[117].

Наравно, не морају дијагонални елементи матрице (1) бити нуле да би њени коњуговани производи давали реалну матрицу. Довољно је да су бројеви $AC^* + BD^*$ и $A^*B + C^*D$ реални, тј.

$$(AC^* + BD^*)^* = AC^* + BD^*,\ \ (A^*B + C^*D\ )^* = A^*B + C^*D, \tag{9}$$

$$A^*C + B^*D = AC^* + BD^*,\ \ AB^* + CD^* = A^*B + C^*D.$$

Даље, почев са (4), развијамо само прву једнакост:

$$|A||C|e^{i\sphericalangle(A,C)} + |B||D|e^{i\sphericalangle(B,D)} = |A||C|e^{i\sphericalangle(C,A)} + |B||D|e^{i\sphericalangle(D,B)},$$

$$|A||C|\left[e^{i\sphericalangle(A,C)} - e^{i\sphericalangle(C,A)}\right] = |B||D|\left[e^{i\sphericalangle(D,B)} - e^{i\sphericalangle(B,D)}\right],$$

$$2|A||C|e^{i\sphericalangle(A,C)} = 2|B||D|e^{i\sphericalangle(D,B)},$$

$$|A||C| = |B||D|e^{i[\sphericalangle(D,B)+\sphericalangle(C,A)]}$$

Лева страна ове једнакости је реалан број, па то мора бити и десна. Слично радимо и са десном једнакошћу (9) и добијамо:

$$\begin{cases} \sphericalangle(D,B) + \sphericalangle(C,A) = 0 \\ \sphericalangle(A,B) + \sphericalangle(C,D) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

што се тиче углова.

[116] [3], формула (2.56)
[117] [3], формула (2.58)

Што се тиче интензитета ових комплексних бројева, биће:

$$|A||C| = |B||D|, \;\; |A||B| = |C||D|. \tag{11}$$

Када је $|B||C| \neq 0$, множећи ове две једнакости добијамо $|A| = |D|$, а делећи $|B| = |C|$.

Пример 1. Ево матрице која испуњава услове (11), али не и (10):

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2+i & 3-5i \\ 5+3i & 1+2i \end{pmatrix}, \; \mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} 2-i & 5-3i \\ 3+5i & 1-2i \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}\mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} 39 & 6-12i \\ 6+12i & 39 \end{pmatrix}, \; \mathbf{M}^*\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 39 & 12-6i \\ 12+6i & 39 \end{pmatrix}.$$

Као што видимо, нису сви коефицијенти коњугованих производа релни бројеви. □

Пример 2. Следећа матрица испуњава услове (10), али не и (11):

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 6+3i & 1+2i \\ 2+4i & 2+i \end{pmatrix}, \; \mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} 6-3i & 2-4i \\ 1-2i & 2-i \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}\mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} 50 & 28-15i \\ 28+15i & 25 \end{pmatrix}, \; \mathbf{M}^*\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 65 & 20+3i \\ 20-3i & 10 \end{pmatrix}.$$

Ни ови коефицијенти коњугованих производа нису реални бројеви. □

Пример 3. Наредна матрица испуњава оба услова (10) и (11):

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -2+i & 1+2i \\ 1+2i & -2+i \end{pmatrix}, \; \mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} -2-i & 1-2i \\ 1-2i & -2-i \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}\mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \; \mathbf{M}^*\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Сви коефицијенти коњугованих производа сада су реални. □

Унитарна матрица

Квадратна матрица је *унитарна* ако је њој коњугована (и транспонована) једнака њеној инверзној. У последњем примеру (Пример 3) то би била матрица $\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{M}$. Зато што је производ матрице и коњуговане реална (јединична, идентичка) матрица, то унитарна матрица испуњава услове (10) и (11). А сада ћемо извести њен општи облик на основу претходних разматрања.

Дефинишемо произвољне коефицијенте матрице (1), па употребимо услове (10):

$$A = pe^{i\alpha}, \;\; B = qe^{i\beta}, \;\; C = re^{i\gamma}, \;\; D = se^{i\delta}, \tag{12}$$

$$\sphericalangle(D,B) + \sphericalangle(C,A) = 0, \;\; \sphericalangle(A,B) + \sphericalangle(C,D) = 0,$$

$$(\delta - \beta) + (\gamma - \alpha) = 0, \;\; (\alpha - \beta) + (\gamma - \delta) = 0,$$

$$\gamma = \beta, \;\; \delta = \alpha. \tag{13}$$

Затим употребимо услове (11):

$$|A||C| = |B||D|, \;\; |A||B| = |C||D|,$$

$$\left|pe^{i\alpha}\right|\left|re^{i\beta}\right| = \left|qe^{i\beta}\right|\left|se^{i\alpha}\right|, \;\; \left|pe^{i\alpha}\right|\left|qe^{i\beta}\right| = \left|re^{i\beta}\right|\left|se^{i\alpha}\right|,$$

$$|pr| = |qs|, \;\; |pq| = |rs|,$$

$$|r| = |q|, \;\; |s| = |p|. \tag{14}$$

Из (12), (13) и (14) следи

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} pe^{i\alpha} & qe^{i\beta} \\ \pm qe^{i\beta} & pe^{i\alpha} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где се (позитиван) предзнак коефицијента доле десно може одредити из услова да је производ коњугованих матрица (15) реална матрица, непосредно их множећи:

$$\mathbf{M}\mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} pe^{i\alpha} & qe^{i\beta} \\ \pm qe^{i\beta} & pe^{i\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} pe^{-i\alpha} & qe^{-i\beta} \\ \pm qe^{-i\beta} & pe^{-i\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 \pm q^2 & 2pq\cos(\alpha-\beta) \\ \pm 2pq\cos(\alpha-\beta) & p^2 \pm q^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}^*\mathbf{M} = \begin{pmatrix} pe^{-i\alpha} & qe^{-i\beta} \\ \pm qe^{-i\beta} & pe^{-i\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} pe^{i\alpha} & qe^{i\beta} \\ \pm qe^{i\beta} & pe^{i\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 \pm q^2 & 2pq\cos(\alpha-\beta) \\ \pm 2pq\cos(\alpha-\beta) & p^2 \pm q^2 \end{pmatrix}.$$

Предзнак коефицијента доле лево матрице (15), испред q, може бити плус или минус.

Матрица (15) је унитарна ако коњуговани производи дају јединичну матрицу. То даље дефинише:

$$p = \cos\omega, \;\; q = \sin\omega, \;\; \alpha - \beta = \pm\frac{\pi}{2}, \tag{16}$$

где је угао φ произвољан, толико произвољан да p и q могу бити хиперболни синус и косинус такође. Тако, у случају предзнака плус, најопштији облик унитарне матрице постаје

$$\mathbf{U} = e^{i\alpha}\begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}, \tag{17}$$

што значи да њу чини композиција две ротације, комплексне $e^{i\alpha}$ за угао α и реалне за угао ω. О хиперболној верзији ћу можда причати неком другом приликом.

22. Ротације

25. април 2021.

У прилогу је дато неколико појашњења комплексних бројева, ротација и њихових интерпретација у теорији информације.

Увод

Питање: У чему је „квака“ са тим унитарним операторима?

Одговор: Све изометријске трансформације (круте, које не мењају удаљености између тачака) су неке ротације: транслација, рефлексије (равнинска, линијска, централна симетрија), а наравно и ротације. То је у геометрији примећено одавно, а тек је квантна механика, настала почетком 20. века, томе дала значај у физици. Сви данас познати квантни процеси репрезентације су неких унитарних оператора, а они се састоје од две ротације[118]. Сви процеси макро-физике, замишљамо даље, сложене су композиције ових елементарнијих.

П: Мало теже пратим ове формуле, може ли појашњење? Какве са тиме има везе теорија информације?

О: Тај унитарни оператор састоје се од једне реалне ротације (у 3Д простору) и једне имагинарне (комплексне). Када се она имагинарна појављује у реалном облику (то није често) онда се интерпретира као обзервабла (физички мерљива величина). Теоријом информације покушавам и она „имагинарна“ стања схватити, макар као „не присуство“, а надам се (тестирам за сада) да је протумачим још и више, као „присуство“ дотичне појаве али не у „нашој стварности“ него у псеудо-реалности. Она је у полазишту моје теорије информације. Говорим о паралелном универзуму, или мултиверзуму, односно Еверетовом „много светова“ квантне механике.

П: Шта тим тумачењем добијамо?

О: Ваљда истину. Рационално објашњење имагинарног (комплексног) броја. Та област математике је одавно рационализована (нрп. за лакшу, бржу и сигурнију контролу авио саобраћаја већих аеродрома), али још увек не онако непосредно како ће то ускоро можда бити.

***

Питање: Можете ли ми дати једно једноставније објашњење експеримента „двоструки-отвор“ са становишта „теорије информације“?

Одговор: Имам их неколико[119], а ево једног које је можда најближе званичном посматрању ствари у квантној физици. Пре свега, подсећам, парадоксално је у том старом Јунговом експерименту из 1801. године, којим је он доказивао таласну природу светлости, да се интерференција честице (фотона, електрона, било које) дешава и када по само по једну честицу пуштамо кроз два отвора

[118] 21. Коњугован простор
[119] [2], 2.17 Двоструки отвор

са произвољно дугим временским паузама. Она и тада интерферира сама са собом попут правих таласа, али то се не догађа када талас или саму честицу пропуштамо кроз само један отвор.

Појава је последица суперпозиције, стања више могућности пре интеракције са екраном (мерењем). То су могућности коцке пре бацања, будући исходи неког од бројева од 1 до 6, који су у време пре реализације међусобно једнако „реални“. Путања електрона постаје дефинисана тек након мерења – приметили су својевремено неки оснивачи квантне механике. Путања честице је у много већем стању објективне неизвесности пре него после мерења односно интеракције, додаћу са становишта теорије информације – јер интеракцијом она предаје део своје информације (неодређености) мерном уређају, а важи закон одржања информације.

Тако, путујући кроз двоструки отвор ка застору (екрану) где ће бити мерена (опажена), честица је заиста у свим могућим стањима које њена неизвесност дозвољава. Таква могу интерферирати просто зато што је та неизвесност објективна, по претпоставци теорије информације. Она физички постоји у својим неизвесним стањима и када је не меримо.

Затварајући један од отвора суперпозиција губи опције и путања честице пре мерења постаје извеснија, што утиче на облик њене појаве на екрану на крају пута. Интеракција је сличан губитак опција такође, тада због преласка у стање мање информације, односно више вероватноће спрегом са околином.

П: Зар „неизвесност“ није тотална, неизвесна ствар?

О: Ако сам добро разумео, дилемом се циља на то да коцка пре бацања може имати и више могућности од стварних, да је на списку њених могућности поред датих шест бројева рецимо и број 13. Међутим то је погрешно размишљање, не само исходи него и неизвесности имају своја ограничења. Губећи део себе, неизвесност остаје са више извесности (подсећам, информација је количина, а неизвесност је њена врста). Коцка их има шест, а новчић само две.

П: Како је могуће да буде више објашњења истог? Која од њих не ваљају?

О: Теореме из геометрије могу се доказивати и помоћу алгебре (аналитичке геометрије). Нису сви докази једако једноставни или разумљиви, иако су једнако тачни. Тако је и са физиком, а тако је и са теоријом информације.

П: Где је у овој причи „информација перцепције“?

О: У вероватноћи спреге честице коју меримо и уређаја којим меримо. То су два квантна стања, два низа бројева чији производ дефинише вероватноћу интеракције и информацију коју то стање тада поседује.

Матрица ротације

Матрица ротације координатне равни Oxy око исходишта O за угао ω је

$$R_\omega = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \tag{1}$$

Знамо је доказати на разне начине, а ево неких нестандардних које сам користио годинама.

За скаларни и векторски производ вектора $A(a_x, a_y, 0)$ и $B(b_x, b_y, 0)$ важе једнакости:

$$A \cdot B = a_x b_x + a_y b_y = |A||B| \cos\omega, \tag{2}$$

$$\begin{cases} A \times B = (0 \quad 0 \quad a_x b_y - a_y b_x) \\ [A, B] = a_x b_y - a_y b_x = |A||B| \sin\omega \end{cases} \tag{3}$$

где су $|A| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ и $|B| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$ интензитети вектора, а $\omega = \sphericalangle(AOB)$ је угао између њих. Посебно, ако је вектор $B = R_\omega A$, онда вектори A и B задовољавају једнакости (1) и (2).

Пример 1. Користећи (2) покажимо да је (1) ротација за угао $\omega = \sphericalangle(AOB)$.

Решење. Нека је $p^2 + q^2 = 1$ и $A(p, q)$. Тада је:

$$(p \quad q)\begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = (p \quad q)\begin{pmatrix} p\cos\omega - q\sin\omega \\ p\sin\omega + q\cos\omega \end{pmatrix} =$$

$$= p^2\cos\omega - pq\sin\omega + qp\sin\omega + q^2\cos\omega =$$

$$= (p^2 + q^2)\cos\omega = \cos\omega,$$

што због (2) значи да је вектор A множен са (1) ротиран за ω. ■

Пример 2. Користећи (2) и (3) изведимо ротацију (1).

Решење. Нека је $|A| = |B|$. Тада је, прво:

$$b_x = \frac{(a_x^2 + a_y^2)b_x}{|A||B|} = \frac{a_x^2 b_x + a_x a_y b_y - a_x a_y b_y + a_y^2 b_x}{|A||B|}$$

$$= a_x \frac{a_x b_x + a_y b_y}{|A||B|} - a_y \frac{a_x b_y - a_y b_x}{|A||B|} = a_x\cos\omega - a_y\sin\omega$$

затим:

$$b_y = \frac{(a_x^2 + a_y^2)b_y}{|A||B|} = \frac{a_x^2 b_y - a_x a_y b_x + a_x a_y b_x + a_y^2 b_y}{|A||B|} =$$

$$= a_x \frac{a_x b_y - a_y b_x}{|A||B|} + a_y \frac{a_x b_x + a_y b_y}{|A||B|} = a_x\sin\omega + a_y\cos\omega$$

односно

$$B = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = R_\omega A$$

што је и требало показати. ■

Формуле (2) и (3) скаларног и векторског производа вектора иначе, као и

$$\cos\omega = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{|A||B|}, \ \ \sin\omega = \frac{a_x b_y - a_y b_x}{|A||B|}, \tag{4}$$

виђамо и користимо у разним приликама. Погледајмо једну такву њихову мање познату употребу. Нека су $A(a_x, a_y)$ и $B(b_x, b_y)$ тачке комплексне равни, тако да су $A = a_x + ia_y$ и $B = b_x + ib_y$ комплексни бројеви, где за имагинарну јединицу важи $i^2 = -1$.

За производ коњугованих комплексних бројева добијамо:

$$A^*B = \left(a_x + ia_y\right)^*\left(b_x + b_y\right) = \left(a_x - ia_y\right)\left(b_x + ib_y\right) =$$

$$\left(a_x b_x + a_y b_y\right) + i\left(a_x b_y - a_y b_x\right) = |A||B|(\cos\omega + i\sin\omega) = |A||B|e^{i\omega}$$

односно

$$A^*B = A \cdot B + i[A, B]. \tag{5}$$

Реални део (скаларни производ $A \cdot B$) остаје у равни датих комплексних бројева ($A, B \in \mathbb{C}$) док се имагинарни део (векторски производ $A \times B$) може сматрати окомитим на ту раван. Помоћу (4) видимо и да је (5) ротација комплексне равни око те окомице за угао ω.

Пример 3. Показати да је (5) ротација за угао ω.

Решење. Нека су 1 и i вектори базе комплексне равни $\mathbb{C}$ са датим тачкама $A(a_x, a_y)$ и $B(b_x, b_y)$, а $1'$ и i' вектори базе комплексне равни $\mathbb{C}'$, онда из:

$$\begin{cases} 1'\dfrac{a_x b_x + a_y b_y}{|A||B|} - i'\dfrac{a_x b_y - a_y b_x}{|A||B|} = 1'\cos\omega - i'\sin\omega = 1 \\ 1'\dfrac{a_x b_y - a_y b_x}{|A||B|} + i'\dfrac{a_x b_x + a_y b_y}{|A||B|} = 1'\sin\omega + i'\cos\omega = i \end{cases}$$

следи:

$$\begin{pmatrix} 1' & i' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}$$

а то је ротација базних вектора за угао ω. ■

Када скаларни производ представља производ (расподеле) вероватноћа, а векторски информација, онда (5) може представљати „информацију перцепције“. Реални део (производа коњугованих бројева A^*B) већи је што су расподеле „блискије“. Када угао $\omega \to 0$, тада $\cos\omega \to 1$ и

већа је вероватноћа удруживања, а имагинарни део (површина $|A \times B|$) тада је мањи, $\sin\omega \to 0$. Сагласно чешћем догађању вероватнијих исхода и такође „штедњи информације“, када A и B представљају стања, онда (5) процењује реализацију њихове спреге.

Карактеристичне вредности

Производи одговарајућих ко- и контра-варијантних вектора одређују „информацију перцепције“. Она представља виталност спреге два стања (множених вектора) и шансу удруживања, а тако дефинисана њена вредност остаје иста (инваријантна је) при промени система координата. Најчудније са таквим производима је што су линеарни оператори (процеси) дуални вектори вектора стања. У том контексту посебно су занимљиве карактеристичне вредности.

Нека је дата линеарна трансформација представљена матрицом $M \in X^*$ типа $n \times n$ и њеним сопственим вектором $u \in X$ истог реда (даље због једноставности узимамо $n = 2$)

$$Mu = \lambda u, \tag{6}$$

где је скалар $\lambda \in \Phi$ сопствена вредност датог вектора. У случају ротације (1) добијамо:

$$\begin{pmatrix}\cos\omega & -\sin\omega\\ \sin\omega & \cos\omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_x\\ u_y\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}u_x\\ u_y\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\cos\omega & -\sin\omega\\ \sin\omega & \cos\omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_x\\ u_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_x\\ u_y\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\cos\omega-\lambda & -\sin\omega\\ \sin\omega & \cos\omega-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_x\\ u_y\end{pmatrix} = 0. \tag{7}$$

Добили смо хомогени систем једначина за који знамо да може имати нетривијално решење (различито од нула-вектора) ако је детерминанта система нула:

$$\det\begin{pmatrix}\cos\omega-\lambda & -\sin\omega\\ \sin\omega & \cos\omega-\lambda\end{pmatrix} = 0,$$

$$(\cos\omega-\lambda)^2 + \sin^2\omega = 0,$$

$$\lambda^2 - 2\lambda\cos\omega + 1 = 0,$$

$$\lambda_{12} = \frac{2\cos\omega \pm \sqrt{4\cos^2\omega - 4}}{2} = \begin{cases}\cos\omega + i\sin\omega\\ \cos\omega - i\sin\omega\end{cases}$$

Дакле, постоје две сопствене вредности ротације, обе комплексни бројеви:

$$\lambda_{\pm} = e^{\pm i\omega}. \tag{8}$$

Знајући сопствене вредности, настављајући (7) израчунавамо одговарајуће сопствене векторе:

$$\begin{pmatrix}\cos\omega - e^{\pm i\omega} & -\sin\omega\\ \sin\omega & \cos\omega - e^{\pm i\omega}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_x\\ u_y\end{pmatrix} = 0,$$

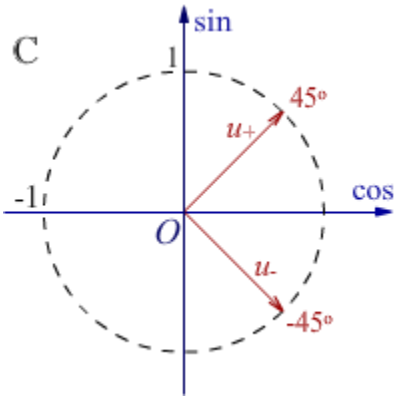
$$\begin{pmatrix} -i\sin\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & -i\sin\omega \end{pmatrix}_+ \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} i\sin\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & i\sin\omega \end{pmatrix}_- \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = 0,$$

$$u_x = \pm i u_y$$

па су сопствени (нормирани) вектори:

$$u_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad u_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Они чине ортонормирану базу ових ротација, јер $|u_+| = |u_-| = 1$ и $u_+ \perp u_-$, тј. $u_+ \cdot u_- = 0$.



На слици лево приказана су два сопствена вектора ротација у комплексној равни. Врхови оба се налазе на јединичној кружници са центром у исходишту. Први (u_+) чини угао $\frac{\pi}{4}$ радијана ($45°$) са апсцисом, а други $-\frac{\pi}{4}$. Други начин да се исти пишу је:

$$u_+ = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$
$$u_- = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$$

јер је косинус парна функција, па је $\cos(-x) = \cos x$, а синус је непарна и $\sin(-x) = -\sin x$. Они су базни вектори простора ротација. Поред поменутих услова ортонормираности, за ове векторе важи да је сваки вектор ротација нека њихова линеарна комбинација.

Заиста, за произвољне координате a и b, из

$$\begin{pmatrix} a \\ ib \end{pmatrix} = \frac{x}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{y}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

следи регуларан систем линеарних једначина

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = a \\ \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} = b \end{cases}$$

а отуда решење по непознатима

$$x = \frac{a+b}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{a-b}{\sqrt{2}}.$$

Дакле, за сваки пар (a, b) постоји неки пар (x, y) такав да се сваки комплексни број $z = a + ib$ може писати $z = xu_+ + yu_-$.

Закључак

Свака изометријска трансформација (сваки физички процес за који важи закон одржања) може се разложити на неке ротације (репрезентације ротација). Ово важи и за представљање комплексних бројева. Обзиром на особину производа коњуговано комплексних бројева (5), спрега стања која они представљају, биће извеснија ако је реални део тог производа већи, односно имагинарни део мањи.

Због закона великих бројева теорије вероватноће, то даље значи да се елементарнији (физички једноставнији) системи лакше могу налазити у имагинарном, нереалном стању. Иначе, егзистенција базе векторског простора, као и докази егзистенције најмањих порција (слободне) информације, иду у прилог овом закључку.

23. Пројекције вектора

29. април 2020.

Објашњава се мерење у квантној физици, хермитски оператор и позиција теорије информације.

Мерење

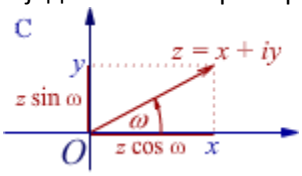
Питање. Можете ли ми једноставним примером објаснити мерење у квантној механици?

Одговор. На пример, размотримо бацање (фер или нефер) новчића. Могућности су „писмо“ или „глава“, а исход је једно од њих. Обзервабле, физички мерљиве величине, представљамо правоуглим Декартовим координатама Oxy. Стање пре бацања новчића је вектор са две компоненте, а реализације су пројекције вектора на апсцису и ординату (x или y осу).

П. Да ли је то квантно-механичко или информатичко објашњење?

О. Почетак је заједнички. Званична квантна физика разматра само реалне исходе. Она то чини путем вектора са комплексним коефицијентима, али се ограничава на хермитске операторе чије сопствене вредности су само реални бројеви Она посматра само реалне обзервабле, оне које припадају једном датом непроменљивом посматрачу. Информатичко објашњење иде корак даље и дозвољава комплексне исходе, а исту ситуацију види као спрегу два стања, објекта и субјекта, оба променљива.

У једноставном примеру какво је бацање новчића, вектор (бинарног) стања неизвесности може



бити и комплексан број $z = x + iy \in \mathbb{C}$, где за имагинарну јединицу важи $i^2 = -1$. На слици лево је општи такав, са апсцисом и ординатом на којима се налазе редом реални и имагинарни делови комплексног броја, $\mathrm{Re}\, z = x$ и $\mathrm{Im}\, z = y$, а оба су реални бројеви. Они одређују вероватноће обзервабли „писмо“ и „глава“. Квадрат пројекције стања је вероватноћа реализације тако да је збир квадрата исхода један, јер је исход једне од две могућности сигуран догађај:

$$|z|^2 = z^* z = (x + iy)^*(x + iy) = (x - iy)(x + iy) = x^2 + y^2 = 1. \qquad (1)$$

Број $|z|$ назива се модуо, апсолутна вредност, или интензитет комплексног броја $z = x + iy$. Број $z^* = x - iy$ је коњугован броју z, а производ $z^* z$ остаје непромењен након ротације комплексне равни $\mathbb{C}$ око исходишта O за произвољан угао φ. Наиме:

$$z \to z e^{i\varphi},\ z^* \to z^* e^{-i\varphi},\ \text{па}\ z^* z \to \left(z^* e^{-i\varphi}\right)\left(z e^{i\varphi}\right) = z^* z.$$

Још увек се држимо класичног квантно-механичког тумачења.

У случају више од две могућности, шест при бацању коцке, све поједине исходе сматрамо посебним обзерваблама и додељујемо свакој по једну координатну осу. Квадрати пројекција вектора на те осе (интензитет вектора множен косинусом угла до осе) су вероватноће реализације, тако да је збир квадрата свих пројекција опет један.

Разликујемо стања пре и након реализације случајног догађаја. У квантној механици је уобичајено могућности називати „суперпозицијом“ квантног стања и рећи да она „колабирају“ у један од исхода. У информатичком схватању додајемо равноправнији третман могућих исхода.

Поред тога, разликујемо шта се опажа од онога ко опажа, за сваку појединy (могућу) реализацију. Прво је стање објекта $z = x + iy$, друго је стање рецимо k-тог субјеката $z_k = x_k + iy_k$ паралелних реалности[120]. Спрега ова два је „информација перцепције“ догађања, производ првог коњугованог комплексног броја са другим:

$$z^* z_k = (x + iy)^*(x_k + iy_k) = (x - iy)(x_k + iy_k) =$$

$$= (xx_k + yy_k) + i(xy_k - yx_k) = z \cdot z_k + i|z \times z_k|$$

$$= |z||z_k| \cos\omega + i|z||z_k| \sin\omega$$

где је $\omega = \sphericalangle(z, z_k)$. Добили смо

$$z^* z_k = |z||z_k|(\cos\omega + i \sin\omega)$$

што се може писати

$$z^* z_k = |z||z_k| e^{i\omega}. \tag{2}$$

Ово је иначе добро познат резултат теорије комплексних бројева, али његове еквивалентне и ређе познате облике у извођењу сада сматрамо важнијим. Један од тих важнијих је комутатор, или псеудо-скаларни производ

$$[z, z_k] = |z \times z_k| = xy_k - yx_k = |z||z_k| \sin\omega, \tag{3}$$

који је већи када је информација спреге стања z и z_k већа, за разлику од скаларног производа

$$z \cdot z_k = xx_k + yy_k = |z||z_k| \cos\omega, \tag{4}$$

који изражава вероватноћу спреге стања z и z_k. Ово су резултати претходног прилога[121].

У информатичкој интерпретацији могуће је посматрати сваки од евентуалних исхода као посебну „псеудо реалност“ у којој се реализација дешава (могућности су објективне), па тако и радимо. Индекс k, односно стање z_k датог субјекта, треба узимати онолико вредности колико је могућих исхода, а ти су исходи еквивалентни обзерваблама квантне механике.

Претпставимо да је случајни догађај био бацање коцке и нека је „трећа реалност“ ($k = 3$) она где је пала „тројка“. Тамо се „објективно“ и „субјективно“ стање поклапају ($z = z_k$), па резултат (2) постаје $z^* z = 1$, а сваки од осталих пет где „није пала тројка“ није реалан. Угао (вектора стања) реализоване „тројке“ са таквима $\omega \neq 0$ па је и $\sin\omega \neq 0$. Зато имагинарни део спреге, производа (2), не исчезава и са становишта овог исхода ($k = 3$) сваки другачији исход ($s \neq k$) није реалан.

[120] [2], 2.13 Простор и време
[121] 22. Ротације

Хермитски оператор

Датој матрици M каже се да је хермитски коњугована матрица која јој је транспонована и има коњуговане коефицијенте. Краће је означавамо само коњуговањем M^* и називамо коњугованом подразумевајући и транспоновање. Напоменућемо ако би се десила другачија потреба. Квадратна матрица је хермитска ако је једнака својој (хермитски) коњугованој. Линеарни оператор је хермитски ако му је матрица хермитска.

Ово су оператори „квантних еволуција“. Са становишта теорије информације, додаћу, употреба хермитских оператора за третирање процеса подразумева једнакост објективног и субјективног, односно само једног реализованог исхода. Већ због тога ће се у развоју ове теорије морати одустати од коришћења самих хермитских оператора.

Матрице и оператори врсте су вектора, па дефиницију „хермитског“ лако преносимо и на векторе. Вектор-врста (хермитски) коњугован прелази у вектор-колону и обрнуто. Са Дираковом бра-кет нотацијом писање се поједностављује. На пример:

$$\langle\phi| = \begin{pmatrix}\phi_1^* & \dots & \phi_n^*\end{pmatrix},\ \ |\phi\rangle = \begin{pmatrix}\phi_1 \\ \dots \\ \phi_n\end{pmatrix}, \tag{5}$$

тако да је

$$\langle\phi|\psi\rangle = \phi_1^*\psi_1 + \cdots + \phi_n^*\psi_n\,,\ \ |\phi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix}\phi_1\psi_1^* & \dots & \phi_1\psi_n^* \\ \dots & \dots & \dots \\ \phi_n\psi_1^* & \dots & \phi_n\psi_n^*\end{pmatrix}, \tag{6}$$

у уобичајеним интерпретацијама скаларног (унутрашњег) производа и матрице.

Према томе, $|\psi\rangle^* = \langle\psi|$ и $\langle\psi|^* = |\psi\rangle$, а уопште сопствену вредност, иначе скалар $\lambda \in \mathbb{C}$, сопственог вектора $|\psi\rangle$ матрице (оператора) M, пишемо

$$M|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle. \tag{7}$$

Докажимо сада једну добро познату теорему линеарне алгебре.

Теорема. Сопствене вредности хермитског оператора су реалне. Узајамно су окомити сопствени вектори који одговарају различитим сопственим вредностима хермитског оператора.

Доказ. Множењем са леве стране (7) вектором $\langle\psi|$ добијамо $\langle\psi|M|\psi\rangle = \langle\psi|\lambda|\psi\rangle = \lambda\langle\psi|\psi\rangle$, а то је λ множено интензитетом вектора ψ. Када је матрица хермитска, коњуговањем (7) добијамо $\langle\psi|M = \langle\psi|\lambda^*$, па слично налазимо $\langle\psi|M|\psi\rangle = \langle\psi|\lambda^*|\psi\rangle$ и једнакост $\lambda = \lambda^*$, што значи да је сопствена вредност хермитске матрице (оператора) реалан број $\lambda \in \mathbb{R}$.

Да су произвољни сопствени вектори ϕ и ψ којима припадају различите сопствене вредности, редом a и b, хермитске матрице M окомити, доказујемо на следећи начин:

$$a\langle\phi|\psi\rangle = \langle a\phi|\psi\rangle = \langle\phi|M|\psi\rangle = \langle\phi|b\psi\rangle = b\langle\phi|\psi\rangle$$

и одузимањем крајњих вредности

$$(a-b)\langle\phi|\psi\rangle = 0$$

па како је по претпоставци $a \neq b$, то је $\langle\phi|\psi\rangle = 0$, дакле ови вектори узајамно су окомити, $\phi \perp \psi$. ■

Са овом теоремом постаје јасније зашто у теорији информације треба говорити о различитим димензијама простор-времена, тамо где се реализовани догађај десио и није десио. Мерења на основу различитих сопствених вредности потичу од стања из различитих димензија векторског простора, а та структура онда до изоморфизма мора одговарати физичкој структури.

Различити сопствени вектори који одговарају истој сопственој вредности не морају бити узајамно окомити (ортогонални), јер исту интеракцију (мерење) могу дати различита стања исте реалности[122]. Такође, вектори ортонормиране базе (јединични и узајамно окомити) не морају бити сопствени вектори било којег одговарајућег линеарног оператора; они не морају бити исходи истог догађаја. Али, као што смо видели, постоје оператори чији су сопствени вектори ортогонални и, према томе, могуће је имати базу која је ортонормирана и састоји се од сопствених вектора.

На пример, идентичка матрица I, која има јединице на главној дијагонали и све остале нуле, комутира са сваком матрицом ($MI = IM$) и сопствени вектор јој је сваки вектор датог простора, а ни једна друга матрица нема ово својство. Према томе, није тачно да два комутативна хермитска оператора обавезно деле заједничку сопствену базу[123], али ако два оператора деле једну сопствену базу, другим речима, ако се они могу узајамно дијагонализирати, они морају бити комутативни. То је објашњење са становишта алгебре.

Подсетимо се да некомутативност указује на Хајзенбергове релације неодређености[124]. Повећањем одређености једне физичке величине (импулса честице, или енергије) губи се на одређености друге (положаја, или тренутка мерења). Додајмо овоме начелну тежњу стања ка мањој информацији (већој вероватноћи), која омета комутативност, па приметимо да сва количина неизвесности, информација пре реализације случајног догађаја, прелази у информацију једног од исхода. Закон одржања у том случају, да два оператора деле једну сопствену базу, није препрека комутативности. А то је објашњење претходнога, сада са становишта физике и информације.

Такође је у математици добро познато да је матрице придружене хермитским операторима увек могуће дијагонализирати, из чега следи да хермитски оператор на n-димензионалном векторском простору има n линеарно независних сопствених вектора. Зато је у квантној механици за репрезентације таквих (базних вектора) увек могуће узимати управо обзервабле.

[122] Овде интерпретирам иначе познате теореме линеарне алгебре.
[123] Виђао сам ово наводно тврђење у текстовима.
[124] [2], 3.3 Релације неодређености

Када је матрица M придружена неком (ортогоналном) оператору n-димензионалног простора ортонормиране базе, тада су колоне (врсте) матрице узајамно ортонормирани вектори. Такође је $M^*M = I$, као и $M^{-1}M = I$, из чега следи да је њена детерминанта ± 1 и да је њеној хермитски коњугованој једнака њена инверзна матрица, $M^* = M^{-1}$. Ове матрице (оператори) заправо су ротације (рефлексије се могу свести на ротације).

Када је матрица M придружена неком унитарном оператору у ортонормираној бази неког векторског n-димензионалног простора, тада су колоне (такође и врсте) ортонормирани вектори и важи опет $M^*M = I$, као и $M^{-1}M = I$, из чега следи да је хермитски коњугована та матрица једнака својој инверзној.

Слично хермитским операторима, сопствени вектори унитарних и ортогоналних оператора су ортогонални. Доказе ових ставова лако је наћи у многим уџбеницима више алгебре и нема потребе да их овде понављам.

Епилог

Теорија информације коју развијам добро се слаже са идејом „паралелних реалности“ о којима сам у више наврата писао на различите начине. У овом прилогу ћете препознати покушај разраде те идеје на методу пројекције вектора (квантног стања) на координатне осе (обзервабле), што се у квантној физици данас рутински третира описом процеса физичког мерења.

Напомињем да је „мерење“ овде интеракција са мерним апаратима, односно врста „информације перцепције“ између два стања, посебна само по томе што је оно друго стање базни вектор.

24. Разна питања

2. мај 2021.

Овде су рестлови, сувишна понављања или недовршена питања, али на свој начин занимљива.

Питање: Како објашњавате некомутативност?

Одговор: У математици некомутативност је немогућност промене редоследа рачунских операција без промене резултата. Ако A значи „додати броју један“, а B је операција „удвостручење броја“, тада је $BA(x) = B(x+1) = 2x+2$, а $AB(x) = A(2x) = 2x+1$. Ове две композиције операција некомутативне су, јер $2x+2$ није једнако $2x+1$ бар за једно x (овде чак ни за једно).

П: Шта је са некомутативношћу у квантној физици и теорији информације?

О: У физици, почев до примера попут $(BA-AB)(x) = 1$ за сваки број x, па даље нашли бисмо да је некомутативност неких процеса у самој суштини Хајзенбергових релација неодређености[125]. Процеси су репрезентације оператора. То је теза квантне механике која необично жилаво одолева свим покушајима рушења, укључујући и од стране неких оснивача и великана те гране физике, попут Ајнштајна. Другим речима, оспоравајући „објективности неодређености“ (шта год то значило) ударићемо главом од овај зид, да постоје некомутативни процеси и да њихова негација подразумева негирање тачности саме алгебре.

У теорији информације, некомутативност разумемо помоћу спонтаног повећања ентропије[126] (други закон термодинамике), затим спонтаног смањења информације (пораст ентропије је смањење информације), или принципа најмањег дејства иначе несумњивог у класичној теоријској физици (а информација је еквивалентна дејству), па и помоћу „принципа вероватноће“: да се вероватнији случајни догађаји чешће догађају. А вероватнији су мање информативни, па смо заокружили сва четири става.

Због ове четири законитости, а онда и зато што постоји смер исхода процеса на путевима који знају бити погубни, обилажење различитим редоследом постаје битно. Није исто дати жмигавац возилом па отићи у лево и урадити то обрнутим редоследом, скренути па сигнализирати, бар што се тиче броја жртава у саобраћају. Ако је процес A фаталан (нема даље) а B није, онда $BA(x)$, где је x сада неки догађај, неће имати фазу B, док ће $AB(x)$ тећи до краја. Према томе, у ширем значењу „некомутативност“ је последица „принципа минимализма информације“.

***

Питање: Понашају ли се и научници „као овце“?

[125] [2], 3.3 Релације неодређености
[126] [2], 2.24 Генерализација ентропије

Одговор: Постоји формална веза свих облика преноса личних слобода на колектив. Организовано понашање које значи већи степен учешћа целине у управљању (повећања опција и оперативности групе), због закона одржања информације, мора тај вишак опција (информације) црпсти однекуд. Скоро увек то су јединке које чине групу, које као жива бића имају информације у вишку, а због принципа минимализма информације желе се тог вишка отарасити. Зато, поред осталог, своје слободе предајемо држави.

Слично је приметио Марк Твен са својим чувеним питањем о три краве на ливади. Ако две краве гледају у једном правцу, где гледа трећа крава? – он се питао да би одговорио – Тамо где гледају оне две! Аналогно је и збуњујуће, или фантастично, кретање чворака док лете у својим јатима[127]. Тако је и са научницима, нарочито у добро организованим институцијама, али и оним „слободним стрелцима“ који од таквих зависе.

Предајући своју слободу институцији, дакле неки вишак сопствене информације, појединац научник утолико је глупљи, али и већи због синергијског утицаја веће моћи групе на његов рејтинг. Томове књига психологије сада можемо писати о овим односима, али рекао сам ти „дно дна“. То је суштина, а све остало су нијансе.

***

Питање: Докле се стигло са „тамном материјом“?

Одговор: Ево читај[128].

П: Мислио сам где је „теорија информације“ у тој теми?

О: У „теорији информације“ коју развијам (искључиво самостално) маса би могла да оставља траг у прошлости из којег би могла (ослабљено) гравитационо деловати на садашњост.

П: Да ли има сличних хипотеза данас у физици?

О: Да и не. Одговарајуће и сличне прилоге љубазно ми шаљу уредници портала где (локално) качим своје текстове. Неке прилоге пошаљу ми да прегледам и кажем своје мишљење.

На пример, допала ми се недавна идеја једног аутора да је „тамна материја“ врста некадашњег Максвеловог етера. Да ли је читао моје текстове не знам, али могао ју је извући и из „Маховог принципа“, да укупна маса свемира утиче на локалну инертност и гравитацију. Тај принцип Мах је објашњавао просипањем воде из лавора који се окреће око своје осе (није свеједно да ли мирује лавор или свемир), а који је постао део Ајнштајнове опште теорије релативности.

Други занимљив недавни прилог (ових дана) појавио се са идејом да „периодни систем“ важи такође и за „тамну материју“, осим што обзервабле нису „ортогоналне“ (уобичајен захтев у квантној механици) и стога показују другачија својства од „нормалне материје“.

[127] Flock of starlings, https://www.youtube.com/watch?v=rDbGdc7L-qA
[128] What Is Dark Matter? https://www.space.com/20930-dark-matter.html

***

Питање: Зашто би било опасно нама људима срести напредну ванземаљску цивилизацију?

Одговор: Познати физичари као што је Мичио Каку, или Стивен Хокинг изводе те закључке из искуства и историје. За цивилизацију Инка било је фатално упознавање са Котезом и цивилизацијом тадашње Европе. Не треба потценити њихове разлоге, али ја имам и додатне.

Наиме, ако је овај свет сав ствар информација, а информација је мера неизвесности, онда нема ни конструкције нити деструкције без агресије. Појам „агресије“ (генералисан) је онај на који се могу свести и слободе и ограничења, интелигенција и хијерархија, или решавање и препознавања проблема. Када говоримо о биолошким врстама, оним припитомљеним требаће мањи мозак, биће мање радознале, мање освајачке.

Евентуална ванземаљска цивилизација која би била научно-технолошки далеко испред нас, ако би била далеко интелигентнија од нас, вероватно би била опасност за нас.

П: Ако је већ научно-технолошки далеко испред нас, како то „ако би била интелигентнија“, да ли је то лапсус?

О: Није грешка, јер у питању су ефекти супротних тенденција. Пораст удобности супротан је порасту интелигенције. Научно технолошки развој подстакнут је „принципом минимализма информације“, жељом за сигурности, уређености и бежањем од неизвесности. То је у основи тежње за нечињењем, инертности и мањим дејством. После неког нивоа развоја (интелигенције, науке и примена), развој последица се наставља али њен генератор (интелигенција) опада. То је један од најважнијих разлога (други је самоуништење) зашто сам ономад написао „да би веома интелигентне врсте у свемиру могле бити реткост ако уопште постоје“.

П: У којој фази је људска цивилизација?

О: То је тешко рећи из текуће „жабље перспективе“ нас. Овде причамо о еонима развоја, или барем хиљадама година историје. Узорак какав је Европа имала од 1500. до 2000. године недовољан је, далеко је од поузданог. Статистика ће у томе бити нејака; њене „истине“ су иначе локалне и варљиве, а оне су једине на које бих се данас „смео“ позивати. Најбољи насумични погодак можда би био да смо у фази „зрелости“. Прошли смо „лудости младости“, а пред нама су „успоравања старости“.

П: Веома напредна и веома стара цивилизација онда би могла бити питома?

О: Да.

Поговор

И то би било то. Покаже ли се ова „теорија информације“ истинитом и ови текстови испред свог времена, надам се, вредеће труда. У супротном опет добро, нећемо плакати због промашаја.

У време мог писања увелико је трајала наводна корона-пандемија, а ја сам као и остали у средњој школи, Бањалучкој Гимназији, радио наставу математике мало „у живо“ на часовима по 20 минута у оделењима, сваких 30-ак ученика подељених на две групе и два термина, а мало „на даљину“. Оно што је овде одвајано исто је моје приватно и локално као у претходним текстовима ове „теорије“ и мало се тицало било кога укључујући остале учеснике школе, као и нас на слици.

Сликање матураната традиција је у Републици Српској такође. Ово су ученици IV-4 разреда општег смера Гимназије Бања Лука са својом разредницом и два омиљена професора, априла 2021.

Аутор, маја 2021

Литература

[1] Растко Вуковић: *ПРИЛОЗИ ТЕОРИЈИ ИНФОРМАЦИЈЕ* – Од октобра 2020. до јануара 2021. (Економски институт Бања Лука, на чекању, 2021.)
https://archive.org/details/prilozi-teoriji-informacije

[2] Растко Вуковић: *ПРИЧЕ О ИНФОРМАЦИЈИ* – физике, биологије, права. (Економски институт Бања Лука, на чекању, 2020). https://archive.org/details/price_202008/

[3] Растко Вуковић: *ДЕЈСТВО ИНФОРМАЦИЈЕ* – енергија, време и комуникација. Економски институт Бања Лука, 2020. https://www.scribd.com/document/440746867/Dejstvo-informacije

[4] Растко Вуковић: *МИНИМАЛИЗАМ ИНФОРМАЦИЈЕ* – физичка информација и примене. Економски институт Бања Лука, 2020.
https://www.scribd.com/document/421087302/Minimalizam-informacije

[5] Растко Вуковић: *ФИЗИЧКА ИНФОРМАЦИЈА* – у друштвеним појавама и математици. Економски институт Бања Лука, 2019. https://www.scribd.com/document/406574702/

[6] Растко Вуковић: *МНОГОСТРУКОСТИ* – Избори живог и неживог света. Економски институт Бања Лука, лето 1918. https://archive.org/details/Mnogostrukosti

[7] Растко Вуковић: *КВАНТНА МЕХАНИКА* – репрезентација континуума (метричког и векторског простора). (Економски институт Бања Лука, на чекању, април 2018).
https://www.scribd.com/document/366396575/Kvantna-mehanika

[8] Растко Вуковић: *ПРОСТОР-ВРЕМЕ*, принципи физике случајности. Економски институт Бања Лука, мај 2017. https://www.scribd.com/document/347514158/Principi

[9] Растко Вуковић: *ИНФОРМАЦИЈА ПЕРЦЕПЦИЈЕ* – слобода, демократија и физика; Економски институт Бања Лука, 2016. https://archive.org/details/Informacija/Informacija/mode/2up

[10] Ferguson, Thomas S. "*Who Solved the Secretary Problem*?" Statistical Science, vol. 4, no. 3, 1989, pp. 282–289. JSTOR. http://www.jstor.org/stable/2245639

[11] Max Tegmark (2007): *The Mathematical Universe*. Dept. of Physics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139. https://arxiv.org/pdf/0704.0646.pdf

[12] M Buser, E Kajari, W P Schleich: *Visualization of the Gödel universe*. Published 30 January 2013. New Journal of Physics 15 (2013) 013063 (32pp).
https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/15/1/013063

[13] A. Aguirre-Astrain, H.N. Núñez-Yépez, L. Salas-Brito: *Geodesic time travel in Gödel's universe* ; Rev. mex. fís. E vol.62 no.2 México dic. 2016; ISSN 1870-3542;
http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1870-35422016000200135

[14] Abhas Mitra: *Deriving Friedmann Robertson Walker metric and Hubble's lawfrom gravitational collapse formalism*; Results in Physics,Volume 2, 2012, Pages 45-49, ISSN 2211-3797; https://doi.org/10.1016/j.rinp.2012.04.002

[15] Растко Вуковић: *МАТЕМАТИЧКА ТЕОРИЈА ИНФОРМАЦИЈЕ И КОМУНИКАЦИЈЕ*; Друштво математичара Републике Српске, Бања Лука, 1995.

[16] Растко Вуковић: *КВАНТНА МЕХАНИКА* – репрезентација континуума (метричког и векторског простора); април, 2018. https://www.scribd.com/document/366396575/Kvantna-mehanika

[17] Reuven Cohen, Shlomo Havlin, and Daniel ben-Avraham: *Structural Properties of Scale-Free Networks*; WILEY-VCH Verlag Berlin GmbH, January 2003. http://havlin.biu.ac.il/PS/handbook446.pdf

[18] Reuven Cohen, Shlomo Havlin: *Scale-Free Networks are Ultrasmall*; arXiv:cond-mat/0205476, 4 February 2003. https://arxiv.org/pdf/cond-mat/0205476.pdf